REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour L'Obtention du Diplôme de

MAGISTER

Option : Equations Différentielles

Par
Mr : Saci Atef

THEME

Cycles Limites Non Algébriques

Soutenu le :09/10/2009

Devant le jury

Président :	Pr Drabla Slalah	Pr. Université Ferahat Abbas Sétif
Rapporteur :	Dr Bendjedou Ahmed	M.C Université Ferahat Abbas Sétif
Examinateur :	Dr. Hemici Naceurdine	M.C Université Ferahat Abbas Sétif
	Dr. Merzougui Abdelkarim	M.C Université Mohamed boudiaf M'sila

الإهـداء

أهـدي هـذا العـمل المتواضع إلى والدي الكـريـمـيـن وإلى كـل أساتـذتي وإلى كـل أفـراد أسرتي .

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents, à tout mes enseignants et à toute ma famille.

TABLE DE MATIERES

Introduction Générale....3

Chapitre I

Généralités

1) Introduction 7

2) Vocabulaire 7

Système autonome

Plan de phase

Trajectoire du système

Portrait de phase

3) Etude qualitative....8

Théorème d'existence et d'unicité

Points d'équilibres

Intégrales premières

Facteur intégrant inverse

Stabilité....10

Portraits de phase

Cycles limites....14

Critères de base

Stabilité du cycle limite

Théorèmes importants sur l'oscillateur....18

4) Comment se produisent les cycles limites....22

Chapitre II

Cycles limites algébriques et non-algébriques

1) Introduction 25

2) Synthèse des travaux antérieurs....27

3) Une famille de systèmes avec un cycle limite algébrique.....41
4) Une famille de systèmes avec un cycle limite non-algébrique.....44

Chapitre III

Coexistence d'un cycle limite algébrique avec non algébrique

1) Introduction.....50
2) Application : deux cycles limites algébriques.....50
3) Application : un cycle limite algébrique.....53
4) Application : un cycle limite non-algébrique.....54
5) Contribution : un cycle limite non-algébrique.....56
6) Application : coexistence d'un cycle limite algébrique avec non-algébrique.....60
Conclusion et perspectives.....66
Références.....67

Introduction Générale :

Historique :

Dans sa thèse de 1778 sur l'intégration des équations aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables indépendantes, **Poincaré** développa une méthode de résolution dans la ligne des travaux de **Cauchy** sur la théorie des fonctions d'une variable complexe. Il se consacra ensuite à la théorie des équations différentielles ordinaires, qu'il a abordée de deux points de vue différents. Le premier concerne le champ réel, où il fait une étude qualitative des courbes qui représentent les solutions. Dans le cas du premier ordre, la forme de ces courbes est déterminée par les points singuliers de l'équation (où le champ de vecteur s'annule), ses cycles limites (courbes solutions fermées) et les cycles sans contact (avec les courbes solutions). Les points singuliers sont de différents types : par les cols passent deux courbes; aux noeuds une infinité de courbes se croisent; les courbes tournent autour des foyers en s'en rapprochant indéfiniment; il existe aussi dans certains cas des centres entourées par les courbes qui s'enveloppent successivement. Etudiant la distribution de ces diverses espèces de points, Poincaré parvint à établir que les courbes solutions sont en général des spirales entre des cycles limites ou entre un cycle limite et un foyer. Poincaré étendit plus tard ces résultats à des systèmes d'équations différentielles plus généraux.

16 problème de Hilbert [5], [18]

Considérons un système différentiel dans IR^2 :

$$\dot{x} = P(x, y) \qquad \dot{y} = Q(x, y) \tag{2.1}$$

dont les coefficients $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des polynômes. Le seizième problème de Hilbert pose la question de l'existence d'un nombre maximal de cycles limites. En d'autres termes : Existe-t-il une borne M pour le nombre de cycles limites, de la forme $M \leq n^{\sigma}$, où n est le maximum des degrés de P et Q, et σ est une constante universelle ? C'est une version moderne de la seconde moitié du seizième problème de Hilbert. En fait, depuis un article de Petrovskii et Landis (1957) [5] prétendant donner une solution positive, les progrès semblent aller à reculons. Un peu plus tôt, Dulac (1923) [18] affirmait que le système (2.1) à toujours un nombre fini

de cycles limites. Après qu'un trou fût trouvé dans Petrovskii-Landis (voir [Petrovskii-Landis, 1959]), Ilyashenko (1985) a trouvé une erreur dans l'article de Dulac. Puis Shi Songling (1982) a trouvé un contre-exemple aux bornes spécifiques de Petrovskii-Landis pour le cas $d = 2$. Ensuite, deux longs travaux ont été publiés, indépendamment, démontrant les affirmations de Dulac [Ilyashenko, 1991] et [Écalle, 1992]. Ces deux articles ont cependant à être complètement digérés par la communauté mathématique. Ainsi, on sait qu'il y a un nombre fini de cycles limites, mais on n'a pas de majoration.

Un cycle limite est une trajectoire de l'espace des phases fermée et isolée. Dans ce contexte, le terme isolé indique que toutes les trajectoires voisines ne sont pas fermées. Si toutes les trajectoires voisines se rapprochent du cycle limite, il est dit stable. Ce concept est fondamental car il modélise les systèmes qui présentent des oscillations périodiques et auto-entretenues (sans l'application d'une force externe, il y a de nombreux exemples en biologie). Le phénomène de cycle-limite est typiquement non-linéaire. Pour un système linéaire, les trajectoires fermées ne sont pas isolées et elles dépendent des conditions initiales du système. Le cycle limite est déterminé par la structure non linéaire du système.

Ceci est un bref historique sur les cycles limites.

Les systèmes différentiels sont utilisés pour construire des modèles mathématiques de phénomènes à peu près dans tous les domaines scientifiques : physique, économie, biologie, écologie... C'est pourquoi il est sans doute inutile de rappeler l'importance des systèmes différentiels. Par conséquent, les systèmes différentiels représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

La résolution explicite des systèmes différentiels non linéaires, à l'aide des fonctions usuelles, est rarement possible. Un petit nombre de classes des systèmes possédant des formes particulières peuvent être ramenées par changements de variables successifs à une équation résoluble.

Dans le cas des systèmes différentiels non linéaires, il faut penser à l'étude qualitative qui signifie avoir des informations sur les solutions des système différentiels et leurs propriétés sans la résolution explicite. Parmi les solutions importantes des systèmes différentiels on trouve les solutions périodiques isolées appelées CYLES LIMITES par H. Poincaré. Si un système différentiel admet un cycle limite la connaissance des autres solutions est relativement sans importance pour mieux comprendre les propriétés du système. D'où l'importance de savoir

l'existence ou non d'un cycle limite pour un système différentiel. On distingue deux classes de cycles limites : l'une algébrique et l'autre non algébrique.

Dans ce mémoire notre objectif est l'étude des cycles limites non algébrique d'une classe de systèmes différentiels polynomiaux planaires,

On se basant sur des travaux récents (voir [10], et [2] en 2005), en particulier on va construire des systèmes différentiels polynomiaux avec des cycles limites, on plus l'expression exacte du cycle limite est obtenue.

Dans le premier chapitre un sommaire des résultats connus sur les systèmes différentiels planaires est donné : théorème d'existence et d'unicité, plan de phases, intégrales premières, et nous donnons les critères d'existence de cycles limites par la méthode de " facteur intégrant inverse ".

Au chapitre deux, nous donnons l'essentiel des résultas sur la construction de systèmes différentiels polynomiaux planaires, une première classe avec au plus deux cycles limites, ensuite une classe avec un unique cycle limite algébrique enfin un autre classe avec un unique cycle limite non-algébrique. Notons que dans chaque cas on étudie la stabilité et la multiplicité du cycle limite.

Au chapitre trois, on donne des applications sur les théorèmes du chapitre deux, et en particulier on va construire un système différentiel polynomial avec un cycle limite non algébrique unique, et déterminer la stabilité.

Chapitre I

Généralités

1) Introduction

2) Vocabulaire

- Système autonome
- Plan de phases
- Trajectoire du système
- Portrait de phase

3) Etude qualitative

- Théorème d'existence et d'unicité
- Points d'équilibres
- Intégrales premières
- Facteur intégrant inverse
- Stabilité
- Portraits de phase
- Cycles limites
- Critères de base
- Stabilité du cycle limite
- Théorèmes important sur l'oscillateur

4) Comment se produisent les cycles limites

1) Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des systèmes du second ordre, c'est à dire régis par une équation différentielles du second ordre.

$$f\left(\ddot{x}, \dot{x}, x\right) = 0$$

On peut associer à cette équation différentielle une représentation d'état d'ordre 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

tel que $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$

L'espace d'état ainsi défini est un plan puisque de dimension 2.

L'étude de ces systèmes différentiels présente un intérêt théorique considérable et correspond à des problèmes pratiques importants pour tout ce qui concerne les phénomènes de vibration, résonance, existence de cycle limite.

Nous allons introduire les vocabulaires qui nous seront dans la suite.

2) Vocabulaire

Définition

Un système du second ordre *autonome* peut être représenté par le système de deux équations différentielles scalaires :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

où $\cdot$ $P(x, y)$, $Q(x, y)$ sont des fonctions non linéaires ne dépendent pas de t explicitement, (x, y) sont les variables de *phase* ou d'*état*.

Définition

Le plan des coordonnées (x, y) est appelé le *plan de phase*

Définition

Lorsque t varie la solution $(x(t), y(t))$ est représentée par une courbe paramétrée dans plan de phases, cette courbe est appelée une *trajectoire* du système.

Définition

L'ensemble des trajectoires de phase pour différentes conditions initiales est le *portrait de phase.*

3) Etude qualitative

Dans l'étude qualitative des équations différentielles dans le plan, le problème fondamental est l'existence d'orbite périodique, et plus précisément d'orbite périodique isolée, appelée cycle limite par H. Poincaré

Théorème d'existence et d'unicité [12]

Dans cette section, on donne le théorème fondamental de Cauchy-Lipschitz qui garantit localement l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles, éventuellement non linéaires.

Nous donnons la formulation dans le cas réel.

Théorème

Soit $f : I \times D \to \mathbb{R}$ une fonction continue, où D et I sont des intervalles bornés de $\mathbb{R}$ qui contiennent respectivement les points $y = y_0$ et $t = 0$.

On suppose en outre que f vérifie la condition dite de Lipschitz :

$$\forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in D,\ |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k\,|y_1 - y_2|\,,$$

avec $k > 0$.

Il existe un intervalle $J \subseteq I$ sur lequel est défini l'unique solution de l'équation différentielle

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \qquad (1)$$

qui satisfait la *condition initiale* $y(0) = y_0$.

Remarque

* Hormis la continuité, la condition moins triviale imposée par le théorème est la condition

de Lipschitz. Une condition plus parlante qui implique l'inégalité de Lipschitz, est que f et $\frac{\partial f}{\partial y}$ soient continues dans $I \times U$. En effet, les fonctions continues sur des intervalles bornés sont bornées.

* Il est intéressant de constater que si la dérivée partielle n'est pas bornée, il peut exister plusieurs solutions.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour le cas d'un système d'équations différentielles s'énonce comme suit :

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, ..., y_n) \\ ..... \\ \dot{y}_n = f_n\,(t, y_1, ..., y_n), \end{cases} \qquad (2)$$

en notations vectorielles s'écrit comme suit

$$\dot{y} = f(t, y), \qquad (3)$$

où $y = (y_1, ..., y_n)$ et $f = (f_1, ..., f_n)$ sont des vecteurs.

La continuité du vecteur fonction f implique celle de toutes les fonctions $f_1, ..., f_n$, et au lieu de $\frac{\partial f}{\partial y}$ on considère la matrice de dérivées partielles $\frac{\partial\, f_i}{\partial\, y_k}$, $i, k = 1, ..., n$.

Le théorème d'existence et d'unicité d'une solution et tous les raisonnements du théorème passé restent valables pour un système d'équations donné sous la forme (3).

$|y|$ désigne donc la longueur du vecteur y : $|y| = \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}$.

Définition

On appelle les points d'équilibre (a, b) du système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \qquad (S)$$

les points (a, b) tels que $P(a, b) = Q(a, b) = 0$.

Les points d'équilibre du système (a, b) sont des solutions (constantes) évidentes $(x, y) = (a, b)$.

Définition

On appelle intégrale première du système (S), une fonction différentiable :

$$U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

telle que pour toute solution Φ de (S) :

$$\frac{d\ U\left(\Phi\left(t\right)\right)}{d\ t} = 0.$$

Définition

Une fonction $V(x, y)$ est un facteur intégrant inverse de système (S) dans sous ensemble ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, si

1) $V \in C^1\left(U\right)$,

2) $V \neq 0$ dans U et

$$P\frac{\partial V}{\partial x} + Q\frac{\partial V}{\partial y} = \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right] V\left(x, y\right)$$

Stabilité

Définition

Considérons le système d'équations différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

ou, en notation vectorielle,

$$\dot{X} = f(t, X),\ X = (x, y) \qquad (4)$$

Supposons que P et Q sont de classe C^1 pour x et y.

a) La solution $X = \varphi\left(t\right)$ du système (4) est dite stable au sens de Liapounov, si

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0, \text{ tel que } \left\|X(t_0) - \varphi\left(t_0\right)\right\| < \delta,$$

alors

$$\|X(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$$

pour tous les $t \geqslant t_0$.

b) La solution $(x(t), y(t)) = \varphi(t)$ est appelée asymptotiquement stable lorsqu'elle est stable au sens de Liapounov et lorsque

$$\exists\ \delta_1 > 0, \text{ tel que } \|X(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta_1,$$

alors

$$\lim_{t \to +\infty} \|X(t) - \varphi(t)\| = 0.$$

La stabilité ne dépend pas du choix de t_0.

c) Si, d'autre part, pour un certain $\varepsilon > 0$, un tel δ n'existe pas, la solution $\varphi(t)$ est instable.

Remarque

Contrairement à ce qui se passe dans le cas des systèmes linéaires, il peut arriver qu'un système non linéaire possède à la fois des solutions stables et d'autres solutions qui sont instables.

Théorème (stabilité des systèmes différentiels linéaires) [12]

Soit l'équation différentielle $\dot{Y} = AY$ tel que A est une matrice $n \times n$:

*) L'origine est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.

*) S'il existe au moins une valeur propre possède une partie réelle nulle, alors l'origine est stable.

*) S'il existe au moins une valeur propre possède une partie réell positif alors l'origine est instable.

Portraits de phase en dimension 2

Introduisons un peu de terminologie et discutons qualitativement le comportement des solutions selon le signe des valeurs propres.

Soit l'équation différentielle $\dot{Y} = AY$ tel que A est une matrice 2×2, et λ_1, λ_2 des valeurs propres de A :

1- Si λ_1 et λ_2 sont toutes 2 négatives et différentes, on parle de noeud (asymptotiquement

stable), ou de puits.

2- Si λ_1 et λ_2 sont toutes 2 positives et différentes, on parle aussi de noeud (instable), ou de source.

3- Si une des valeurs propres est positive et l'autre négative, il existe au moins une direction instable on parle de point selle ou col.

4-Dans le cas de valeurs propres identiques, il n' y à qu'un seul vecteur propre et on parle de noeud impropre (stable ou instable).

5- Dans le cas des valeurs propres conjuguées, les trajectoires sont des spirales logarithmiques lorsque la partie réelle des valeurs propres $\alpha \neq 0$ et on parle de foyers (stable ou instable).

Dans le cas ou' $\alpha = 0$, les trajectoires sont périodiques, il s'agit de centre.

En dimension 2, l'ensemble des comportements peut être représenté dans le plan $\det A - trA$, ce que montre la figure5.5.

Stabilité des systèmes différentiels non linéaires

Soit $(x(t), y(t))$ une solution du système.

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

afin d'étudier sa stabilité, il important de mettre en évidence la partie linéaire des fonctions P, Q au voisinage du point $x = y = 0$, d'après la formule de Taylor par exemple.

