République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de 1'Enseignement Supérieur et de la Recherche

Scientifique

UNIVERSITE FARHAT ABBAS-SETIF

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
En vue de l'Obtention du diplôme de

MAGISTER

Option : mathématiques pures
(Géométrie différentielle)

Par

Mr. KERROUCHE NACEREDDINE

THEME

Propriétés de quelques variétés sous- riemanniennes

Soutenu le : 08 / 07/ 2009 devant la commission d'examen :

Président :	**Dr. BOUDAOUD**	**Abdelmadjid**	**Pr. U.M.B. M'sila**
Rapporteur :	**Dr. BENSALEM**	**Naceurdine**	**Pr. U.F.A Sétif**
Examinateurs:	**Dr. KRACHNI**	**Mostapha**	**M.C. U.F.A Sétif**
	Dr. KADEM	**Abdelouahab**	**M.C. U.F.A Sétif**

Remerciement

Au terme de ce modeste travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements :

• Avant tout , je remercie Dieu pour m' avoir donné la force et la patience pour mener à terme ce travail.

• Au professeur N.Bensalem , mon encadreur, pour m'avoir proposé cet intéressant sujet et pour avoir voulu mettre à ma disposition son savoir, son expérience et sa collaboration fructueuse pour la réalisation de ce mémoire.

• Aux membres de jury, Dr. M.Krachni et Dr.A.Kadem pour avoir accepté de juger mon travail.

• Au professeur A. Boudaoud, PR à U.M.B M'sila pour avoir accepté de présider cette commission d'examen.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Mr A.Boughrira qui m'a soutenue pendant les trois années précédentes. J'ai beaucoup apprécié ses qualités humaines.

Merci à ma mère, ma femme et à toute ma famille et mes amis d'avoir partager avec moi les moments difficiles durant la préparation de ce mémoire.

• A tous ceux qui ont contribuer de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction **4**

1 Quelques éléments de géométrie différentielle et de géométrie sous-riemannienne **8**

1.1 Rappels de quelques notions de géométrie différentielle 8

1.1.1 Notion de 1-forme différentielle sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ 8

1.1.2 Champs de vecteurs sur une variété 9

1.1.3 Crochets de Lie 10

1.2 Introduction à la géométrie sous-riemannienne 14

1.2.1 Variétés sous-riemanniennes 14

1.2.2 Courbes horizontales 17

1.2.3 Géodésiques sous-riemanniennes 18

1.3 Applications sur le groupe de Heisenberg 21

2 Géométrie sous riemannienne sur la sphère $\mathbb{S}^3$ **30**

2.1 Généralités sur les quaternions 30

2.2 Algèbre de Lie du groupe de Lie $\mathbb{S}^3$ 32

2.3 Quelques propriétés géométriques du groupe de Lie $\mathbb{S}^3$ 37

2.3.1 Courbes horizontales 37

2.3.2 Le théorème de Chow sur le groupe de Lie $\mathbb{S}^3$ 39

3 Géodésiques sous-riemanniennes de la sphère $\mathbb{S}^3$ 47

3.1 Caractérisation des géodésiques horizontales à une distribution de $\mathbb{S}^3$ via le formalisme lagrangien 48

3.1.1 Présentation du problème 48

3.1.2 Cas du multiplicateur de Lagrange nul 49

3.1.3 Cas du multiplicateur de Lagrange non nul. 52

3.2 Caractérisation des géodésiques horizontales à une distribution de $\mathbb{S}^3$ via la théorie du contrôle 59

3.2.1 Définitions et préliminaires 59

3.2.2 Calcul des géodésiques normales 61

3.2.3 Calcul des géodésiques anormales 63

Bibliographie 64

Introduction

Une distribution de p-plans de classe $\mathcal{C}^k$ sur une variété M est la donnée, pour tout point x de M, d'un sous-espace vectoriel $\Delta_x$de T_xM, qui dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ de x. Une **structure sous-riemannienne** sur une variété M est un couple $(\Delta\ , g)$ où Δ est une distribution sur M et g est une métrique riemannienne sur Δ. **Une variété sous-riemannienne** $(M,\ \Delta,\ g)$ est une variété M de classe $\mathcal{C}^\infty$, muni d'une structure sous-riemannienne $(\Delta\ , g)$.

Les variétés sous-riemanniennes ont été étudiées ou utilisées dans des domaines variés des mathématiques, en particulier en géométrie riemannienne, dans la théorie des opérateurs différentiels du second ordre, dans l'étude des équations différentielles stochastiques et de la diffusion, en mécanique des contraintes non-holonomes. Mais leur étude est aussi intéressante en elle-même.

Dans ce contexte, le groupe de Heisenberg est considéré dans $\mathbb{R}^3$ comme le prototype dans l'étude des variétés sous-riemanniennes, c'est un groupe de Lie non commutatif définie par les champs de vecteurs

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2\ \frac{\partial}{\partial t} \qquad Y = \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_1\ \frac{\partial}{\partial t} \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial t}$$

Ce groupe est muni de la structure sous-riemannienne (Δ, g) ,où Δ est la distribution engendrée par les deux champs de vecteurs linéairement indépendants et invariants à gauche X, Y :

$$\Delta : x \to \Delta_x = \mathrm{Vect}_x \{X_1, X_2\}$$

Cette distribution et non involutive car $[X_1,\ X_2] \notin \Delta$ et par conséquent non intégrable d'après le théorème de Frobenius. La métrique g est supposée orthonormée. Un certain nombre de chercheurs ce sont posés la question s'il existe d'autres groupes de Lie non commutatifs de dimension 3, pour lesquels les résultats obtenus seront différents de ceux obtenus dans le cadre du groupe de Heisenberg.

On s'intéresse dans ce mémoire à un modèle qui répond positivement à la question posée plus haut. Il s'agit d'une distribution définie sur le groupe de Lie non commutatif compact à savoir, le sous ensemble $\mathbb{S}^3$ des quaternions de longueurs 1. On étudie la géométrie de ce groupe (définition d'une distribution, caractérisation des courbes horizontales, et le théorème de Chow, le problème des géodésiques sous-riemanniennes, etc). A travers les résultats obtenus et les résultats sur le groupe de Heisenberg, on mettera en évidence que les propriétés géométriques du groupe de Lie $\mathbb{S}^3$ ne sont pas une perturbation du cas Heisenberg.

Ce mémoire est composé de trois chapitres. **Dans le premier chapitre**, nous rappelons dans un premier paragraphe quelques définitions et quelques résultats de la géométrie différentielles, tels que les champs de vecteurs, le crochet de Lie et groupe et algèbre de Lie. Dans le deuxième paragraphe nous présentons les notions de base de la géométrie sous riemannienne : distribution, courbe horizontale, métrique sous-riemannienne et aussi le problème des géodésiques. Le troisième paragraphe est consacré à quelques résultats qui concernent le groupe" prototype "de la théorie en dimension 3, il s'agit du groupe de Heisenberg qui est un groupe de Lie non commutatif.

Le deuxième chapitre est consacré a un autre modèle de groupe de Lie non commutatif défini de la manière suivante : Soit **Q** l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ où les éléments α, β sont des nombres complexes. L'ensemble **Q,** muni de la loi de multiplication des matrices usuelles est appelé le groupe des quaternions. On considère la sphère

$\mathbb{S}^3 = \{q \in \mathbf{Q};\ |q| = 1\}$,c'est l'ensemble des quaternions de longueur 1, alors $\mathbf{Q}$ induit sur $\mathbb{S}^3$ une structure de groupe de Lie non commutatif définie par les champs de vecteurs invariants à gauche X, Y, Z :

$$\begin{aligned} X &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_4\frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_4} \\ Y &= x_4\frac{\partial}{\partial x_1} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_1\frac{\partial}{\partial x_4} \\ Z &= x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + x_4\frac{\partial}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_2\frac{\partial}{\partial x_4} \end{aligned}$$

et contrairement au cas du groupe de Heisenberg, le groupe de Lie $\mathbb{S}^3$ est compact.

Comme dans le cas du groupe de Heisenberg nous introduisons une distribution sur la sphère $\mathbb{S}^3$ engendrée par les champs de vecteurs X et Y.

$$\Delta : x \to \Delta_x = \mathrm{Vect}_x \{X, Y\}$$

Contrairement au cas du groupe de Heisenberg, le choix de cette distribution n'est pas unique. D'autre part comme $[X, Y] \notin \Delta$, alors la distribution n'est pas intégrable. Dans ce cadre on donne une caractérisation des courbes horizontales et on donne une démonstration assez facile du théorème de Chow. Au passage plusieurs propriétés géométriques ont été démontées.