Le système obtenu peut être étudié à l'aide du théorème suivant

Théorème (théorème de Laipounov) [4]

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + \Psi_1(x, y) \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + \Psi_2(x, y), \end{cases} \qquad (5)$$

où a_{ik} sont des constantes et Ψ_i des infiniment petits d'ordre supérieur à 1, plus précisément, pour $|X| < \varepsilon_0$ on a :

$$|\Psi_i| \leq \lambda(X)|X|,\ i = 1, 2,\ \lambda(X) \to 0 \text{ pour } |X| \to 0, \text{ où } |X| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}.$$

Alors,

* si toutes les valeurs propres de la matrice (a_{ik}), $i, k = 1, 2$ possèdent des parties réelles négatives, la solution nulle du système (5) est asymptotiquement stable,

* si moins une valeur propre possède une partie réelle nulle alors la solution nulle est stable,

* si au moins une valeur propre possède une partie réelle positive, la solution nulle est instable.

Donc : dans ces conditions, on peut se demander si la stabilité (l'instabilité) du point d'équilibre du système (5) entraîne la stabilité (l'instabilité) du point d'équilibre du système initial (S).

Définition

Soit Γ_1 une trajectoire représentative de la solution $X_1(t)$ de système (S) démarrant au point a_1 à l'instant $t = t_0$. Soit Γ une autre trajectoire démarrant en un autre point a.

Si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $|a - a_1| < \delta \Rightarrow \sup\{dist(x.\Gamma_1), x \in \Gamma\} < \varepsilon$,

Alors la trajectoire Γ_1 est dite stable au sens de Poincaré.

Cycles limites

On a déjà le comportement des systèmes différentiels linéaires aux temps long en dimension deux. Parmi les solutions présentant une certaine forme de stabilité, rappelons que nous avons distingué en particulier les solutions asymptotiquement stables (puits et foyers stables) et les solutions périodiques (centres).

Les systèmes différentiels non linéaires peuvent également admettre des solutions asymptotiquement stables, mais possèdent un autre type de comportement connu sous le nom de cycles limites.

Définition

La solution $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ du système différentiel autonome :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

est dite périodique s'il existe $T \succ 0$ tel que :

$$\begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t), \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

T est alors son période. Dans le plan des phases une solution périodique est représentée par une courbe fermée.

Définition

Soit :

$$\begin{cases} x = \Psi_1(t) \\ y = \Psi_2(t), \end{cases}$$

Une solution périodique du système (S) et γ la courbe représentative de cette solution.

On dit que γ est une solution périodique isolée si :

$\exists\ \delta > 0, \forall\ M$ dans le plan des phases : $d(\ \gamma, M) < \delta$,

Alors il n'existe pas d'autre solution périodique passant par M.

Définition

Un cycle limite est une solution périodique isolée.

* La représentation géométrique d'un cycle limite dans le plan de phases est une courbe fermée régulière, qui entoure au moins un point d'équilibre.

Théorème (Bendixon-Poincaré) [7]

Soient P et Q deux fonctions de classe $C^1\left(\Omega \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$, où Ω est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

Supposons que :

- Le système d'équations différentielles (S) admet un point d'équilibre instable

- il existe un domaine fermé qui entoure ce point d'équilibre dans lequel toutes les trajectoires sont entrantes, alors, le système converge vers un cycle limite.

Théorème (théorème de non - existence (critère de Bendixon)) [19]

Si, dans une région du plan de phases, la quantité :

$$\frac{\partial\ P}{\partial\ x} + \frac{\partial\ Q}{\partial\ y}$$

(P, Q) vecteur vitesse) garde un signe constant, il ne peut y avoir de trajectoire fermée dans ce domaine du système (S). Donc le système (S) n'admet pas de cycle limite.

Critères de base

Maintenant on donne les nouveaux critères pour étudier l'existence, non-existence, et l'unicité de cycle limite d'un système de la forme (S)

Critère (critère d'existence de cycle limite) [8]

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

et supposons que :

1) P, Q défini sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ de classe C^1, soit $(x(t), y(t))$une solution périodique

de (S) de période T,

2) $U = U(x, y)$ de classe C^1 solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$P(x,y)\ \frac{\partial U}{\partial x} + Q(x,y)\ \frac{\partial U}{\partial y} = R(x,y)\ U(x,y), \tag{6}$$

où $R : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1vérifiant :

$$\exists\ T > 0 : \ \int_0^T R(x\,(t)\,, y\,(t))dt \neq 0.$$

Alors si $\gamma\,(t) = \{(x(t))\,, y(t)), t \in [0, T]\}$ est un trajectoire fermée de période T contenu dans l'ensemble

$$\sum = \{(x, y) \in \Omega,\ U(x, y) = 0\}\,,$$

et γ n'est pas contenu dans un anneau circulaire, de plus si P, Q sont analytiques, alors $\gamma\,(t) = (x(t), y(t))$ est un cycle limite de (S).

Preuve

On défini $R(t) = R(x(t), y(t))$ et $U(t) = U(x(t), y(t))$ on considère l'équation différentielle $\dot{z} = R(t)z$. Sa solution générale est

$$z(t) = z(0) \exp\left(\int_0^t R(s)ds\right).$$

Puisque $U(x, y)$ est la solution de l'équation (6) et $(x(t), y(t))$ est solution de (S), il s'en suit que $z = U(t)$ est solution de $\dot{z} = R(t)z$. Donc

$$U(t) = U(0) \exp \int_0^t R(s)ds.$$

Puisque $(x(t), y(t))$ solution périodique de période T, $U(T) = U(0)$. D'ou $\int_0^T R(t)dt \neq 0$, on trouve que $U(0) = 0$, et par conséquent $U(t) = 0$.

Maintenant nous supposons que γ contenu dans un anneau circulaire.

Alors il y a un anneau circulaire A voisinage fermée de γ.

Nous notons que γ peut être dans la limite de A.

Puisque $\int_\gamma Rdt \neq 0$, si A est suffisamment borné, alors $\int_\gamma Rdt \neq 0$ pour toute trajectoire fermée $\grave{\gamma}$ dans A donc $A \subset \sum$.

Donc contradiction avec le fait que $\sum$ est localement 1-dimensionnel (variété 1-dimmensionnel), donc γ n'est pas contenu dans un anneau circulaire. C' est bien connu dans la théorie du système planaire analytique que la courbe périodique n'est pas un cycle limite, quand est contenu danse un anneau circulaire.

Puisque la deuxième possibilité ne peut pas se produire, γ est un cycle limite.

Remarque

Nous notons que ce critère montre que quand nous savons explicitement la solution $U(x, y)$ de l'équation (6), $U(x, y) = 0$, qui sont des trajectoires d'un système (S) à travers l'équation (6) pour un R donné, nous avons en outre de l'information sur les solutions périodiques de système (S) parce que si γ est une trajectoire fermée, qu'il doit satisfaire que l'un ou l'autre γ est contenu dans

$$\sum = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ U(x, y) = 0\right\},$$

ou

$$\int_\gamma Rdt = 0.$$

Critère [8]

Considérons le système (S) et supposons que

1) P, Q de classe C^1,

2) $U = U(x, y)$ de classe C^1 solution de l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$p\frac{\partial U}{\partial x} + Q\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) U \qquad (7)$$

si γ est un cycle limite du système (S), alors γ est contenu dans

$$\sum = \{(x, y) \in \Omega : U(x, y) = 0\}.$$

Stabilité du cycle limite

Définition

- On appelle cycle limite stable, un cycle limite vers lequel les trajectoires avoisinantes convergent.

- On appelle cycle limite instable, un cycle limite duquel les trajectoires avoisinantes s'éloignent.

- On appelle cycle limite semi-stable, un cycle limite vers lequel les trajectoires avoisinantes convergent d'un côté et s'éloignent de l'autre.

Le résultat suivant, donnent une formule pour distinguer la stabilité d'un cycle limite

Théorème [15]

Soit $\gamma(t)$ une orbite périodique du système (S) de période T.

Alors γ est un :

cycle limite stable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))\, dt < 0,$$

et γ est instable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))\, dt > 0,$$

avec

$$\operatorname{div}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Théorèmes important sur l'oscillateur :

Définition

Un oscillateur est tout système qui :

- Possède un état d'équilibre stable

- Peut être le siège d'un phénomène physique qui fait osciller l'état du système autour de l'état d'équilibre,

- Le modèle mathématiques est souvent donné par :

$$\ddot{x} + f\ (x, \dot{x}) = 0.$$

Considérons l'oscillateur non linéaire suivant :

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \qquad II$$

tel que

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \text{ où } f(x, \dot{x}) = \sum_{i=0}^{n} f_{i+1}(x)\, \dot{x}^i.$$

Cette équation est appelée oscillateur de type Liénard d'ordre n, lorsque $n = 0$ ou $n = 1$.

L'oscillateur II s'écrit :

$$\ddot{x} + f_1(x)\, \dot{x} + g(x) = 0. \qquad (8)$$

$$\ddot{x} + f_2(x)\, \dot{x}^2 + f_1(x)\, \dot{x} + g(x) = 0. \qquad (9)$$

La solution de l'oscillateur de type Liénard la plus intéressante au point de vue des applications correspond au cycle limite dans le plan des phases.

Théorème [19]

Soit l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \qquad \text{II}$$

Qui s'écrit dans le plan des phases :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x, y)y - g(x), \end{cases}$$

où f et g sont des fonctions continues.

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $\exists\ \alpha > 0$ tel que $f(x, y) > 0$ pour $\sqrt{x^2 + y^2} > 0$,

2) $f(0, 0) < 0$ (d'ou $f(x, y) < 0$ au voisinage de $(0, 0)$),

3) $xg(x) > 0$ pour $x \neq 0$,

4) $G(x) = \int_0^x g(u)du \to +\infty$ si $x \to +\infty$.

Alors l'équation II admet au moins une solution périodique.

Théorème (théorème de Liénard) [19]

Soit l'équation de type Liénard :

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0,$$

On suppose que f et g satisfait les conditions :

1) f et g sont continûment dérivable,

2) g c'est une fonction impaire : $g(-x) = -g(x)$,

3) $g(x) > 0$ pour $x > 0$,

4) f est une fonction paire : $f(-x) = f(x)$,

5) soit $F(x) = \int_0^x f(u)du$ et $F(x) < 0$ pour $0 < x < a$, $F(x) > 0$ est croissante pour $x > a$.

Alors, l'équation Liénard a un cycle limite unique et stable, entourant l'origine.

Théorème [19]

Soit :

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \text{ (l'équation de Liénard).}$$

On pose $F(x) = \int_0^x f(u)du$, et on suppose :

1) $f(x) = f(-x)$, $f(0) < 0$ et $\lim F(x) = +\infty$ si $|x| \to +\infty$, on suppose qu'il existe x_0 tel que, $F(x) < 0$ si $0 < x < x_0$ et $F(x_0) = 0$.

De plus $F(x)$ est croissante pour $x > x_0$,

2) $xg(x) > 0$ si $x \neq 0$.

Alors elle existe une solution périodique unique.

Remarque

Dans les années vingt, Bathasar Van Der Pol (1922), un ingénieur hollandais étudiait les propriétés électriques des tubes à néon. Il modélisa les décharges du tube l'équation qui porte son nom :

$$\ddot{x} - \varepsilon\left(1 - x^2\right)\dot{x} + x = 0 \text{ ou } \varepsilon > 0,$$

Le théorème précédent s'applique par exemple à l'équation de Van Der Pol :

Le système de Van Der Pol (cf. Figure 5.7) en est un bon exemple [17], utilisé pour modéliser de nombreux systèmes biologiques régulés, dont le système cardiaque.

L'unique cycle limite d'un système de Van Der Pol, lorsqu'il existe, est une courbe non algébrique difficile à approximer (voir [14]), et il peut être très utile, dans les applications, d'en avoir une estimation polynomiale.

La figure 5.7 présente le plan de phase de l'oscillateur de Van Der Pol pour plusieurs conditions initiales.

Il n'est pas facile de prévoir le nombre et la position des cycles limites, même en dimension 2.

4) Comment se produisent les cycles limites

Dans beaucoup de cas le cycle limite se produit en raison du changement de paramètre dans un système d'équations différentielles. Le processus le plus habituel de la formation d'un cycle limite est le suivant. Supposons que nous avons un système de deux équations différentielles avec un paramètre c :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, c) \\ \dot{y} = g(x, y, c), \end{cases} \tag{10}$$

Supposons que pour $c = c_1$ tel que le système (10) a un attracteur global qui est une spirale stable. Ceci signifie que toute les trajectoire convergent d'un point d'équilibre pendant un temps t.

Parce que notre point d'équilibre est une spirale stable, alors, la partie linéaire du système dans ce point aura deux valeurs propres complexes

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \alpha < 0.$$

Cependant, parce que notre système dépendra maintenant du paramètre c les valeurs propres dépendront également de ce paramètre

$$\lambda_{1,2} = \alpha(c) \pm i\beta(c),$$

Parce que nous avons supposé qu'a $c = c_1$ le système (10) a un équilibre qui est une spirale stable, alors $\alpha(c) < 0$. Quand on change le paramètre c la valeur de $\alpha(c)$ changera donc $\exists$ $c = c_2$ tel que $\alpha(c_2) > 0$.

Ceci signifie que la spirale stable dans la figure 8.4a deviendra une spirale instable.

Cependant, comme nous avons, les valeurs propres nous donnent seulement la dynamique prés du point d'équilibre de notre système. Donc, au voisinage du point d'équilibre la spirale stable devienne instable, le comportement globale loin de l'équilibre demeure le même, c'est-à-dire, loin de l'équilibre nous avons toujours un écoulement convergent (figue 8.4b).

Par conséquent, dans notre portrait de phase nous avons deux types d'écoulement, l'écoulement

divergent du plongeur de la spirale instable autour de l'équilibre et l'écoulement convergent de la périphérie.

La considération géométrique simple prouve que ces deux écoulements doivent être sépares l'un de l'autre. La line de séparation sera le *cycle limite* dans notre système, donc, nous obtiendrons un portrait de phase comme dans la figue 8.1.a.

Donc, un tel mécanisme de formation de cycle limite se produit fréquemment dans les systèmes de deux équations, qui s'appelle la bifurcation de Hopf. De notre analyse il découle que la bifurcation de Hopf se produit quand $\alpha(c)$ change son signe, c'est-à-dire, il existe c^* où :

$$\alpha(c^*) = 0.$$

Chapitre II

Cycles limites algébrique et non-algébrique

1) Introduction

2) Synthèse des travaux antérieurs

3) Une famille de systèmes avec un cycle limite algébrique

4) Une famille de systèmes avec un cycle limite non-algébrique.

1) Introduction

Nous donnons dans ce chapitre une famille de systèmes différentiels polynomiales planaires dont les cycles limites peuvent être explicitement décrits, en utilisant les coordonnés polaires, nous caractérisons la multiplicité de chaque cycle limite.

La famille donnée des systèmes différentiels polynomiales planaires peut avoir deux cycles limites au plus, en prenant compte de l'ordre de la multiplicité.

Comme une application de ce résultat nous donnons un exemple de système différentiel polynomial planaire, avec deux cycles limites explicites, un d'entre eux *algébrique* et l'autre *non-algébrique.*

Maintenant on donne les vocabulaires qui nous seront utiles dans ce chapitre.

Fonction algébrique et fonction transcendante

* On qualifie d'algébrique toute fonctionnelle $x \mapsto y$ d'une variable réelle ou complexe x, définie sur un domaine D de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour laquelle il existe un polynôme P non nul en x et y vérifiant $P(x, y) = 0$ pour tout x de D.

Une fonction non algébrique est dite transcendante.

Dans la pratique, $P(x, y)$ peut s'écrire plus généralement

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + ... + a_1(x)y + a_o(x)$$

où n est un entier naturel et $a_k(x)$ sont des polynômes.

* Une fonction non algébrique est dite transcendante, C'est le cas des fonctions trigonométriques usuelles, des fonctions exponentielles et logarithmiques, des fonctions trigonométriques hyperboliques, des fonctions elliptiques et d'un grand nombre de fonctions définies par des équations différentielles.