Le troisième chapitre est consacré au problème des géodésiques pour le problème sous-riemannien $(\mathbb{S}^3, \Delta\ , g)$,où Δ est la distribution définie au chapitre 2 et la métrique g est définit en décrétant que X, Y sont orthonormés. Soit $x_0\ ,\ x_1 \in \mathbb{R}^3$. Une géodésique joignant x_0 à x_1 est une courbe admissible $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ joignant x_0 à x_1 et de longueur minimale. La longueur de γ est la distance sous-riemannienne entre x_0 à x_1. Géométriquement, et dans ce contexte il existe deux formalismes pour aborder le problème des géodésiques, l'un est le formalisme lagrangien, l'autre est le formalisme hamiltonien. On aborde d'abord le problème des géodésiques sur $(\mathbb{S}^3, \Delta\ , g)$ en utilisant le formalisme lagrangien qui s'accommode mieux dans ce contexte contrairement au cas en général et on caractérise les géodésiques normales et aussi les géodésiques anormales.

La recherche des courbes horizontales d'énergie minimum entre deux points distincts données, se traduit aussi par un problème de minimisation d'une fonctionnelle sous contraintes. Et dans ce cadre le principe du maximum de la théorie du contrôle fournit des conditions nécessaires d'extrémalité qui rendent compte de toutes les courbes minimisantes. Dans notre cas on s'intéresse au problème de contrôle optimal qui consiste à minimiser l'énergie :

$$e(\gamma) = \int_0^T (\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))dt$$

parmi les courbes $\gamma : [0,\ T] \to \mathbb{S}^3$ joignant deux points données.

Sous la contrainte.

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{2} u_i(t) X_i(t)$$

On caractérise alors, pour différentes paramétrisations, les géodésiques normales et anormales.

A la fin de cette introduction nous signalons que la géométrie sous-riemannienne a déjà fait l'objet de divers travaux dans son aspect théorique et dans les différentes applications dans des domaines variées. Mais il est juste de dire que l'étude de cette géométrie est loin d'être achevée et reste un domaine fructueux qui attire beaucoup de chercheurs à travers le monde. Nous signalons aussi que malgré que la géométrie riemannienne serve de guide dans cette étude, ses résultats restent rarement vrais en géométrie sous-riemannienne et ses concepts pas toujours appropriés.

Chapitre 1

Quelques éléments de géométrie différentielle et de géométrie sous-riemannienne

Dans ce chapitre, nous allons introduire quelques éléments de géométrie différentielle et aussi quelques notions de base de la géométrie sous-riemannienne. Pour plus de détails voir les références de ce mémoire.

1.1 Rappels de quelques notions de géométrie différentielle

1.1.1 Notion de 1-forme différentielle sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$un ouvert de $\mathbb{R}^n$.On désigne par $(\mathbb{R}^n)^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathbb{R}^n$. Un élément φ de $(\mathbb{R}^n)^*$ est donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.1 *Une* 1*-forme différentielle* ω *sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$*(de classe* $\mathcal{C}^\infty$*) est une application* ω *(*$\mathcal{C}^\infty$*) de* U *à valeurs dans* $(\mathbb{R}^n)^*$.

Une 1-forme différentielle ω est donc la donnée ($\mathcal{C}^\infty$) en tout point x de U d'une forme linéaire $\omega(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$. Notons $(e_1, ...e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$: $(e_i) = (0, ...1, 0, ..., 0)$ (1 est en position i), $i = 1, ...n$ et $(e_1^*, ...e_n^*)$ la base duale de $(\mathbb{R}^n)^*$: $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

La donnée de $\omega(x)$ est donc équivalente à $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x)e_i^*$ où les fonctions $x \to A_i(x)$ sont $\mathcal{C}^\infty$. On note $dx_i (i = 1, ...n)$ les 1-formes différentielles constantes $x \to e_i^*$, et on écrit $\omega = \sum_{i=1}^{n} A_i(x)dx_i$.

1.1.2 Champs de vecteurs sur une variété

Soit M une variété de dimension n et de classe $\mathcal{C}^\infty$. En chaque point m de M on peut définir l'espace tangent à M en m noté T_mM . Nous avons donc la possibilité de considérer une application qui associe à tout point m de M un vecteur dans T_mM. C'est la notion de champ de vecteurs. Formalisons ce concept.

Posons d'abord $TM = \underset{m\in M}{\cup} T_mM$. Alors TM est une variété différentiable, dont il est facile de voir qu'elle est orientable, appelée fibré tangent à M.