* Rappelons que :

Les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles, Les fonctions exponentielles, Les fonctions trigonométriques, Les fonctions hyperboliques, Les fonctions logarithmiques, Les fonctions trigonométriques inverses, Les fonctions hyperboliques inverses, La fonction x^α où $\alpha \in R$ est défini par $x^\alpha = e^{\alpha \log(x)}$, ainsi que les fonctions qui en dérivent par un nombre fini d'opération

telles que addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racines sont appelées *fonctions élémentaires.*

Courbe algébrique invariante

Définition

$R[x,y]$ l'anneau des polynômes réel de deux variable x, y, $g(x,y) \in R[x,y]$,

$g(x,y) = 0$ s'appelle courbe algébrique invariante du système

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y), \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

Si

$$p(x,y)\frac{\partial g}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial g}{\partial y} = K(x,y)g(x,y),$$

tel que $K(x,y)$ un polynôme de degré $n-1$, $n = \max(\text{degré}P, \text{degré}Q)$.

Le polynôme $K(x,y)$ est appelé cofacteur du système (S).

Cycle limite algébrique

Définition

Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ un cycle limite du système (S), on dit $\gamma(t)$ est un cycle limite algébrique s'il existe un polynôme $F(x,y) \in R[x,y]$ telle que :

$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \subset \{(x,y) \in IR^2 / F(x,y) = 0\}$.

Un cycle limite qui n'est pas algébrique est dit non-algébrique.

Définition

L'équation de Riccati est de la forme

$$\grave{y} = P(x)y^2 + Q(x)y + L(x) \qquad (*)$$

- Si $P(x) = 0$ alors (*) est une équation linéaire.

- Si $L(x) = 0$ alors (*) est une équation de Bernoulli $(n = 2)$.

Sinon (*) est une équation de Riccati.

2) Synthèse des travaux antérieurs

Récemment Jaume Giné & Maite Grau dans un article intitulé (Coexistence of algebraic and non-algebraic limit cycles, explicitly given [10]) ont construit une classe de systèmes différentiels polynomiales avec deux cycles limites l'un est algébrique l'autre non-algébrique.

Le but de ce chapitre est de d'analyser l'essentiel des résultats de l'article [10].

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y), \end{cases} \qquad (1)$$

supposons que $P(x,y), Q(x,y) \in R[x,y]$ tel que $R[x,y]$ est l'anneau des polynômes réels de deux variables, et supposons toujours que P, Q sont des polynômes premiers entre eux (le seul diviseur est une constante non nulle).

Un problème important de la théorie qualitative d'équation différentielle est de déterminer les cycle limite d'un système de la forme (1).

Il est intéressant pour un système différentiel de connaître le nombre de ces cycles limites, mais il est également intéressant de savoir leur distribution (configuration) dans le plan de phases.

Dans les travaux [2], [10] et on trouve des méthodes pour construire des classes de système différentiel dont on peut donner une expression explicite du cycle limite, ce problème est difficile sauf pour un cas réduit de classe de systèmes différentiels, dans notre travail on va donner des exemples représentatifs des ces classes.

Les seuls cycles limites connus d'une manière explicite étaient algébrique. Récemment en 2005 dans [2] un exemple d'un cycle limite explicite qui n'est pas algébrique est donnée.

Nous donnons une famille du système différentiel polynomial planaire de la forme (1) avec les cycles limites explicites, cette famille, décrite dans le **théorème 1**, peut avoir au plus deux cycles limites, qui peuvent être algébrique ou pas, et sont explicitement représentés en coordonnées polaires.

Nous rappelons que le changement des coordonnées cartésiennes (x,y) aux coordonnées polaires (r,θ) est donnés par

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

le changement inverse est

$$x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta).$$

Nous Considérons un système polynomial de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = P_n(x,y) + P_m(x,y) + P_{2m-n}(x,y) \\ \dot{y} = Q_n(x,y) + Q_m(x,y) + Q_{2m-n}(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

tel que P_j, Q_j sont des polynômes homogènes de degré j et $n < m < 2m-n$ donc le système (2) s'écrit dans l'ordre croissant du degré des polynômes homogènes, par transformation aux coordonnées polaires du système (2), alors :

$$\begin{cases} \dot{r} = f_{n+1}(\theta)\, r^n + f_{m+1}(\theta)\, r^m + f_{2m-n+1}(\theta)\, r^{2m-n} \\ \dot{\theta} = g_{n+1}(\theta) r^{n-1} + g_{m+1}(\theta)\, r^{m-1} + g_{2m-n+1}(\theta)\, r^{2m-n-1}, \end{cases}$$

tel que $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

nous remarquons que :

$$\begin{aligned} f_i(\theta) &= \cos\theta\ P_{i-1}(\cos\theta,\ \sin\theta) + \ \sin\theta\ Q_{i-1}(\cos\theta, \sin\theta) \\ g_i(\theta) &= \cos\theta\ Q_{i-1}(\cos\theta,\ \sin\theta) - \sin\theta\ P_{i-1}(\cos\theta, \sin\theta), \end{aligned}$$

et, dont, $f_i(\theta)$ et $g_i(\theta)$ sont des polynômes trigonométriques homogènes dans les variables $\cos\theta$, $\sin\theta$ de degré i.

Considérons des systèmes (2) avec $P_n(x,y) = xR_{n-1}(x,y)$, $Q_n(x,y) = yR_{n-1}(x,y)$, $P_{2m-n}(x,y) = xR_{2m-n-1}(x,y)$ et $Q_{2m-n}(x,y) = yR_{2m-n-1}(x,y)$ où $R_J(x,y)$ sont des polynômes homogènes du degré j, ceci donne

$$g_{n+1}(\theta) = 0,\ \ g_{2m-n+1}(\theta) = 0.$$

Par conséquent, nous considérons une famille du système différentiel polynomial planaire de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = xR_{n-1}(x,y) + P_m(x,y) + xR_{2m-n-1}(x,y) \\ \dot{y} = yR_{n-1}(x,y) + Q_m(x,y) + yR_{2m-n-1}(x,y), \end{cases} \tag{3}$$

où $m > n \geq 1$.

En coordonnées polaires ce système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{r} = f_{n+1}(\theta)\, r^n + f_{m+1}(\theta)\, r^m + f_{2m-n-1}(\theta)\, r^{2m-n} \\ \dot{\theta} = g_{m+1}(\theta)\, r^{m-1}. \end{cases} \tag{4}$$

Dans la suite, en tenant compte du système (3), nous supposons toujours que le système correspondant (4) satisfait que le polynôme trigonométrique homogène $g_{m+1}(\theta)\, f_{2m-n+1}(\theta)$ n'a aucune racine réelle.

Théorème 1 [10]

Nous considérons le système (3) dont le système équivalent en coordonnées polaires (4) satisfait la condition : $g_{m+1}(\theta)\, f_{2m-n+1}(\theta) \neq 0\ \forall \theta \in IR$.

Alors le système (3) a au plus deux cycles limites, qui en coordonnées polaires sont de la forme :

$$r(\theta, \rho_0) = \left(\frac{1}{\delta(\theta)} \left[\frac{\dot{w}_1(\theta) + \delta_0 \rho_0 \dot{w}_2(\theta)}{w_1(\theta) + \delta_0 \rho_0 w_2(\theta)} \right] \right)^{\frac{1}{m-n}}, \tag{5}$$

tel que $\{w_1(\theta), w_2(\theta)\}$ est un ensemble des solutions fondamentales de l'équation différentielle linéaire homogène du second degré

$$A_2(\theta)\, \ddot{w}(\theta) + A_1(\theta)\, \dot{w}(\theta) + A_0(\theta)\, w(\theta) = 0, \tag{6}$$

satisfait :

$$w_1(0) = 1 \text{ et } \dot{w}_1(0) = 0,\ w_2(0) = 0 \text{ et } \dot{w}_2(0) = 1,$$

et où

$$\begin{aligned}
&\delta(\theta) = \tfrac{n-m}{g_{m+1}(\theta)} f_{2m-n+1}(\theta), \\
&A_0(\theta) = (m-n)^2 f_{2m-n+1}(\theta)^2 f_{n+1}(\theta), \\
&A_1(\theta) = -g_{m+1}(\theta)\left[(m-n) f_{2m-n+1}(\theta) f_{m+1}(\theta) + g_{m+1}(\theta)\dot{f}_{2m-n+1}(\theta) - \dot{g}_{m+1}(\theta) f_{2m-n+1}(\theta)\right], \\
&A_2(\theta) = f_{2m-n+1}(\theta) g_{m+1}(\theta)^2,
\end{aligned} \tag{7}$$

et $\delta_0 = \delta(0)$.

Si (5) représente un cycle limite alors ρ_0 doit être un solution de l'équation :

$$\delta_0^2 w_2(2\pi)\rho_0^2 + \delta_0\left[w_1(2\pi) - \dot{w}_2(2\pi)\right]\rho_0 - \dot{w}_1(2\pi) = 0. \tag{8}$$

Remarquons que : $r(0,\rho_0) = \rho_0^{\frac{1}{m-1}}$, et par conséquent, la condition que ρ_0 solution de l'équation (8) est une condition nécessaire pour avoir un cycle limite pour le système (3) donnée en termes de valeurs du rayon du cycle limite correspondant a l'angle $\theta = 0$.

Remarquons que l'hypothèse $g_{m+1}(\theta)\, f_{2m-n+1}(\theta) \neq 0, \forall\theta \in \mathbb{R}$ alors $g_{m+1}(\theta)$ et $f_{2m-n+1}(\theta)$ n'a aucune racine réelle.

Il est clair que si $\exists\ \theta^*$ tel que $g_{m+1}(\theta^*) = 0$, alors la ligne droite qui contient l'origine, et la pente " $\tan\theta^*$" de la ligne droite est invariante pour le système (3). Dans ce cas, il n'y a aucun cycle limite pour le système (3).

Puisque notre but est de rechercher les cycles limites, nous supposons que

$g_{m+1}(\theta)\, f_{2m-n+1}(\theta) \neq 0$ pour aucune valeur $\theta \in \mathbb{R}$.

Nous expliquons comment relier une équation de Riccati au système (4) dans les **preuves des résultats**. Le fait qu'une équation de Riccati a au plus deux cycles limite n'est pas nouveau. Il y a plusieurs travaux montrant, ce fait, voir par exemple [8].

Le corollaire suivant est une conséquence de la preuve du **théorème 1**.

Corollaire 2 [10]

Considérons le système (3) dont le système équivalent en coordonnées polaires (4) satisfait la condition : $g_{m+1}(\theta) f_{2m-n+1}(\theta) \neq 0\ \forall\theta \in IR$. Et supposons les fonctions $w_1(\theta)$ et $w_2(\theta)$ définies dans le **théorème 1**.

- Si le système (3) a une bande continue des orbites périodiques alors $\dot{w}_1(2\pi) = w_2(2\pi) = 0$ et $w_1(2\pi) = \dot{w}_2(2\pi)$.

- Si $\dot{w}_1(2\pi) = w_2(2\pi) = 0$ et $w_1(2\pi) = \dot{w}_2(2\pi)$ alors le système (3) n'a aucun cycle limite.

Comme conséquence de ce corollaire, si nous n'avons pas $\dot{w}_1(2\pi) = w_2(2\pi) = 0$ et $w_1(2\pi) = \dot{w}_2(2\pi)$, et si le système (3) admet une orbite périodique, alors il est isolée, c'est-à-dire, c'est un cycle limite.

*) Afin d'étudier la stabilité d'une orbite périodique γ, nous définissons l'application de Poincaré.

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y), \end{cases} \qquad (1)$$

et soit $\sum$ est une section (est un arc d'une courbe), et $q \in \sum$, dénotons par $\pi(q)$ le point correspondant à la première intersection de la solution du système (1) commençant dans q à $\sum$.

- Pour γ est une orbite périodique et $p_0 \in \gamma$,on a $\pi(p_0) = p_0$.

- La fonction $\pi : \sum \to \sum$ défini de cette façon s'appelle l'application de Poincaré pour γ à p_0.

Supposons que: $\dot{\pi}(p_0) \neq 1$, où $\dot{\pi}(p_0) = \frac{\partial \pi}{\partial p_0}$, donc :

1) Si $\dot{\pi}(p_0) > 1$ alors γ est instable,

2) Si $\dot{\pi}(p_0) < 1$ alors γ est stable,

3) Si $\dot{\pi}(p_0) \neq 1$, nous disons que γ est hyperbolique ou de multiplicité 1.

- Dans le cas $\dot{\pi}(p_0) = 1$, mais π ne serait pas l'identité, il existe nombre entier k, avec $k > 1$, tel que $\pi^{(k)}(p_0) \neq 0$,

Dans ce cas

1) Si $\pi^{(k)}(p_0) > 0$ alors γ est instable,

2) Si $\pi^{(k)}(p_0) < 0$ alors γ est stable,

3) Si $\pi^{(k)}(p_0) \neq 0$, nous disons que γ est une cycle limite de la multiplicité k.

* Nous sommes également intéressés à savoir la multiplicité des cycles limites associés au système (3) qui est décrit dans le **théorème 1**, au cas où ils existent. Ce résultat récapitulé dans la prochaine proposition.

Proposition 3 [10]

Considérons le système (3) dont le système équivalent en coordonnées polaires (4) satisfait la condition : $g_{m+1}(\theta) f_{2m-n+1}(\theta) \neq 0 \ \forall \theta \in IR$. Et supposons les valeurs $w_2(2\pi)$ et $\Delta = [w_1(2\pi) + \dot{w}_2(2\pi)]^2 - 4W(2\pi)$ où $w_1(\theta)$ et $w_2(2\pi)$ sont définis dans **théorème 1** et $W(2\pi) = w_1(2\pi)\dot{w}_2(2\pi) - \dot{w}_1(2\pi) w_2(2\pi)$. Nous avons :

- Si $w_2(2\pi) = 0$, alors il existe tout au plus un cycle limite, et s'il existe alors il est hyperbolique,
- Si $w_2(2\pi) \neq 0$ et $\Delta < 0$, alors il n'y a aucun cycle limite,
- Si $w_2(2\pi) \neq 0$ et $\Delta > 0$, alors il peut avoir tout au plus deux cycles limites, et s'il existe, alors il est hyperbolique,
- Si $w_2(2\pi) \neq 0$ et $\Delta = 0$, alors il y a au plus un cycle limite et s'il existe, alors il est de multiplicité deux.

Notons que nous pouvons également écrire :

$$\Delta = [w_1(2\pi) - \dot{w}_2(2\pi)]^2 + 4w_2(2\pi)\dot{w}_1(2\pi).$$

Donc, si $w_2(2\pi) = 0$, alors $\Delta = [w_1(2\pi) - \dot{w}_2(2\pi)]^2$, dans ce cas d'après le **théorème 1** et le **corollaire 2**, il y a au plus un cycle limite si $\Delta \neq 0$ et $\dot{w}_1(2\pi) \neq 0$, et ne représente aucun cycle limite si $\dot{w}_1(2\pi) = 0$ ou $\Delta = 0$.

Preuve des résultats (théorème 1, corollaire 2, proposition 3)

Preuve du théorème 1

Considérons le système (3) dont le système équivalent en coordonnées polaires (4) satisfait la condition : $g_{m+1}(\theta) f_{2m-n+1}(\theta) \neq 0 \ \forall \theta \in IR$.

Rappelons que le système (4) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{r} = f_{n+1}(\theta) r^n + f_{m+1}(\theta) r^m + f_{2m-n+1}(\theta) r^{2m-n} \\ \dot{\theta} = g_{m+1}(\theta) r^{m-1}, \end{cases}$$

donc

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{f_{n+1}(\theta)}{g_{m+1}(\theta)} r^{n-m+1} + \frac{f_{m+1}(\theta)}{g_{m+1}(\theta)} r + \frac{f_{2m-n+1}(\theta)}{g_{m+1}(\theta)} r^{m-n+1}, \qquad (9)$$

par changement de variable $r = \rho^{\frac{1}{m-n}}$, c'est-à-dire, $\rho = r^{m-n}$ donc $d\rho = (m-n)\, r^{m-n-1} dr$, nous déduisons que $\rho(\theta)$ satisfait l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{m-n}{g_{m+1}(\theta)} \left[f_{n+1}(\theta) + f_{m+1}(\theta)\, r^{m-n} + f_{2m-n+1}(\theta)\, r^{2m-2n} \right]$$

alors

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{m-n}{g_{m+1}(\theta)} \left[f_{n+1}(\theta) + f_{m+1}(\theta)\, \rho + f_{2m-2n}(\theta)\, \rho^2 \right], \tag{10}$$

l'équation (10) est une équation de Riccati.