Un élément de TM est un couple $(m, X(m))$avec $m \in M$ et $X(m)\in T_mM$. Cherchons des coordonnées sur TM. Soit (U, φ) une carte locale sur M, de coordonnées (x^i). Pour $m \in U$, et $X(m)\in T_mM$, nous pouvons prendre comme coordonnées du couple $(m, X(m))$ les réels $(x^1(m), ..., x^n(m), X^1(m, X\ ), ...X^n(m, X\ ))$ où nous décomposons $X(m)$ selon $X(m) = X^i(m, p)\frac{\partial}{\partial x^i}(m) \in T_mM$, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}(m)\right\}$ étant la base de T_mM. Nous avons donc $2n$ coordonnées pour caractériser un élément de TM. Cette variété est donc de dimension $2n$.

Il existe une application surjective particulière $\pi : TM \to M$ définie par $\pi(m, X) = m$. C'est la projection de TM sur M.

Définition 1.1.2 *Une* ***section*** *de TM est une application $X : M \to TM$ telle que $\pi \circ X$ soit l'identité sur M. C'est à dire que pour tout $m \in M$, nous associons un $X(m) \in T_mM$.Une telle section X de classe $\mathcal{C}^\infty$, sera appelée champ de vecteurs sur M.*

Un champ de vecteurs est donc une application qui à tout point de la variété M associe un vecteur au dessus de ce point (dans l'espace tangent à ce point sur la variété), de façon $\mathcal{C}^\infty$. Cette dernière hypothèse est équivaut à ce que, si $X(m) = X^i(m,p)\frac{\partial}{\partial x^i}(m)$, les fonctions $X^i : M \to \mathbb{R}$ soient $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert de la carte locale.

Notons $\Gamma^\infty(M)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur M de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on considère l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M, $\mathcal{F}^\infty(M) = \{f : M \to \mathbb{R}$, f de classe $\mathcal{C}^\infty\}$. Cet espace vectoriel est une algèbre pour le produit usuel des fonctions :$(fg)(p) = f(p)g(p)$.

Définition 1.1.3 *On appelle dérivation sur l'algèbre $\mathcal{F}^\infty(M)$ toute application linéaire de $\mathcal{F}^\infty(M)$ dans $\mathcal{F}^\infty(M)$ qui vérifie la relation de Leibniz : $D(fg) = f.D(g) + g.D(f)$.*

Il est bien connu que tout champ de vecteurs X sur M définit une dérivation sur $\mathcal{F}^\infty(M)$ par la relation suivante : $(X.f)(m) = X(m).f$, où dans le second membre, $X(m)$ est pris comme dérivation de l'espace tangent T_mM (vu comme espace de dérivations sur $\mathcal{F}^\infty(M)$). Localement cette formule s'écrit $(X.f)(m) = X^i(m).f$.C'est "la dérivée de f dans la direction de X", comme il est facile de le voir dans $\mathbb{R}^n$. Réciproquement, il est facile de voir que toute dérivation de l'algèbre $\mathcal{F}^\infty(M)$ définit un champ de vecteurs. Donc on peut identifier $\Gamma^\infty(M)$ aux dérivations de $\mathcal{F}^\infty(M)$.

Exemple 1 *Soit $X = y\frac{\partial}{x} + \frac{\partial}{\partial y}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$. Alors on a*

$$(X.f) = y\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \qquad (Y.f) = \frac{\partial f}{\partial y}$$
$$Y.(X.f) = \frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad X.(Y.f) = y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

D'où $X.(Y.f) - Y.(X.f = -\frac{\partial f}{\partial x}$.

Pour rendre compte de l'erreur commise lorsqu'on commute l'ordre de dérivation d'une fonction le long de deux champs de vecteurs , on définit la notion de crochet de Lie

1.1.3 Crochets de Lie

Proposition 1.1.1 *Soit$(X, Y) \in \Gamma^\infty(M)$, alors il existe un unique $Z \in \Gamma^\infty(M)$ tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}^\infty(M)$, on ait*

$$X.(Y.f) - Y.(X.f) = Z.f$$

Z est appelé crochet de Lie de X et Y, on le note $[X,\ Y]$.