Dans le travail [9], les auteurs ont traité l'intégrabilité de l'équation de Riccati comme (10), Un raisonnement classique relie des équations de Riccati avec des équations linéaires homogènes du second degré de la forme (6) :

$$A_2(\theta)\, \ddot{w}(\theta) + A_1(\theta)\, \dot{w}(\theta) + A(\theta)\, w(\theta) = 0,$$

où $w(\theta)$ est une fonction inconnue $\dot{w}(\theta) = \frac{d\, w(\theta)}{d\, \theta}$, $\ddot{w}(\theta) = \frac{d^2\, w(\theta)}{d\theta^2}$, et $A_i(\theta)$ sont fonction de θ, ce qui sera des polynômes trigonométriques dans notre cas. La relation entre l'équation (10) et l'équation (6) est donnée par le changement de fonctionnel

$\dot{w}(\theta) = \delta(\theta)\, \rho(\theta)\, w(\theta)$, donc, nous déduisons que

$\ddot{w}(\theta) = \left[\dot{\delta}(\theta)\, \rho(\theta) + \dot{\rho}(\theta)\, \delta(\theta) + \delta^2(\theta)\, \rho^2(\theta) \right] w(\theta)$,

où $\delta(\theta)$ est une fonction à prendre.

Si nous substituons ces expressions en (6), alors :

$$A_2(\theta) \left[\dot{\delta}(\theta)\, \rho(\theta) + \dot{\rho}(\theta)\, \delta(\theta) + \delta^2(\theta)\, \rho^2(\theta) \right] w(\theta) + A_1(\theta) \left[\delta(\theta)\, \rho(\theta)\, w(\theta) \right] + A_0(\theta)\, w(\theta) = 0,$$

donc:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{A_1(\theta)}{A_2(\theta)\, \delta(\theta)} - \left(\frac{A_1(\theta)}{A_2(\theta)} + \frac{\dot{\delta}(\theta)}{\delta(\theta)} \right) \rho - \delta(\theta)\, \rho^2.$$

Cette équation différentielle ordinaire coïncide avec (10), on obtient les valeurs de $\delta(\theta)$, $A_0(\theta)$, $A_1(\theta)$ et $A_2(\theta)$ décrit dans (7). Nous rappelons que $\delta(0) = \delta_0$.

Dans le travail [9], nous donnons une expression d'une première intégrale d'une équation de

Riccati au moyen des solutions correspondantes d'équation différentielle linéaire homogène du second degré (6). Ne considérons pas θ^* tel que $A_2(\theta^*) = 0$, parce que nous avons déjà supposé que $g_{m+1}(\theta)$ et $f_{2m-n+1}(\theta)$ n'a aucune racine réelle.

Considérons $\{w_1(\theta), w_2(\theta)\}$ l'ensemble des solutions fondamentales de l'équation (6), puisque $A_2(\theta) \neq 0 \ \forall \ \theta \in \mathbb{R}$, les deux solutions $\{w_1(\theta) \ , w_2(\theta)\}$ sont bien définies $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Comme avéré dans le théorème 8 de [9], une première intégrale de l'équation (10) est

$$H(\rho \ , \theta) = c$$

avec

$$H(\rho \ , \theta) = \frac{g_{m+1}(\theta)\, \dot{w}_1(\theta) + (m-n)\, f_{2m-n+1}(\theta)\, w_1(\theta)\, \rho}{g_{m+1}(\theta)\, \dot{w}_2(\theta) + (m-n)\, f_{2m-n+1}(\theta)\, w_2(\theta)\, \rho} \ .$$

En utilisant les résultats donnés en [9], nous donnons également l'expression d'un facteur intégrant inverse pour le système (4) :

$$V(r \ , \theta) = r^n \frac{g_{m+1}(\theta)}{\delta(\theta)^2} \exp\left\{\int_0^\theta \frac{(m-n)\, f_{m+1}(\tau)}{g_{m+1}(\tau)} d\tau\right\} \left(\dot{w}(\theta) - \delta(\theta)\, w(\theta)\, r^{m-n}\right)^2 .$$

Pour le système (3) le facteur intégrant inverse donné par :

$$V\left(\sqrt{x^2+y^2}, \ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\sqrt{x^2+y^2}.$$

En [9], on a si le système (3) a au moins une courbe algébrique invariante (différente de $x^2 + y^2 = 0$), il y a alors une intégrant inverse de Darboux. Cependant, ce facteur intégrant inverse de Darboux ne doit pas être bien défini dans le plan de phase.

Soit $s_*(\theta) = \frac{\dot{w}_*(\theta)}{\delta(\theta)\ w_*(\theta)}$ pour toute solution non-nulle $w_*(\theta)$ de (6). Définissons de façon analogue $s_{**}(\theta)$ pour toute solution non-nulle $w_{**}(\theta)$. La fonction suivante $\tilde{V}(r, \theta)$ est un autre facteur d'intégrant inverse du système (4) :

$$\tilde{V}(r, \theta) = r^n g_{m+1}(\theta) \frac{(\ r^{\,m-n} - \ s_*(\theta)\ )(\ r^{\,m-n} \ - \ s_{**}(\theta)\ )}{s_*(\theta) \ - \ s_{**}(\theta)}.$$

Si le système (3) a deux cycles limites, Alors prenant aux correspondants des fonctions

périodiques $s_*(\theta)$ et $s_{**}(\theta)$ (la période 2π) Dans ce cas, le facteur d'intégrant inverse transformé dans des coordonnées cartésiennes est bien défini dans le plans de phase.

Employons l'expression montrée de la première intégrale $H(\rho,\theta)=c$, la solution générale $\rho(\theta,\rho_0)$ de l'équation (10) tel que $\rho(0,\rho_0)=\rho_0$ est :

$$\begin{aligned}\rho(\theta,\rho_0) &= \frac{-g_{m+1}(\theta)}{(m-n)\,f_{2m-n+1}(\theta)}\left[\frac{\dot{w}_1(\theta)-H(\rho_0,0)\,\dot{w}_2(\theta)}{w_1(\theta)-H(\rho_0,0)\,w_2(\theta)}\right]\\ &= \frac{1}{\delta(\theta)}\left[\frac{\dot{w}_1(\theta)-H(\rho_0,0)\,\dot{w}_2(\theta)}{w_1(\theta)-H(\rho_0,0)\,w_2(\theta)}\right]. \qquad (11)\end{aligned}$$

On a $\rho=r^{m-n}$, nous déduisons que la solution générale $r(\theta,r_0)$ de l'équation (9) tel que $r(\theta,r_0)=r_0$ est :

$$r(\theta,r_0)=\left(\frac{1}{\delta(\theta)}\left[\frac{\dot{w}_1(\theta)-H\left(r_0^{m-n},0\right)\dot{w}_2(\theta)}{w_1(\theta)-H\left(r_0^{m-n},0\right)w_2(\theta)}\right]\right)^{\frac{1}{m-n}}. \qquad (12)$$

Remarque 4

Les orbites périodiques de (3) sont des orbites $r(\theta\ ,\ r_0)$ de l'équation (9) tel que $r(2\pi\ ,\ r_0)=r_0$ et $0<r(\theta\ .\ r_0)<\infty$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$.

La condition $r\ (2\pi,r_0)=r_0$ ne suffit pas pour caractériser une orbite périodique.

Une orbite $r(\theta\ ,\ r_0)$ de l'équation (9) tel que $r(2\pi\ ,\ r_0)=r_0$ et $0<r(\theta,r_0)<\infty$ pour $\theta\in\mathbb{R}$, s'appelle une orbite périodique de l'équation (9) dans la suite.

Puisque le changement de variable $\rho=r^{m-n}$, il est clair que

* si $r(\theta\ ,\ r_0)$ est une orbite périodique de l'équation (9), alors l'orbite $\rho(\theta,\rho_0)$, est une orbite pour l'équation (10) avec $\rho(2\pi,\rho_0)=\rho_0$ et $0<\rho(\theta,\rho_0)<\infty$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$.

Et contrairement, si nous avons une orbite $\rho(\theta,\rho_0)$ pour l'équation (10) avec $\rho(2\pi,\rho_0)=\rho_0$ et $0<\rho(\theta,\rho_0)<\infty$ pour $\theta\in\mathbb{R}$, alors nous récupérons une orbite périodique, $r(\theta,r_0)$, pour l'équation (9).

Comme avant,

une orbite $\rho(\theta,\rho_0)$ de l'équation (10) satisfaisant $\rho(2\pi,\rho_0)=\rho_0$ et $0<\rho(\theta,\rho_0)<\infty$ pour $\theta\in\mathbb{R}$, s'appelle une orbite périodique de l'équation (10).

Notre but est de donner des conditions nécessaires de sorte qu'une orbite $\rho(\theta\ ,\ \rho_0)$ de

l'équation (10) soit périodique.

Nous pouvons choisir $\{w_1(\theta), w_2(\theta)\}$ l'ensemble des solutions fondamentales de (6) satisfaisant $w_1(0) = 1$, $\dot{w}_1(0) = 0$, $w_2(0) = 0$, $\dot{w}_2(0) = 1$. Pour les conditions initiales, on a $H(\rho_0, 0) = -\delta_0\rho_0$, où nous employons l'expression de $\delta(\theta)$ décrite en (7) et que $\delta_0 = \delta(0)$.

On a $f_{2m-n+1}(\theta) g_{m+1}(\theta) \neq 0$, donc $\delta(\theta)$ est bien défini, pour n'importe quelle valeur $\theta \in \mathbb{R}$,

et elle est périodique de période 2π.

D'ailleurs, de (11), nous obtient la solution générale $\rho(\theta, \rho_0)$ de l'équation (10), avec la condition initiale $\rho(0, \rho_0) = \rho_0$:

$$\rho(\theta\ ,\ \rho_0) = \frac{1}{\delta(\theta)}\left[\frac{\dot{w}_1(\theta) + \delta_0\rho_0\dot{w}_2(\theta)}{w_1(\theta) + \delta_0\rho_0 w_2(\theta)}\right]. \tag{13}$$

Nous récupérons l'équation (5) des équations (12) et (13).

On a alors $\delta(2\pi) = \delta_0$ car $\delta(\theta)$ est un fonction périodique de période 2π avec $\delta_0 = \delta(0)$.

Donc, pour $\rho(2\pi, \rho_0) = \rho_0$, on a

$$LC(\rho_0) = \delta_0 w_2(2\pi)\rho_0^2 + \delta_0\left[w_1(2\pi) - \dot{w}_2(2\pi)\right]\rho_0 - \dot{w}_1(2\pi) = 0. \tag{14}$$

Une condition nécessaire pour une orbite $\rho(\theta, \rho_0)$ de l'équation (10) satisfait $\rho(2\pi, \rho_0) = \rho_0$ et $0 < \rho(\theta, \rho_0) < \infty$ soit la condition initiale ρ_0 est un racine de l'équation (14), c'est-à-dire, $LC(\rho_0) = 0$.

Donc, pour $LC(\rho_0) = 0$, alors il y a au plus deux racines $\begin{cases} \rho_0 = \rho_0^* \\ \rho_0 = \rho_0^{**}, \end{cases}$

donc il y a au plus deux orbites de l'équation (10) satisfaisant $\rho(2\pi, \rho_0) = \rho_0$ et

$0 < \rho(\theta.\rho_0) < \infty$, par conséquent, de la **remarque 4**, il y a au plus deux cycles limites pour le système (3).

Preuve du corollaire 2

La preuve du corollaire 2 vient facilement de ces derniers arguments.

* Supposons qu'il y a une famille continue des orbites périodiques, alors l'équation (14) ($LC(\rho_0) = 0$) doit être identiquement zéro, c'est-à-dire, $w_2(2\pi) = \dot{w}_1(2\pi) = 0$ et $w_1(2\pi) = \dot{w}_2(2\pi)$.

* Si l'équation (14) n'est pas identiquement zéro, il y a au plus, un nombre fini des orbites périodiques pour l'équation (10) (ce qui peut être 2, 1 ou 0).

Au contraire,

supposons que $w_2(2\pi) = \dot{w}_1(2\pi) = 0$, $w_1(2\pi) = \dot{w}_2(2\pi)$.

Alors, de (13), nous avons que la solution générale $\rho(\theta, \rho_0)$ de l'équation (10) satisfait $\rho(2\pi, \rho_0) = \rho_0$, $\forall \rho_0$.

Donc,

Par la transformation $\rho = r^{m-n}$, il est clair

$r(\theta, r_0)$ solution générale de l'équation (9) satisfait $r(2\pi, r_0) = r_0$, $\forall r_0$, s'il existe un cycle limite dans (3) alors les orbites dans un voisinage de ce cycle limite se développeraient en spiral dans le sens positif ou négatif, mais de tout façon, il ne peuvent pas satisfaire $r(2\pi, r_0) = r_0$.

Par conséquent, il ne peut exister aucun cycle limite.

On a seulement $r(2\pi, r_0) = r_0$ pour toutes les valeurs de r_0 mais ne peut impliquer l'existence pour aucune valeur r_0 tels que $0 < r(\theta, r_0) < \infty$ pour toute $\theta \in \mathbb{R}$.

Afin de prouver la proposition 3

Rappelons que $\rho(2\pi, \rho_0) = \rho_0$ si, et seulement si, ρ_0 est une racine de l'équation (14).

Supposons que $\rho(\theta, \rho_0)$ est une orbite périodique et considérons $\Pi(\rho_0)$ l'application de Poincaré sur la section $\sum = \{(\theta, \rho_0) \ : \ \theta = 2\pi\}$.

Par définition de l'application de Poincaré, nous avons que $\Pi(\rho_0) = \rho(2\pi, \rho_0)$. Donc, un cycle limite du système (3) est hyperbolique si, est seulement si,

$$\dot{\pi}(\rho_0) = \left(\frac{\partial \rho(\theta, \rho_0)}{\partial \rho_0} \right) \begin{pmatrix} \rho_0 = \rho_0^* \\ \theta = 2\pi \end{pmatrix} \neq 1.$$

Nous devons considérer le wronoskian de l'équation (6). Rappelons que n'importe quel ensemble $\{w_1(\theta), w_2(\theta)\}$ des solutions fondamentales d'une équation homogène linéaire du second degré (6), le wronskian $W(\theta)$ est défini comme cause déterminante suivante :

$$W(\theta) = \det \begin{bmatrix} w_1(\theta) & w_2(\theta) \\ \dot{w}_1(\theta) & \dot{w}_2(\theta) \end{bmatrix}.$$

Nous allons caractériser le hyperbolicité (ou la multiplicité) d'un cycle de limite selon les deux valeurs $w_2(2\pi)$ et $\Delta = [w_1(2\pi) + \dot{w}_2(2\pi)]^2 - 4W(2\pi)$.

Supposons qu'il existe un cycle limite avec la condition initiale ρ_0^*, tel que ρ_0^* est une racine de l'équation (14) ($LC(\rho_0) = 0$).

Ce cycle limite est hyperbolique si, et seulement si, la valeur de la fonction

$$\left(\frac{\partial \rho(\theta, \rho_0)}{\partial \rho_0}\right)_{\begin{pmatrix} \theta = 2\pi \\ \rho_0 = \rho_0^* \end{pmatrix}} \neq 1 \text{ c'est-à-dire, si } \dot{\Pi}(\rho_0^*) \neq 1.$$

De (13), nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(\rho_0^*) &= \left(\frac{\partial \rho(\theta, \rho_0)}{\partial \rho_0}\right)_{\left\{\begin{array}{l} \theta = 2\pi \\ \rho_0 = \rho_0^* \end{array}\right\}} \\ &= \frac{w_1(2\pi)\dot{w}(2\pi) - w_2(2\pi)\dot{w}_1(2\pi)}{(w_1(2\pi) + \rho_0^*\delta_0 w_2(2\pi))^2} \\ &= \frac{W(2\pi)}{(w_1(2\pi) + \rho_0^*\delta_0 w_2(2\pi))^2}\ . \end{aligned} \tag{15}$$

D'ailleurs,

si $\dot{\Pi}(\rho_0^*) = 1$, nous savons que le cycle limite est de la multiplicité au moins deux,

mais si :

$$\ddot{\Pi}(\rho_0^*) = \frac{\partial^2 \rho(\theta, \rho_0)}{\partial^2 \rho_0}_{\begin{pmatrix} \rho_0 = \rho_0^* \\ \theta = 2\pi \end{pmatrix}} \neq 0 \text{ , c'est-à-dire, si } \ddot{\Pi}(\rho_0^*) \neq 0.$$

le cycle limite est de multiplicité deux exactement.

Nous avons la possibilité d'avoir deux cycles limites hyperbolique du système (3), pour leurs stabilité on a la proposition suivante :

Proposition 5 [10]

Supposons qu'il y a deux orbites périodiques dont les conditions initiales ρ_0^* et ρ_0^{**} sont

différents alors

$$\dot{\Pi}(\rho_0^*)\,\dot{\Pi}(\rho_0^{**}) = 1.$$

C'est-à-dire si nous avons deux cycles limites hyperboliques l'un doit être stable et l'autre instable.

Preuve de la proposition 3

1) Supposons d'abord que $w_2(2\pi) = 0$, dans ce cas

$$W(2\pi) = w_1(2\pi)\,\dot{w}_2(2\pi) \text{ et } LC(\rho_0) = -\delta_0\left(w_1(2\pi) - \dot{w}_2(2\pi)\right)\rho_0 + \dot{w}_1(2\pi).$$

* Si $LC(\rho_0) = 0$ pour toutes les valeurs ρ_0, Dans ce cas, il n'y aucun cycle limite (comme indique dans le corollaire 2), Il n'y a aucun cycle limite parce qu'aucune des orbites périodiques ne peut être isolée.

* Supposons que $LC(\rho_0)$ n'est pas identiquement zéro. Cette équation a au plus une racine

$$\rho_0^* = \frac{\dot{w}_1(2\pi)}{\left[\delta_0\left(w_1(2\pi) - \dot{w}_2(2\pi)\right)\right]}$$

Dans ce cas, de (15),

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}(\rho_0^*) &= \frac{\partial\rho(\theta.\rho_0)}{\partial\rho_0}\left\{\begin{array}{c}\theta = 2\pi\\ \rho_0 = \rho_0^*\end{array}\right\}\\
&= \frac{\dot{w}_2(\theta)\,w_1(\theta) - w_2(\theta)\,\dot{w}_1(\theta)}{\left[w_1(\theta) + \delta_0\rho_0 w_2(\theta)\right]^2}\left\{\begin{array}{c}\theta = 2\pi\\ \rho_0 = \rho_0^*\end{array}\right\}\\
&= \frac{\dot{w}_2(2\pi)}{w_1(2\pi)}
\end{aligned}$$

* Si $\dot{w}_2(2\pi) = w_1(2\pi)$ alors il n'existe aucun cycle limite (car ρ_0^* n'est pas défini dans ce cas).

Donc si $w_2(2\pi) = 0 \Rightarrow$ il existe au plus un cycle limite, et s'il existe alors il est hyperbolique car $\dot{\Pi}(\rho_0^*) \neq 1$.

2) Supposons que $w_2(2\pi) \neq 0$.

Alors, nous avons que les racines d'équation $LC(\rho_0) = 0$ définies en (14) sont :

$$\rho_0^* = \frac{1}{2\delta_0 w_2(2\pi)} \left(\dot{w}_2(2\pi) - w_1(2\pi) \pm \sqrt{\Delta} \right),$$

* Si $w_2(2\pi) \neq 0$ et $\Delta < 0 \Rightarrow$ il n'existe pas cycle limite

Nous avons

$$\dot{\Pi}(\rho_0) - 1 = \left(\frac{\partial \rho(\theta, \rho_0)}{\partial \rho_0} \right)_{\{\theta = 2\pi\}} - 1 = -\delta_0^4 w_2(2\pi)^2 W(2\pi) \Delta$$

* Si $w_2(2\pi) \neq 0$ et $\Delta > 0$, il peut avoir au plus deux cycles limites et s'il existent ils sont hyperboliques.

- s'il existe un cycle limite alors il est hyperbolique stable ou instable.

- mais s'il existe deux cycles limites, par la **proposition 5** l'un est stable et l'autre instable.

* Si $w_2(2\pi) \neq 0$, et $\Delta = 0$. Dans ce cas, il y a une racine ρ_0^* pour l'équation (14) telle que :

$$\rho_0^* = \frac{\dot{w}_2(2\pi) - w_1(2\pi)}{2\delta_0 w_2(2\pi)}.$$

Un calcul facile montre que

$$\dot{\Pi}(\rho_0^*) = \frac{\partial \rho(\theta, \rho_0)}{\partial \rho_0} \left\{ \begin{array}{c} \theta = 2\pi \\ \rho_0 = \rho_0^* \end{array} \right\} = \frac{-4W(2\pi)}{(w_1(2\pi) + \dot{w}_2(2\pi))^2} = 1, \text{ car } \Delta = 0.$$

Rappelons que $\Delta = (w_1(2\pi) + \dot{w}_2(2\pi))^2 - 4W(2\pi)$.

Calculons la deuxième dérivé partielle du $\rho(\theta, \rho_0)$:

$$\begin{aligned} \ddot{\Pi}(\rho_0^*) &= \frac{\partial^2 \rho(\theta, \rho_0)}{\partial \rho_0^2} \left\{ \begin{array}{c} \theta = 2\pi \\ \rho_0 = \rho_0^* \end{array} \right\} \\ &= \frac{-16\delta_0 w_2(2\pi) W(2\pi)}{(w_1(2\pi) + \dot{w}_2(2\pi))^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{-4\delta_0 w_2(2\pi)}{w_1(2\pi)+\dot{w}_2(2\pi)}, \text{ car } \Delta = 0$$

cette valeur est différente de zéro, car $w_2(2\pi) \neq 0$.

Par conséquent, nous déduisons que, si $w_2(2\pi) \neq 0$ et $\Delta = 0$, alors il existe au plus un cycle limite et s'il existe, alors il est de multiplicité deux.

Notons qu'on ne peut pas avoir de cycle limite de multiplicité trois (ou plus), car comme nous avons montré, si $\Pi(\rho_0^*) = \rho_0^*$ et $\dot{\Pi}(\rho_0^*) = 1$, alors l'un ou l'autre $\ddot{\Pi}(\rho_0^*) \neq 0$ ou Π est la fonction identité.

Par conséquent, il n'y a aucune orbite périodique isolée du multiplicité supérieur a deux.

3) Une famille avec un cycle limite algébrique

Dans cette section nous donnons une famille de systèmes différentiels polynomiales planaires de la forme (3) avec un cycle limite algébrique résultant du **théorème 1**.

Nous commençons par l'équation homogène linéaire du second degré suivant :

$$\ddot{w}(\theta) + u(\theta)\dot{w}(\theta) + \dot{u}(\theta)w(\theta) = 0 \qquad (16)$$

où $u(\theta)$ est un même polynôme trigonométrique tels que $u(\theta) > 0\ \forall\theta \in \mathbb{R}$.

Afin de simplifier quelques formules, nous présentons la notation suivante

$$I_0(\theta) = \exp\left\{\int_0^\theta u(\tau)\,d\tau\right\},\ I_1(\theta) = \int_0^\theta I_0(\zeta)\,d\zeta.$$

Nous remarquons :

$$\begin{aligned}
I_0(-\theta)I_0(\theta) &= 1,\ I_0(0) = 1,\ I_0(\theta) > 1\ \forall\theta > 0,\\
I_0(\theta+2\pi) &= I_0(2\pi)I_0(\theta),\ I_0(\theta) > 0\ \forall\theta \in \mathbb{R},\\
I_1(2\pi+\theta) &= I_0(2\pi)I_1(\theta) + I_1(2\pi)\ \ \forall\theta\\
I_1(0) &= 0\\
I_1(\theta) &> 0 \text{ pour } \theta > 0, \text{ et } I_1(\theta) < 0 \text{ pour } \theta < 0
\end{aligned}$$

tel que $I_1(\theta)$ est une fonction strictement croissant de θ.

Nous notons que $I_0(\theta)$ est une fonction élémentaire et $I_1(\theta)$ est l'intégrale d'une fonction élémentaire, qui peut être élémentaire ou pas.

Considérons l'équation (16), l'ensemble fondamental des solutions de l'équation (16) $\{w_1(\theta), w_2(\theta)\}$ tels que $w_1(0) = \dot{w}_2(0) = 1.$ et $\dot{w}_1(0) = w_2(0) = 0$ sont :

$$\begin{cases} w_1(\theta) = I_0(-\theta)[1 + u(0)I_1(\theta)] \\ w_2(\theta) = I_0(-\theta) I_1(\theta). \end{cases} \tag{17}$$

Par transformation

$$\rho = \frac{-\dot{w}(\theta)}{w(\theta)}, \text{ (c'est-à-dire } \delta(\theta) = -1),$$

l'équation (16) devient l'équation de Riccati suivante

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \dot{u}(\theta) - u(\theta)\rho + \rho^2, \tag{18}$$

la solution générale de l'équation (18) est

$$\begin{aligned} \rho(\theta, \rho_0) &= -\left[\frac{\dot{w}_1(\theta) - \rho_0 \dot{w}_2(\theta)}{w_1(\theta) - \rho_0 w_2(\theta)}\right] \\ &= \frac{I_0(\theta)(\rho_0 - u(0))}{1 + I_1(\theta)(u(0) - \rho_0)} + u(\theta). \end{aligned} \tag{19}$$

Nous avons $\rho(0, \rho_0) = \rho_0$, et pour $\rho(2\pi, \rho_0) = \rho_0$, il y a deux valeurs différentes avec cette propriété

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1 - I_0(2\pi)}{I_1(2\pi)} + u(0) \\ \rho_2 &= u(0), \end{aligned}$$

on a $I_0(2\pi) > 1$ et $I_1(2\pi) > 0$, donc $\rho_1 < \rho_2$.

Les solutions dans ces conditions initiales comme suivant

- pour $\rho_0 = \rho_1$, alors

$$\rho(\theta, \rho_1) = \frac{I_0(\theta)(1 - I_0(2\pi))}{I_1(2\pi) - (1 - I_0(2\pi)) I_1(\theta)} + u(\theta)$$

- pour $\rho_0 = \rho_2$, alors

$$\rho(\theta, \rho_2) = u(\theta).$$

On a $u(\theta) > 0$, alors $\rho(\theta, \rho_2) > 0$ pour tout θ.

Nous notons $\rho(\theta, \rho_1) < u(\theta)$ pour $\theta \in [0.2\pi]$.

Par conséquent, nous ne pouvons pas assurer que $\rho(\theta, \rho_1)$ est positif pour toute θ, donc nous considérons pas ce cas.

Donc considérons le cas, où $\rho(\theta, \rho_2) = u(\theta)$.

Afin de déterminer le hyperbolicité de ces orbites périodiques, nous calculons la dérivé $\frac{\partial \rho(\theta, \rho_0)}{\partial \rho_0}$, alors

$$\frac{\partial \rho(\theta, \rho_0)}{\partial \rho_0}_{\{\theta=2\pi\}} = \frac{I_0(2\pi)}{[1 + I_1(2\pi)(u(0) - \rho_0)]},$$

donc pour $\rho_0 = \rho_2$, on a

$$\frac{\partial \rho(\theta, \rho_0)}{\partial \rho_0} \left\{ \begin{array}{l} \theta = 2\pi \\ \rho_0 = \rho_2 \end{array} \right\} = I_0(2\pi),$$

car $I_0(2\pi) > 1$, nous déduisons que le cycle limite indiqué par $\rho(\theta, \rho_2)$ est un hyperbolique et instable.

Dénotons par $2N$, le degré maximum de $u(\theta)$. Considérons le changement de variable suivant $\rho = r^2$ et, nous pouvons considérer le system suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = r^{2N+1} u\prime(\theta) - r^{2N+3} u(\theta) + r^{2N+5} \\ \dot{\theta} = 2r^{2N+2}, \end{array} \right. \tag{20}$$

qui s'écrit dans les coordonnées cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x f_1(x, y) - \left[2y\left(x^2 + y^2\right)^N + x f_0(x, y)\right]\left(x^2 + y^2\right) + x\left(x^2 + y^2\right)^{N+2} \\ \dot{y} = y f_1(x, y) + \left[2x(x^2 + y^2)^N - y f_0(x, y)\right]\left(x^2 + y^2\right) + y(x^2 + y^2)^{N+2}, \end{array} \right. \tag{21}$$

où

$$\begin{aligned} f_0(x,y) &= \left(x^2+y^2\right)^N \; u\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right), \\ f_1(x,y) &= \left(x^2+y^2\right)^N \; \grave{u}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right). \end{aligned}$$

Il est clair que

$$f_1(x,y) = x\left(\frac{\partial f_0}{\partial y}\right) - y\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)$$

le système (21) prend la forme (3) quand

$$\begin{aligned} n &= 2N+1,\, m = 2N+3 \\ R_{2N}(x,y) &= f_1(x,y) \\ P_{2N+3}(x,y) &= -\left[2y\left(x^2+y^2\right)^N + xf_0(x,y)\right]\left(x^2+y^2\right) \\ Q_{2N+3}(x,y) &= \left[2x(x^2+y^2)^N - yf_0(x,y)\right]\left(x^2+y^2\right) \\ R_{2N+4}(x,y) &= (x^2+y^2)^{N+2}. \end{aligned}$$

Le système (21) admet une courbe algébrique invariante comme suivant

$$(x^2+y^2)^{N+1} - f_0(x,y) = 0$$

qui trace un ovale autour de l'origine.

L'ovale de cette courbe est un cycle limite du système (21) et, comme nous avons vu, il est hyperbolique et instable.

4) Une famille avec un cycle limite non-algébrique

Dans la section précédente (Preuve des résultats), nous avons considéré une équation différentielle homogène de deuxième ordre de la forme (6) dont les solutions sont explicitement connues.

Son intérêt est que nous pouvons assurer l'existence d'un cycle limite qui est, en général, non-algébrique.

Considérons l'équation différentielle homogène linéaire de deuxième ordre suivante :

$$\ddot{w}(\theta) - v(\theta)\dot{w}(\theta) = 0. \qquad (22)$$

Où $v(\theta)$ est un polynôme trigonométrique.

Afin de simplifier quelques formules, nous présentons la notation suivante :

$$j_0(\theta) = \exp\left\{\int_0^\theta v(\tau)\,d\tau\right\}, j_1(\theta) = \int_0^\theta j_0(\zeta)\,d\zeta.$$

Remarquons :

$$\begin{aligned} j_0(-\theta)\ j_0(\theta) &= 1,\ j_0(0) = 1,\ j_0(\theta + 2\pi) = j_0(2\pi)\ j_0(\theta),\ \ j_0(\theta) > 0\ \forall\theta \in \mathbb{R}, \\ j_1(0) &= 0, \\ j_1(\theta) &> 0 \text{ pour } \theta > 0, \\ j_1(\theta) &< 0 \text{ pour } \theta < 0, \end{aligned}$$

tel que $j_1(\theta)$ est une fonction strictement croissante de θ.

Nous notons que $j_0(\theta)$ est une fonction élémentaire et $j_1(\theta)$ est un intégrale d'une fonction élémentaire, ce qui peut être élémentaire ou pas.