Si dans une carte (Ω, φ) *(avec* $\varphi^{-1} = (x^i, ...x^k)$*) on a* $X = \sum_{i=1}^{k} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ *et* $Y = \sum_{i=1}^{k} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, *alors*

$$[X,\ Y] = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k} X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1-1}$$

Matriciellement, en notant $JX(x) = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x) \right)$ la matrice jacobienne du vecteur des composantes de X, on obtient

$$\begin{pmatrix} [X,\ Y]^1(x) \\ \vdots \\ [X,\ Y]^n(x) \end{pmatrix} = JY(x) \begin{pmatrix} X^1(x) \\ \vdots \\ X^n(x) \end{pmatrix} - JX(x) \begin{pmatrix} Y^1(x) \\ \vdots \\ Y^n(x) \end{pmatrix}$$

Exemples 1 - *Si* $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$ *et* $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$, *alors* $[X, Y] = 0$. *Plus généralement si X et Y sont constants dans un système de coordonnées, c'est à dire* $X^1(x), ...,\ X^n(x)$ *et* $Y^1(y), ...Y^n(y)$ *tous constants, alors* $[X, Y] = 0$ *sur le domaine des coordonnées.*

- Dans $\mathbb{R}^n$, *considérons les champs de vecteurs linéaires, c'est à dire que, dans la base* $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$, *ils s'écrivent matriciellement comme*

$$X(x) = Ax \quad et \quad Y(x) = Bx, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

A et B étant des matrices $(n \times n)$ *à coefficients constants. Le crochet de Lie de ces champs s'écrit alors*

$$[X, Y](x) = JY(x)X(x) - JX(x)Y(x) = (BA - AB)(x).$$

Autrement dit le crochet de Lie s'écrit en fonction du commutateur $BA - AB$ *des matrices A et B.*

Le crochet de Lie possède les propriétés suivantes :

Proposition 1.1.2 $\forall(X,Y,Z) \in \Gamma^\infty(M)$, $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\forall(f,g) \in \mathcal{F}^\infty(M)$, *on a*

- $[X\ ,\ Y] = -[X\ ,Y]$,
- $[\lambda X + \mu Y,\ Z] = \lambda[X\ ,Z] + \mu[Y\ ,Z]$ *et* $[X,\ \lambda Y + \mu Z] = \lambda[X\ ,Y] + \mu[X\ ,Z]$,
- $[X\ ,\ [Y\ ,Z]] + [Y\ ,\ [Z\ ,X]] + [Z\ ,\ [X\ ,Y]] = 0$ *(identité de Jacobi)*
- $[fX\ ,\ gY] = fg[X\ ,Y] + f(X.g)Y - g(Y.f).X$.

Définition 1.1.4 ***Une algèbre de Lie*** $\mathcal{G}$ *est un espace vectoriel muni d'un produit interne noté* $[X\ ,\ Y] \in \mathcal{G}$ *appelé crochet de Lie tel que*

- $[X\ ,\ Y] = -[X\ ,Y]$
- $[X\ ,\ [Y\ ,Z]] + [Y\ ,\ [Z\ ,X]] + [Z\ ,\ [X\ ,Y]] = 0$ *(identité de Jacobi)*

Des exemples courants d'algèbres de Lie sont des algèbres matricielles muni du crochet $[A\ ,\ B] =\ AB - BA$ (commutateur des matrices).

La notion d'algèbre de Lie a un grand intérêt, mais son importance en géométrie est renforcée par le fait qu'on peut associer à tout groupe de Lie G une algèbre de Lie, de façon canonique. Cette algèbre est d'un grand intérêt dans l'étude de beaucoup de problème, comme on va le voir à travers ce mémoire.

Une sous-algèbre de Lie de $\Gamma^\infty(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\Gamma^\infty(M)$ qui est stable par le crochet de Lie. C'est donc également une algèbre de Lie. En particulier, si $\mathcal{K}$ une famille de champs de vecteurs sur M, on appelle (sous-) algèbre de Lie engendré par $\mathcal{K}$, noté Lie($\mathcal{K}$), le plus petit sous-espace vectoriel S de $\Gamma^\infty(M)$ qui contient $\mathcal{K}$ et qui est stable par le crochet de Lie, c'est à dire $[X\ ,\ Y] \in S$ pour tout $X, Y \in S$.

Prenons par exemple une famille à deux éléments, $\mathcal{K} = \{X_1, X_2\}$. Les champs X_1et X_2 appartiennent à Lie(X_1, X_2), donc leur crochet $[X_1, X_2]$ aussi, ainsi que leurs crochets avec le crochet $[X_1\ , [X_1,\ X_2]]\,, [X_2\ ,\ \ [X_1, X_2]]$, etc... et finalement

$$\text{Vect}\ \left\{[X_{i_1}\ ,\ \ [X_{i_2}\ , ... \left[X_{i_{k-1}},\ X_{i_k}\right] ..., k \geqslant 1,\ i_j = 1 \text{ ou } 2\right\} \subset \text{Lie}(X_1, X_2)$$

(la relation de Jacobi permet de montrer que l'on a en fait égalité entre ces deux espaces).