Nous avons besoin de la prétention suivante afin d'assurer l'existence d'un cycle limite :

$$i)\ \int_0^{2\pi} v(\theta)\,d\theta < 0,$$

$$ii)\ j_1(2\pi) - [1 - j_0(2\pi)]\ j_1(\theta) > 0.$$

Nous notons qu'un tel type de conditions n'est pas donné dans [2] puisque seulement un exemple de cycle limite est donné

Nous incluons leurs exemples dans notre analyse et nous généralisons en donnant des conditions nécessaires afin d'avoir un cycle limite.

L'ensemble des solutions fondamentales de (22) $\{w_1(\theta), w_2(\theta)\}$ tel que

$w_1(0) = \dot{w}_2(0) = 1.$ et $\dot{w}_1(0) = w_2(0) = 0$ sont :

$$w_1(\theta) = 1 \text{ et } w_2(\theta) = j_1(\theta)$$

comme avant, en utilisant la transformation

$$\rho = \frac{-\dot{w}(\theta)}{w(\theta)}, \text{ c'est-à-dire, } (\delta(\theta) = -1)$$

l'équation (22) devient l'équation suivante de Riccati

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho(\rho + v(\theta)). \tag{23}$$

La solution générale de (23) est :

$$\begin{aligned} \rho(\theta, \rho_0) &= -\left[\frac{\dot{w}_1(\theta) - \rho_0 \dot{w}_2(\theta)}{w_1(\theta) - \rho_0 w_2(\theta)}\right] \\ &= \frac{\rho_0\ j_0(\theta)}{1 - \rho_0\ j_1(\theta)}. \end{aligned} \tag{24}$$

Nous avons $\rho(0, \rho_0) = \rho_0$ et nous voulons déterminer ces conditions initiales pour lesquels $\rho(2\pi, \rho_0) = \rho_0$. il y a deux valeurs différentes avec cette propriété, l'un $\rho_0^{**} = 0$ (ne considérons pas ce cas) et l'autre $\rho_0^* = \frac{1-j_0(2\pi)}{j_1(2\pi)}$.

Prenons en compte seulement la valeur suivant ρ_0^* qui satisfait $\rho(2\pi, \rho_0^*) = \rho_0^*$:

$$\rho_0^* = \frac{1 - j_0(2\pi)}{j_1(2\pi)}$$

nous notons que $\rho_0^* > 0$, car $\int_0^{2\pi} v(\theta)\, d\theta < 0$.

La solution avec la condition initiale ρ_0^* est :

$$\rho(\theta, \rho_0^*) = \frac{j_0(\theta)(1 - j_0(2\pi))}{j_1(2\pi) - (1 - j_0(2\pi))\, j_1(\theta)}$$

nous déduisons que $\rho(\theta, \rho_0^*)$ est strictement positif pour toutes les valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$, (voir les prétentions i, et ii).

Afin de déterminer l'hyperbolicité du ces orbites périodiques, nous calculons seulement :

$$\frac{\partial \rho(\theta, \rho_0)}{\partial \rho_0} \left\{ \begin{array}{l} \theta = 2\pi \\ \rho_0 = \rho_0^* \end{array} \right\} = \frac{1}{j_0(2\pi)}.$$

Puisque nous assumons cela :

$$j_0(2\pi) < 1 \Rightarrow \frac{1}{j_0(2\pi)} > 1.$$

Donc si $\rho(\theta, \rho_0^*)$ donne un cycle limite de système planaire (26). Alors ce cycle limite hyperbolique et instable.

Dénotons par $2N$, le degré maximum de $v(\theta)$. Considérons le changement de variable suivant $\rho = r^2$, nous pouvons considérer le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = r^{2N+1} v(\theta) + r^{2N+3} \\ \dot{\theta} = 2r^{2N}, \end{array} \right. \tag{25}$$

en appliquant le changement de variable

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

nous obtenons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x g_0(x, y) - 2y\left(x^2 + y^2\right)^N + x\left(x^2 + y^2\right)^{N+1} \\ \dot{y} = y g_0(x, y) + 2x\left(x^2 + y^2\right)^N + y\left(x^2 + y^2\right)^{N+1} \end{array} \right. \tag{26}$$

le système (26) prend la forme (3) quand :

$$\begin{aligned} n &= 2N - 1,\ m = 2N + 1,\ R_{2N-1}(x, y) = 0, \\ P_{2N+1}(x, y) &= x g_0(x, y) - 2y\left(x^2 + y^2\right)^N \\ Q(x, y) &= y g_0(x, y) + 2x\left(x^2 + y^2\right)^N \\ R_{2N+2} &= \left(x^2 + y^2\right)^{N+1} \end{aligned}$$

où

$$g_0(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^N v\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right),$$

ce qui est un polynôme trigonométrique homogène de degré $2N$.

Ce système a un cycle limite unique pour lequel dans des coordonnées polaires se lit $r^2 = \rho(\theta, \rho_0^*)$. Cet cycle limite est hyperbolique et instable.

La courbe algébrique $x^2 + y^2 = 0$ est invariante pour système (26). S'il y a une autre courbe algébrique invariante alors elle doit être le cycle limite depuis toutes les autres spirales de solution autour de l'origine.

Il peut voir que $j_1(\theta)$ est ne soit pas une fonction élémentaire, ce cycle limite n'est pas algébrique dans des coordonnées cartésiennes.

La preuve de cette affirmation est analogue à celle donnée en sous-section "Coexistence de cycles limites algébrique et non-algébrique".

Il y a beaucoup de polynômes trigonométriques même $v(\theta)$ satisfaisant les conditions (i) et (ii), tels que le système correspondant a un cycle limite unique qui n'est pas algébrique.

Par ce dernier exemple, nous rencontrons un genre des systèmes avec cycles limites qui ont été déjà étudiés dans [2].

Chapitre III

Coexistence d'un cycle limite algébrique avec non algébrique

1) Introduction

2) Application : deux cycles limites algébriques

3) Application : un cycle limite algébrique

4) Application : un cycle limite non-algébrique

5) Contribution : un cycle limite non-algébrique

6) Application : coexistence d'un cycle limite algébrique avec non-algébrique.

1) Introduction

Dans ce chapitre, on donne des exemples d'application des résultats théoriques du chapitre précédent. On commence par construire une classe de systèmes différentiels polynomiales avec deux cycles limites algébrique et étudier leurs stabilité. En suite on donne une classe de systèmes différentiels polynomiales avec un unique cycle limite algébrique, et une autre classe avec un unique cycle limite non-algébrique. Notre contribution est dans la construction d'un modèle avec un cycle limite non algébrique, la méthode utilisée peut être appliquée a d'autres systèmes. On termine par un classe de systèmes différentiels polynomiales dont il y a une coexistence entre deux cycles limites l'un algébrique et l'autre non-algébrique.

2) Application : deux cycles limites algébrique

Rappelons que le système (3) s'écrit comme suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = xR_{n+1}(x,y) + P_m(x,y) + xR_{2m-n-1}(x,y) \\ \dot{y} = yR_{n-1}(x,y) + P_m(x,y) + yR_{2m-n-1}(x,y), \end{cases}$$

On donne deux valeurs réelles quelconques a et b, considérons le système différentiel polynôme planaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y\left(x^2+y^2\right) + x\left(-ab + (a+b)\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)\right) \\ \dot{y} = x\left(x^2+y^2\right) + y\left(-ab + (a+b)\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)\right) \end{cases} \tag{27}$$

le système (27) s'écrit comme (3), tel que $n=1$, $m=3$, et

$$\begin{aligned} R_0(x,y) &= -ab, \\ R_4(x,y) &= -\left(x^2+y^2\right)^2 \\ P_3(x,y) &= \left((a+b)x - y\right)\left(x^2+y^2\right), \\ Q_3(x,y) &= \left(x + (a+b)y\right)\left(x^2+y^2\right), \end{aligned}$$

le facteur intégral inverse pour le système (27) est donnée par :

$$V(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-a\right)\left(x^2+y^2-b\right).$$

En coordonnées polaires, le système (27) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = r\left(a - r^2\right)\left(r^2 - b\right) \\ \dot{\theta} = r^2, \end{cases} \tag{28}$$

car $\dot{\theta} > 0 \ \forall r \neq 0$, considérons l'équation différentielle ordinaire qui est équivalente au système (28)

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{ab}{r} + (a+b)\, r - r^3$$

par changement de variables $r = \rho^{\frac{1}{m-n}} = \rho^{\frac{1}{2}}$, on a

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -ab + (a+b)\,\rho - \rho^2. \tag{29}$$

L'équation (29) est une équation de Riccati. Un raisonnement classique relie l'équation de Riccati avec l'équation différentielle linéaire homogène du second degré

$$A_2(\theta)\,\ddot{w}(\theta) + A_1(\theta)\,\dot{w}(\theta) + A_0(\theta)\,w(\theta) = 0 \tag{30}$$

par le changement fonctionnel
$\dot{w}(\theta) = \rho(\theta)\, w(\theta)$ et $\ddot{w}(\theta) = \left(\dot{\rho}(\theta) + \rho(\theta)^2\right) w(\theta)$ (dans ce cas $\delta(\theta) = 1$), si nous substituons ces expressions en (30), elle coïncide avec (29), alors
$A_2(\theta) = 1$, $A_1(\theta) = -(a+b)$, $A_0(\theta) = ab$.
Donc l'équation (30) s'écrit

$$\ddot{w}(\theta) - (a+b)\,\dot{w}(\theta) + abw(\theta) = 0. \tag{31}$$

L'ensemble des solutions fondamentales $\{w_1(\theta), w_2(\theta)\}$ de (31) satisfaisant
$w_1(0) = \dot{w}_2(0) = 1$ et $\dot{w}_1(0) = w_2(0) = 0$ est

$$w_1(\theta) \quad = \quad \frac{ae^{b\theta} - be^{a\theta}}{a-b},\ w_2(\theta) = \frac{e^{a\theta} - e^{b\theta}}{a-b} \text{ si } a \neq b$$

$$w_1(\theta) = e^{a\theta}(1-a\theta),\ w_2(\theta) = e^{a\theta}\theta, \text{ si } a = b.$$

Donc

1) si $a = b$, la solution générale de l'équation (29) est :

$$\rho(\theta, \rho_0) = \frac{\dot{w}_1(\theta) + \rho_0 \dot{w}_2(\theta)}{w_1(\theta) + \rho_0 w_2(\theta)} = \frac{a\theta^2 - \rho_0(1+a\theta)}{-1 + a\theta - \rho_0\theta}$$

2) si $a \neq b$, la solution générale de l'équation (29) est :

$$\rho(\theta, \rho_0) = \frac{\dot{w}_1(\theta) + \rho_0 \dot{w}(\theta)}{w_1(\theta) + \rho_0 w_2(\theta)} = \frac{ab\left(e^{a\theta} - e^{b\theta}\right) + \rho_0\left(be^{b\theta} - ae^{a\theta}\right)}{be^{a\theta} - ae^{b\theta} + \rho_0\left(e^{b\theta} - e^{a\theta}\right)}$$

ce qui satisfait $\rho(0, \rho_0) = \rho_0$.

Il est facile de voir qu'il y a seulement deux conditions initiales ρ_0 pour lesquelles $\rho(2\pi, \rho_0) = \rho_0$ si $a \neq b$, et une condition initiale seulement si $a = b$.

Ces conditions initiales correspondent à $\rho_0 = a$ et $\rho_0 = b$ et on a une solution constante ($\rho(\theta, a) = a$, et $\rho(\theta, b) = b$).

D'autre part on a

- Si $a > 0$, alors $\rho(\theta, a) = a$ donne une orbite périodique pour le système (27) :

il correspond à une circonférence au centre l'origine et de rayon $\sqrt{a}$,

La même manière,

- Si $b > 0$, nous obtenons une orbite périodique pour le système (27) :

il correspond à une circonférence au centre l'origine et de rayon $\sqrt{b}$.

Nous devons seulement avoir cela si $a > 0$ et $a \neq b$, alors l'orbite périodique $\rho(\theta, a) = a$ est hyperbolique, puisque

$$\frac{\partial \rho(\theta, \rho_0)}{\partial \rho_0} \left\{ \begin{array}{l} \theta = 2\pi \\ \rho_0 = a \end{array} \right\} = e^{2\pi(b-a)} \neq 1 \text{ car } a \neq b.$$

La même chose si $b > 0$, alors l'orbite périodique $\rho(\theta, b) = b$ est hyperbolique, puisque

$$\frac{\partial \rho\left(\theta,\rho_0\right)}{\partial \rho_0}\left\{\begin{array}{l}\theta=2\pi\\ \rho_0=b\end{array}\right\}=e^{2\pi(a-b)}\neq 1 \text{ car } a\neq b$$

par conséquent, dans le cas $a \neq b$ et $a > 0$ et $b > 0$, nous avons un cycle limite hyperbolique stable et un cycle limite hyperbolique instable.

Nous devons également avoir cela si $a > 0$ et $a = b$, alors l'orbite périodique $\rho(\theta, a) = a$ a la multiplicité exactement deux, puisque

$$\frac{\partial \rho\left(\theta,\rho_0\right)}{\partial \rho_0}\left\{\begin{array}{l}\theta=2\pi\\ \rho_0=a\end{array}\right\}=1,\ \frac{\partial \rho^2\left(\theta,\rho_0\right)}{\partial \rho_0^2}\left\{\begin{array}{l}\theta=2\pi\\ \rho_0=a\end{array}\right\}=-4\pi$$

puisque cette dernière valeur est toujours différente de zéro, nous obtenons une double orbite périodique.

Supposons que $a \neq b$ et que $a > 0$, alors démantèlement les changements des variables aux coordonnées cartésiennes, nous avons que cette orbite périodique est la circonférence $x^2+y^2 = a$, ce qui est une orbite périodique pour le système (27), donc ce cycle limite est algébrique.

Supposons maintenant que $a = b$ et $a > 0$. Nous avons encore que la circonférence $x^2+y^2 = a$ est une orbite périodique pour le système (27), c'est-à-dire cycle limite algébrique.

En prenant a et b égaux ou différents et avec le signe positif ou négatif, nous pouvons construire des exemples avec des systèmes différentiels polynômes planaires de la forme (27), qui correspondent aux systèmes étudié dans la **proposition 3** à l'un ou l'autre il n'existe aucun des cycles limites, l'un ou l'autre seulement un cycle limite hyperbolique, l'un ou l'autre deux cycles limites hyperboliques ou l'un ou l'autre un double cycle limite (c'est-à-dire, de la multiplicité deux).

3) Application : un cycle limite algébrique

Considérons le système

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{r}=r^{2N+1}u\prime(\theta)-r^{2N+3}u(\theta)+r^{2N+5}\\ \dot{\theta}=2r^{2N+2},\end{array}\right. \tag{32}$$

on a dans sous-section (une famille avec un cycle limite algébrique)

$$\begin{aligned} f_0(x,y) &= \left(x^2+y^2\right)^N \; u\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right), \\ f_1(x,y) &= \left(x^2+y^2\right)^N \; \grave{u}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right). \end{aligned}$$

Donc pour $u(\theta) = \sin^2(\theta)$ et $N = 1$, alors

$$\begin{aligned} f_0(x,y) &= \left(x^2+y^2\right)\sin^2\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\ f_1(x,y) &= \left(x^2+y^2\right)2\sin\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right), \end{aligned}$$

et le système (32) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{r} = r^3 u\prime(\theta) - r^5 u(\theta) + r^7 \\ \dot{\theta} = 2r^4, \end{cases} \qquad (33)$$

qui s'écrit dans les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \dot{x} = xf_1(x,y) - \left[2y\left(x^2+y^2\right) + xf_0(x,y)\right]\left(x^2+y^2\right) + x\left(x^2+y^2\right)^3 \\ \dot{y} = yf_1(x,y) + \left[2x(x^2+y^2) - yf_0(x,y)\right]\left(x^2+y^2\right) + y(x^2+y^2)^3, \end{cases} \qquad (34)$$

le système (34) admet une courbe algébrique invariante comme suivant

$$(x^2+y^2)^2 - f_0(x,y) = 0$$

qui trace un ovale autour de l'origine.

L'ovale de cette courbe est un cycle limite du système et, comme nous avons vu, il est hyperbolique et instable.

4) Application : un cycle limite non-algébrique

Considérons le système

$$\dot{r} = r^{2N+1}v(\theta) + r^{2N+3}, \; \dot{\theta} = 2r^{2N} \qquad (35)$$

on a dans sous-section (une famille avec un cycle limite algébrique)

$$g_0(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^N v\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

donc pour $v(\theta) = -2\cos(\theta)^2$ et $N=1$, alors

$$g_0(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\left[-2\cos^2\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right]$$

et le système (35) s'écrit comme

$$\dot{r} = r^3 v(\theta) + r^5,\ \dot{\theta} = 2r^2 \qquad (36)$$

qui s'écrit dans les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\left(x^3+x^2y+y^3\right) + x\left(x^2+y^2\right)^2 \\ \dot{y} = 2x\left(x^2-xy+y^2\right) + y\left(x^2+y^2\right)^2, \end{cases} \qquad (37)$$

ce système a un cycle limite unique et hyperbolique pour lequel dans des coordonnées polaires se lit :

$$r^2 = \frac{\left(1-e^{-2\pi}\right)e^{-\theta\ -\ \cos(\theta)\ \sin(\theta)}}{\left(\int_0^{2\pi} e^{-\tau-\cos(\tau)\ \sin(\tau)}d\tau\right) - \left(1-e^{-2\pi}\right)\left(\int_0^{\theta} e^{-\tau-\cos(\tau)\ \sin(\tau)}d\tau\right)},$$

cette cycle limite est instable et n'est pas algébrique dans des coordonnées cartésiennes parce que $\left(J_1(\theta) = \int_0^{\theta} e^{-\tau-\cos(\tau)\sin(\tau)}d\tau\right)$ n'est pas une fonction élémentaire.

Notre preuve de non-algébricité du cycle limite est directe parce que nous devons seulement vérifier que $j_1(\theta)$ n'est pas une fonction élémentaire,Voir la sous-section (Coexistence d'un cycle limite algébrique avec non algébrique).

Leur preuve du non-algébricité passe en montrant que le champ de vecteur planaire correspondant n'à aucune courbe algébrique invariante excepté celle qui contient seulement l'origine comme point singulier d'isolement.

Maintenant on donne l'exemple donné dans [2] par théorème suivant

Théorème

Le système différentiel planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x-y)(x^2-xy+y^2) + x(2x^4+2x^2y^2+y^4) \\ \dot{y} = -(x+y)(2x^2-xy+2y^2) + y(2x^4+2x^2y^2+y^4), \end{cases}$$

a exactement un cycle limite qui est hyperbolique et non-algébrique. Dans des coordonnées polaires, ce cycle limite est

$$r = e^{\frac{3}{2}\Psi(\theta)-\theta}\left(a + 2\int_0^\theta \frac{\cos^4(s)+1}{\cos^2(s)+1} e^{3\Psi(s)-2s} ds\right)^{-\frac{1}{2}},$$

où

$$\Psi(\theta) = 2\int_0^\theta \frac{1+\tan^2(s)}{2+\tan^2(s)} ds$$

et

$$a = \frac{2e^{4\pi-6\sqrt{2}\pi}}{1-e^{4\pi-6\sqrt{2}\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4(s)+1}{\cos^2(s)+1} e^{3\Psi(s)-2s} ds \approx 1.19903.$$

L'exemple donné dans [2] peut être également étudié au moyen d'une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre comme (6) qui, dans leur cas, est

$$2\left[3+\cos(2\theta)\right]\left[11+4\cos(2\theta)+\cos(4\theta)\right]\ddot{w}(\theta) + A_1(\theta)\dot{w}(\theta) = 0$$

où

$$\begin{aligned} A_1(\theta) &= -373 - 132\cos(2\theta) + 42\sin(2\theta) - 12\cos(4\theta) + 78\sin(4\theta) + 4\cos(6\theta) + \\ &\quad 18\sin(6\theta) + \cos(8\theta) + \sin(8\theta). \end{aligned}$$

5) Contribution (un cycle limite non-algébrique)

Considérons le système différentiel planaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(-y^4\right) - y\left(x^2+y^2\right)^2 + x\left(x^2+y^2\right)^3 \\ \dot{y} = y\left(-y^4\right) + x\left(x^2+y^2\right)^2 + y\left(x^2+y^2\right)^3 \end{cases} \tag{38}$$

pour écrire ce système dans des coordonnées polaires, nous appliquons le changement de variable

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

alors, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{r} = -r^5 \sin^4(\theta) + r^7 \\ \dot{\theta} = r^4, \end{cases} \tag{39}$$

considérons l'équation différentielle ordinaire qui est équivalent système (39) :

$$\frac{dr}{d\theta} = r^3 - r\sin^4\theta \tag{40}$$

par changement de variable :

$$r^{m-n} = \rho \text{ tel que } m = 5,\ n = 3 \text{ donc } r^2 = \rho \Rightarrow d\rho = 2rdr$$

alors, nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho^2 - \sin^4(\theta)\,\rho \tag{41}$$

l'équation (41) est une équation de Riccati, et chaque équation de Riccati relie une équation différentielle homogène du second degré :

$$\ddot{w}(\theta) + A(\theta)\,\dot{w}(\theta) = 0 \tag{42}$$

on pose $\delta(\theta) = -1$, et le changement de fonctionnel : $\dot{w}(\theta) = -\rho(\theta)\,w(\theta)$,

$$\ddot{w}(\theta) = -\left[\dot{\rho}(\theta)\,w(\theta) - \rho^2(\theta)\,w(\theta)\right]$$

en substituions dans l'équation (42), alors on a :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho^2 - A(\theta)\,\rho$$

cette équation coïncide avec (41), donc $A(\theta) = \sin^4(\theta)$

alors l'équation (42) devient :

$$\ddot{w}(\theta) + \sin^4(\theta)\,\dot{w}(\theta) = 0 \qquad (43)$$

pour résoudre cette équation, on pose $p(\theta) = \dot{w}(\theta) \Rightarrow \dot{p}(\theta) = \ddot{w}(\theta)$, donc

$$\dot{p}(\theta) + \sin^4(\theta)\,p(\theta) = 0 \Longleftrightarrow p(\theta) = \exp\left(\int_0^{\theta} -\sin^4(\tau)\,d\tau\right),$$

donc la solution générale de l'équation (43) :

$$w(\theta) = \int_0^{\theta} p(\theta) \Rightarrow w(\theta) = \int_0^{\theta} \exp\left(-\int_0^{\zeta} \sin^4(\tau)\,d\tau\right) d\zeta$$

on pose :

$$\begin{aligned} k_1(\theta) &= \exp\left(-\int_0^{\theta} \sin^4(\tau)\,d\tau\right) \\ k_2(\theta) &= \int_0^{\theta} k_1(\zeta)\,d\zeta. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions fondamentales de (43) $\{w_1(\theta),\, w_2(\theta)\}$ tel que
$w_1(0) = \dot{w}_2(0) = 1$, $\dot{w}_1(0) = w_2(0) = 0$, est :

$$w_1(\theta) = 1,\; w(\theta) = k_2(\theta)$$

Donc, la solution générale de (41) est :

$$\begin{aligned} \rho(\theta, \rho_0) &= -\frac{\dot{w}_1(\theta) - \rho_0 \dot{w}_2(\theta)}{w_1(\theta) - \rho_0 w_2(\theta)} \\ &= \frac{\rho_0 k_1(\theta)}{1 - \rho_0 k_2(\theta)}. \qquad (*) \end{aligned}$$

La solution $(*)$ est un solution périodique de l'équation (41) si satisfaisant : $\rho(2\pi, \rho_0) = \rho_0$,

et, $0 < \rho(\theta, \rho_0) < \infty$, donc

$$\begin{aligned} \rho(2\pi, \rho_0^*) &= \rho_0^* \Longleftrightarrow \frac{\rho_0^* k_1(\theta)}{1 - \rho_0^* k_2(2\pi)} = \rho_0^* \\ &\Longleftrightarrow k_2(\theta)(\rho_0^*)^2 + [k_1(\theta) - 1]\rho_0^* = 0 \\ &\Longleftrightarrow \rho_0^{**} = 0 \text{ ou } \rho_0^* = \frac{1 - k_1(2\pi)}{k_2(\theta)} \end{aligned}$$

$\rho_0^{**} = 0$ (ne considérons pas ce cas)

il est claire que : $\rho_0^* > 0$ parce que :

$$\begin{aligned} -\int_0^{2\pi} \sin^4(\theta)\, d\theta &< 0 \Rightarrow \exp\left(-\int_0^{2\pi} \sin^4(\theta)\right) < 1 \Rightarrow k_1(2\pi) < 1 \Rightarrow 1 - k_1(2\pi) > 0 \\ \text{et } k_2(\theta) &> 0, \end{aligned}$$

donc, la solution avec cette condition initiale est :

$$\begin{aligned} \rho(\theta, \rho_0^*) &= \frac{\frac{1-k_1(2\pi)}{k_2(2\pi)} \times k_1(\theta)}{1 - \frac{1-k_1(2\pi)}{k_2(2\pi)} k_2(\theta)} \\ &= \frac{[1 - k_1(2\pi)]\, k_1(\theta)}{k_2(2\pi) - [1 - k_1(2\pi)]\, k_2(\theta)}, \end{aligned}$$

et notons que $\rho(\theta, \rho_0^*) > 0\ \forall \theta \in \mathbb{R}$.

Il peut voir que $k_2(\theta)$ est n'est pas fonction élémentaire, nous avons que ce **cycle limite n'est pas algébrique** dans des coordonnées cartésiennes.

Afin de déterminer le hyperbolicité du ce orbites périodiques, nous devons seulement calculer

$$\frac{\partial \rho(\theta, \rho_0)}{\partial \rho_0} \left\{ \begin{array}{c} \theta = 2\pi \\ \rho_0 = \rho_0^* \end{array} \right\} = \frac{1}{k_1(2\pi)}$$

Puisque :

$$k_1(2\pi) < 1 \Rightarrow \frac{1}{k_1(2\pi)} > 1.$$

Donc si $\rho(\theta, \rho_0^*)$ donné un cycle limite de système planaire (38), Alors c'est a hyperbolique et cycle limite instable.

Nous avons la question en suspens de coexistence d'un cycle limite algébrique et non-

algébrique. La réponse positive à cette question peut être trouvée dans la prochaine sous-section.

6) Application : coexistence d'un cycle limite algébrique avec non algébrique

Le système différentiel polynôme planaire suivant selon le paramètre réel α montre deux cycles limites hyperboliques quand $\alpha > 3$. L'un d'entre eux est algébrique et l'autre n'est pas algébrique. Quand $\alpha = 3$, la famille montre un cycle limite unique qui est algébrique et de la multiplicité deux, le système différentiel polynôme planaire pris en compte dans cette section est :

$$\begin{cases} \dot{x} = xR_4(x,y) - \frac{1}{2}(\alpha x + 2y)\left(x^2+y^2\right)^3 + \frac{1}{2}x\left(x^2+y^2\right)^4 \\ \dot{y} = yR_4(x,y) - \frac{1}{2}(\alpha y - 2x)\left(x^2+y^2\right)^3 + \frac{1}{2}y\left(x^2+y^2\right)^4, \end{cases} \tag{44}$$

tel que $\alpha \geq 3$, et

$$R_4(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\left(2x^2 - xy + \frac{3y^2}{2}\right) + \frac{x^2y^2}{2}.$$

le système (44) en coordonnées polaires s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{r^5}{16}\Phi(\theta,\alpha) - \frac{\alpha}{2}r^7 + \frac{r^9}{2} \\ \dot{\theta} = r^6. \end{cases} \tag{45}$$

tel que

$$\Phi(\theta,\alpha) = -19 + 12\alpha + 4(\alpha-3)\cos(2\theta) - 8\sin(2\theta) - \cos(4\theta),$$

nous pouvons considérer le système (45) comme équation ordinaire :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{16r}\Phi(\theta,\alpha) - \frac{\alpha}{2}r + \frac{1}{2}r^3$$

Par le changement de variable $r^2 = \rho$, alors nous obtenons l'équation de Riccati suivante :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{1}{8}\Phi(\theta,\alpha) - \alpha\rho + \rho^2. \tag{46}$$

Au moyen du changement habituel

$$\rho(\theta) = -\frac{\dot{w}(\theta)}{w(\theta)} \text{ , c'est-à-dire } \delta(\theta) = -1,$$

nous pouvons associer (46) à l'équation linéaire homogène du second degré suivant :

$$\ddot{w}(\theta) + \alpha\dot{w}(\theta) + \frac{1}{8}\Phi(\theta,\alpha)\, w(\theta) = 0. \tag{47}$$

Afin de simplifier quelques formules, nous présentons la notation suivante :

$$w_0(\theta) = \exp\left\{-\frac{3\theta}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta\ \sin\theta\right\},\ I(\theta) = \int_0^\theta \frac{e^{-\alpha\tau}}{w_0(\tau)^2}d\tau$$

cet exemple a été produit par les auteurs en étudiant des équations (6) avec une solution donnée de la forme $w_0(\theta) = \exp\left\{\int_0^\theta u(\theta)\, d\theta\right\}$ où $u(\theta)$ est un même polynôme trigonométrique qui est strictement positif pour toutes les valeurs de θ.

Il y a une famille des équations de la forme (6) montrant une solution fixe $w_0(\theta)$ et nous choisissons qui provoquent un autre cycle limite. C'est la manière dont nous avons construit cet exemple.

Notons que les fonctions $w_0(\theta)$ et $w_0(\theta) I(\theta)$ sont deux solutions indépendantes de (47) qui forme un ensemble fondamental. Par conséquent, l'ensemble fondamental des solutions de (47) $\{w_1(\theta), w_2(\theta)\}$ qui satisfait $w_1(0) = \dot{w}_2(0) = 1$ et $\dot{w}_1(0) = w_2(0) = 0$ sont

$$w_1(\theta) = w_0(\theta)(1 + 2I(\theta)) \text{ et } w_2(\theta) = w_0(\theta) I(\theta),$$

de ces expressions nous pouvons trouver la solution générale $\rho(\theta, \rho_0)$ de l'équation de Riccati (46), qui satisfait $\rho(0, \rho_0) = \rho_0$:

$$\begin{aligned}\rho(\theta,\rho_0) &= -\left[\frac{\dot{w}_1(\theta) - \rho_0\dot{w}_2(\theta)}{w_1(\theta) - \rho_0 w_2(\theta)}\right] \\ &= \frac{(\rho_0 - 2)\, e^{-\alpha\theta}}{[1 - I(\theta)(\rho_0 - 2)]\, w_0(\theta)^2} + (\cos\theta)^2 + 1 \end{aligned} \tag{48}$$

Il y a deux valeurs de ρ_0 pour lequel $\rho(2\pi, \rho_0) = \rho_0$. l'un $\rho_0 = 2$, et l'autre $\rho_0^* = 2 + \frac{1 - e^{2(3-\alpha)\pi}}{I(2\pi)}$.

* Pour $\rho_0 = 2$

la solution $\rho(\theta, 2) = (\cos\theta)^2 + 1$ de l'équation (46) correspond au $w_0(\theta)$ solution de (47). Puisque $\rho(\theta, 2) > 0 \ \forall \ \theta$, il provoque un cycle limite du système (44), ce cycle limite dans des coordonnées polaires s'écrit :

$$r^2 = \rho(\theta, 2).$$

En défaisant le changement aux coordonnées cartésiennes nous obtenons le cycle limite algébrique suivant $f(x, y) = 0$, où

$$f(x, y) = 2\left(x^2 + y^2\right)^2 - 3\left(x^2 + y^2\right) - x^2 + y^2.$$

* Pour $\rho_0^* = 2 + \frac{1-e^{2(3-\alpha)\pi}}{I(2\pi)}$

Puisque $I(\theta)$ est une fonction strictement croissante de θ et $I(0) = 0$, alors $I(2\pi) > 0$.

Puisque nous assumons que $\alpha \geq 3$, donc on a :

$$\rho_0^* > 2 \text{ si } \alpha > 3 \text{ et } \rho_0 = 2 \text{ si } \alpha = 3.$$

- Si $\alpha = 3$, alors il existe un seul cycle limite algébrique, qui dans des coordonnées cartésiennes sont de la forme

$$f(x, y) = 2\left(x^2 + y^2\right)^2 - 3\left(x^2 + y^2\right) - x^2 + y^2 = 0.$$

- Si $\alpha > 3$, nous avons que $\rho_0^* > 2$, et depuis les deux orbites $\rho(\theta, \rho_0^*)$ et $\rho(\theta, 2)$ ne peut pas intersectés dans tout point, nous déduisons que $\rho(\theta, \rho_0^*) > \rho(\theta, 2) > 0$. Par conséquent, l'orbite $\rho(\theta, \rho_0^*)$ provoque un autre cycle limite pour système planaire (44) quand $\alpha > 3$. Ce cycle limite peut être explicitement écrit dans des coordonnées polaires comme

$$r^2 = \rho(\theta, \rho_0^*) = \frac{\left(\frac{1-e^{2(3-\alpha)\pi}}{I(2\pi)}\right) e^{-\alpha\theta}}{\left[1 - I(\theta)\left(\frac{1-e^{2(3-\alpha)\pi}}{I(2\pi)}\right)\right] w_0(\theta)^2} + (\cos\theta)^2 + 1.$$

D'ailleurs, quand $\alpha > 3$, la fonction $I(\theta)$ n'est pas fonction élémentaire, donc, le cycle limite correspondance $r^2 = \rho(\theta, \rho_0^*)$ est n'est pas fonction algébrique dans des coordonnées cartésiennes.

Afin de prouver cette dernière affirmation, nous définissons la fonction suivante :

$$\Omega_{*}\left(\theta\right)=\frac{\left(\rho_{0}^{*}-2\right)\grave{I}\left(\theta\right)}{1-I\left(\theta\right)\left(\rho_{0}^{*}-2\right)}$$

et notons que:

$$\rho\left(\theta,\rho_{0}^{*}\right)=\Omega_{*}\left(\theta\right)+\left(\cos\theta\right)^{2}+1.$$

Si supposons que le cycle limite $r^{2}=\rho\left(\theta,\rho_{0}^{*}\right)$ appartient à une courbe algébrique dans des coordonnées cartésiennes, nous déduirons que $I\left(\theta\right)$ est une fonction élémentaire. Si ce cycle limite est algébrique, alors la courbe de ce cycle limite est inclus dans l'ensemble $g\left(x,y\right)=0$ tels que $g\left(x,y\right)$ est un polynôme réel.

Dans le travail [10] , $g\left(x,y\right)=0$ est une courbe algébrique invariante du système (44). Si nous changeons le polynôme $g(x,y)$ aux coordonnées polaires nous obtenons

$\tilde{g}\left(r,\theta\right)=g\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)$. Notons que $\tilde{g}\left(r,\theta\right)$ est une courbe invariante pour le système (45) parce que $g\left(x,y\right)=0$ est une courbe algébrique invariante pour (44). Le système (45) est invariante sous le changement $r\rightarrow-r$, donc $\tilde{g}\left(r,\theta\right)$ est une même dans r. Par conséquent, par le changement $\rho=r^{2}$, nous obtenons sur le polynôme $\tilde{g}\left(\rho,\theta\right)$.

La racine $\rho=\rho\left(\theta,\rho_{0}^{*}\right)$ est un racine unique du $\tilde{g}\left(\rho,\theta\right)$ parce que $\rho=\rho\left(\theta,2\right)$ ne peut pas être une racine en raison de l'irréductibilité de $g\left(x,y\right)$(et ainsi du $\tilde{g}\left(\rho,\theta\right)$).

Nous concluons que $\tilde{g}\left(\rho,\theta\right)$ a une seule racine et une seulement, ainsi, il prend la forme $\tilde{g}\left(\rho,\theta\right)=q_{1}\left(\theta\right)\rho+q_{0}\left(\theta\right)$ où $q_{i}\left(\theta\right)$ sont des polynômes trigonométriques. Puisque $\rho=\Omega_{*}\left(\theta\right)+\left(\cos\theta\right)^{2}+1$ est un racine du $\tilde{g}\left(\rho,\theta\right)$, nous déduisons que

$$\Omega_{*}\left(\theta\right)=\frac{-q_{0}\left(\theta\right)}{q_{1}\left(\theta\right)}-\left(\cos\theta\right)^{2}-1,$$

c'est $\Omega_{*}\left(\theta\right)$ doit être un quotient des polynômes trigonométriques, d'autre part, nous remarquons :

$$\Omega_{*}\left(\theta\right)=-\frac{d}{d\theta}\ln\left[1-I\left(\theta\right)\left(\rho_{0}^{*}-2\right)\right],$$

par l'intégration, on a :

$$-\int_{0}^{\theta}\Omega_{*}\left(s\right)ds=\ln\left[1-I\left(\theta\right)\left(\rho_{0}^{*}-2\right)\right],$$

et, par conséquent

$$I(\theta) = \frac{1 - \exp\left\{-\int_0^\theta \Omega_*(s)\, ds\right\}}{\rho_0^* - 2}$$

si $\Omega_*(\theta)$ est le quotient de deux polynômes trigonométriques, son intégrale est le quotient des polynômes trigonométrique et polynômes en θ. De toute façon, nous avons que $I(\theta)$ est une fonction élémentaire. Cependant, c'est une contradiction puisque, par définition, $I(\theta) = \int_0^\theta \exp\{(3-\alpha)\tau + \cos\tau \sin\tau\}\, d\tau$ qui n'est pas élémentaire.

Nous concluons que le cycle limite : $r^2 = \rho(\theta, \rho_0^*)$, ne peut pas appartenir à une courbe algébrique dans des coordonnées cartésiennes.

Afin d'étudier la stabilité et la multiplicité, nous calculons la dérivé de la solution générale d'équation de Riccati $\rho(\theta, \rho_0)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho(\theta, \rho_0)}{\partial \rho}\left\{\begin{array}{l}\theta = 2\pi \\ \rho_0 = 2\end{array}\right\} &= e^{-2(\alpha-3)\pi} \\
\frac{\partial \rho(\theta, \rho_0)}{\partial \rho}\left\{\begin{array}{l}\theta = 2\pi \\ \rho_0 = \rho_0^*\end{array}\right\} &= e^{2(\alpha-3)\pi}
\end{aligned}$$

par conséquent,

* Quand $\alpha > 3$, nous avons que le cycle limite algébrique (au lequel correspond $\rho_0 = 2$) est hyperbolique et stable, et le cycle limite non-algébrique (aux lesquels correspond $\rho = \rho_0^* > 2$) est hyperbolique et instable.

* Quand $\alpha = 3$ nous avons seulement un cycle limite, au lequel est algébrique et correspond $\rho_0 = 2$, et il n'est pas hyperbolique parce que

$$\frac{\partial \rho(\theta, \rho_0)}{\partial \rho_0}\left\{\begin{array}{l}\theta = 2\pi \\ \rho_0 = 2\end{array}\right\} = 1$$

nous calculons la deuxième dérivé du $\rho(\theta, \rho_0)$, alors

$$\frac{\partial^2(\theta,\rho)}{\partial\rho}\left\{\begin{array}{l}\theta=2\pi\\ \rho_0=2\end{array}\right\}=2\int_0^{2\pi}e^{\cos\tau\,\sin\tau}d\tau$$

Ce qui est une valeur strictement positive. Donc ce cycle limite a la multiplicité égale à 2.

Considérons le système (44) pour n'importe quelle valeur $\alpha\in\mathbb{R}$ et nous sommes maintenant intéressés à son intégrabilité. Un calcul facile prouve que la fonction suivant $V(x,y)$ est un facteur d'intégrant inverse de Darboux :

$$V(x,y)=e^{\frac{-x\,y}{x^2+\,y^2}+(\alpha-3)\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}\left(x^2+y^2\right)f(x,y)$$

où

$$f(x,y)=2\left(x^2+y^2\right)^2-3\left(x^2+y^2\right)-x^2+y^2.$$

Notons que ce $V(x,y)$ n'est pas bien défini dans le plan de phase. Comme nous avons déjà énoncé, il est possible de construire un facteur d'intégrant inverse bien défini dans le plan de phase mais qui ne sera pas de type de Darboux dans ce cas-ci. Ce facteur d'intégrant inverse, dans des coordonnées polaires, s'écrit comme

$$\tilde{V}(r,\theta)=\frac{r^5}{\Omega_*(\theta)}\left(r^5-(\cos\theta)^2-1\right)\left(r^2-\Omega_*(\theta)-(\cos\theta)^2-1\right).$$

Nous rappelons que $V(r,\theta)$ un facteur d'intégrant inverse pour le système dans des coordonnées polaires, nous pouvons donner l'expression d'un facteur d'intégrant inverse pour le système dans des coordonnées cartésiennes comme suivant :

$$V\left(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\sqrt{x^2+y^2}.$$

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, on a fait le synthèse des travaux récents sur des critères d'existence de cycles limites et leurs localisation pour des classes de systèmes différentiels polynomiaux planaires. On montre que pour certaines classes le cycle limite est non algébrique, c'est le cas de la majorité des modèles issus de la pratique, et on étudie leurs stabilité. Notre contribution était dans la construction d'un modèle avec un cycle limite non algébrique, la méthode utilisée peut être appliquée pour autres systèmes.

Dans les perspectives, il y a sûrement la possibilité de découvrir d'autre classes de systèmes différentiels planaires avec une configuration des cycles limites dans le cas de leurs existence et l'étude de leurs nature c'est-à-dire stables ou non.

Références

[1] A. Bendjeddou. R. Benterki and T.Salhi, Expliciti Non Algébrique limit cycle for polynomial systems of degree seven. Applied Mathematical sciences, vol.3, 2009, no.13, 613-622.

[2] A. Gasull, H. Giacomini and J. Torregrosa, Explicit non-algebraic limit cycles for polynomial systeme. Preprint, 2005

[3] Al - Dosary, khalil I.T. Non-algebraic limit cycles for parametrized planar polynomial systemes, Int. J. Math 18, No. 2, 179-189 (2007).

[4] A. Philippov, Recueil de problèmes d'équations différentielles.

[5] Bulletin, (New serues) of the American Mathematical society volume 39, number 3, page 301-354, article electronically pudlis had on aprile9, 2002.

[6] Cours 1^{er} année magister, Dr: A. Ben djeddou).

[7] Cours 4^{eme} année (SEM 324).

[8] Giacomini, J Llibre and M Viano, on the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles, non linearity 9 (1996) 501-516.

[9] H. Giacomini, J. Giné and M. Grau, integrability of planar polynomial differential systems through linear differentail equations, to appear in rocky Mountain J. Math

[10] Jaume Giné and Maite Grau. Coexistence of algebraic and non-algebraic limit cycles, explicitly given. Avda. Jaume II, 69. 25001 Lleida, Spain.

[11] Jaume Giné, On some open problems in planar differential systems and 16^{Th} problem, universitat de Lleida, departament de matemàtica, aved jaume II, 69, 25001 Lleida, Spain, Accepted 20 October 2005.

[12] Jean- luc raimbault, Equation différentielles cours et exercices, Université paris XI.

[13] Jordi sorolla Bardji, Memòria presentada per aspirer al grau de doctor en matemétiques sota la direcciò de Javier Chavarriga Soriano, On the algebraic limit cycle of quadratic systems, universitat Autònoma de Barcelona Bellaterra, Maig de 2004.

[14] K.Odani, the limit cycle of the Van Der Pol equation is not algebraic J.Differential Equations 115 (1995), 146-152.

[15] L.PERKO, Differential equation and dynamical systems, Third edition Texte in applied Mathematics, 7 Springer-verlag New York, 2001.

[16] Murray R.spiegel variables complexes cours et problemes.

[17] PhamDinh T. Demongeat J, Baconnier P. Benchetrit G. similation of a biological oscillation the respiratory rhytlm. J theoret. Biol. 103 (1983) 113-132

[18] Robert Moossu, le problème de la finitude du nomber de cycles limites, sémmaire N Bourbaka, 1985, 1986, http:www.numdam, org.

[19] T. Salhi, memoire de Magister en mathématique, centre universitaire Larbi Ben m'hidi de Oum El Bouaghi.

ملخص

هدفنا من هذه الأطروحة هو دراسة الحلول الدورية المعزولة الغير جبرية لصنف من جملة معادلات تفاضلية في المستوي معاملاتها كثيرات حدود. بالاعتماد على الأعمال الموثقة سابقا، ننشئ جملة معادلات تفاضلية في المستوي معاملاتها كثيرات حدود بالإضافة إلى العبارة الرياضية التي تمثلها مع إعطاء خلاصة لنتائج مهمة حول الأنظمة التفاضلية في المستوي: نظرية الوجود والوحدانية، مستوى الأطوار، التكامل الأولي، ونعطي أيضا معايير وجود حل دوري معزول بطريقة معامل المكمل العكسي. بعد ذلك نعطي أهم النتائج حول إنشاء أنظمة تفاضلية في المستوي الصنف الأول وجود على الأكثر حلان دوريان معزولان، ثم صنف له حل دوري معزول جبري وحيد، وصنف آخر مع حل دوري معزول غير جبري وحيد، وندرس في كل حالة استقرار ورتبة تضاعف كل حل.

كتطبيق على الجزء النظري، نساهم بإعطاء أمثلة عن صنف جملة معادلات تفاضلية في المستوي لها حل دوري معزول غير جبري وحيد، وصنف له حلان دوريان معزولان في نفس الوقت أحدهما جبري والآخر غير جبري مع دراسة استقرار ورتبة تضاعف كل حل.

Résumé :

Dans ce mémoire notre objectif est l'étude des cycles limites non algébriques d'une classe de systèmes différentiels polynomiaux planaires. En se basant sur des travaux récents de Jaume Giné, Maite Grau et A. Gasull, H. Giacomini on va construire des systèmes différentiels polynomiaux planaires avec des cycles limites, en plus l'expression exacte du cycle limite est obtenue. Un sommaire des résultats connus sur les systèmes différentiels planaires est donné : théorème d'existence et d'unicité, plan de phases, intégrales premières. Nous donnons aussi les critères d'existence de cycles limites par la méthode de facteur intégrant inverse.

Après nous donnons l'essentiel des résultas sur la construction de systèmes différentiels polynomiaux planaires, une première classe avec au plus deux cycles limites, ensuite une classe avec un cycle limite algébrique unique, enfin une autre classe avec un cycle limite non algébrique unique. Notons que dans chaque cas on étudie la stabilité et la multiplicité du cycle limite. Dans les applications de la partie théorique on va construire un système différentiel polynomial avec un cycle limite non algébrique unique, et classe des systèmes différentiels polynomiales dont il y a une coexistence entre deux cycles limites l'un algébrique et l'autre non-algébrique, avec déterminer la stabilité et la multiplicité.

Abstract

In this work our objective is the study of non-algebraic limit cycles of a class of planar polynomial differential systems. Relying on recent work by Jaume Giné, Maite Grau and H. Giacomini we will construct polynomial differential system with limit cycles, besides the exact expression of limit cycle is obtained. A summary of known results on planar differential systems is given: Theorem of existence and uniqueness, plan phases, first integrals. We also give criteria for existence of limit cycles by the method of inverse integrating factor.

After we give the main results on the construction of planar polynomial differential systems, a first class with at most two limit cycles, then a class with a one algebraic limit cycle, and another class with a non-algebraic limit cycle unique. Note that in each case we study the stability and multiplicity of the limit cycle. In applications of the theory we will construct a polynomial differential system with a non-algebraic limit cycle is unique, and determining the stability and multiplicity.

Mots clés

Système différentiel autonome, fonctions élémentaires, équation de Riccati, cycle limite non algébrique, stabilité, multiplicité.