Il est clair qu'en général Lie($\mathcal{K}$) est un sous-espace vectoriel de $\Gamma^\infty(M)$ de dimension infinie, même si $\mathcal{K}$ ne contient que deux champs. En revanche si $\mathcal{K}$ ne contient qu'un élément, $\mathcal{K} = \{X\}$, alors Lie($\mathcal{K}$) =Vect$\{X\}$ car $[X,\ X] = 0$.

Exemple 2 *Soit* $\mathcal{K} = \{X_1, X_2\}$ *sur* $M = \mathbb{R}^3$, *avec* $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$. *Leur crochet de Lie est* $[X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial x_2}$ *et tous les autres crochets sont nuls. Ainsi*

$$Lie(X_1, X_2) = Vect\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$$

est de dimension 3.

Définition 1.1.5 ***Un groupe de Lie*** G *est une variété différentiable munie d'une structure de groupe (ou un groupe muni d'une structure de variété différentiable) telle que*

$$\begin{array}{cc} G \times G \to G & G \to G \\ (h, g) \to gh & g \to g^{-1} \end{array}$$

soient des applications différentiables.

Pour introduire l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ associée au groupe de Lie G, on considère l'application particulière sur le groupe :

$$\begin{array}{c} L_g : G \to G \\ h \to gh \end{array}$$

qui est la **translation à gauche** sur le groupe.

Définition 1.1.6 *Si* X *est un champ de vecteurs sur* G, *nous dirons que* X *est invariant à gauche si*

$$\forall g \in G, \forall a \in G, T_a L_g X(a) = X(ga).$$

Nous rappelons que $T_aL_g : T_aG \to T_{ga}G$ est l'application linéaire tangente.

Sur les champs de vecteurs, nous avons un crochet de Lie. Il est possible de vérifier que si X et Y sont des invariants à gauche sur G, alors $[X\ ,\ Y]$ est aussi invariant à gauche.

Nous définissons $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie du groupe G, comme l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à gauche sur G muni du crochet de Lie des champs de vecteurs, qui est bien interne. C'est bien une algèbre de Lie (sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie de dimension infinie des champs de vecteurs sur G).

1.2 Introduction à la géométrie sous-riemannienne

Soit M une variété différentielle connexe de classe C^∞ et de dimension n. On notera TM (respectivement T^*M) son fibré tangent (respectivement cotangent).

1.2.1 Variétés sous-riemanniennes

Distribution horizontale

Définition 1.2.1 ***Une distribution*** *horizontale (ou simplement distribution) Δ sur M de rang m $(m \leq n)$ est une famille de sous-espaces vectoriels $\Delta_x \subset T_xM$ de dimension m,c'est à dire* $\dim \Delta_x = m\ \forall x \in M$, *dépendant de façon différentiable de $x \in M$.On dira que Δ est une distribution de m-plans.*

Exemples 2 *- Le fibré tangent TM est l'unique distribution de rang n.*

- Un champ de vecteurs sur M définit une distribution de rang 1 *si il ne s'annule jamais sur M.*

-Plus généralement, une famille $\mathcal{F}$de champs de vecteurs peut engendrer une distribution si les sous-espaces $\mathcal{F}_x =$Vect$\{X(x); X \in \mathcal{F}\}$ sont de dimension constante sur M.

On parle parfois d'une distribution comme d'un champ de sous-espaces vectoriels tangents à M.

Variété de contact

Un cas intéressant d'une variété sous-riemannienne est défini par une structure de contact. Si on se donne une distribution $\Delta : x \rightharpoonup \Delta_x$ de rang $2n$ non intégrable sur une variété M de dimension $2n+1$. Une Structure de contact est définie par une 1-forme ω qui vérifie la condition de non intégrabilité de Frobenuis, à savoir

$$\omega \wedge (d\omega)^n \neq 0$$

Une distribution horizontale Δ est donnée par $\Delta = \ker \omega$. Si $n = 1$ (c.a.d $2n+1 = 3$) la condition de non intégrabilité de Frobenuis s'écrit $d_{\omega_{/\Delta}} \neq 0$ (voir [1])

Métrique sous-riemannienne

Définition 1.2.2 *Une* ***métrique riemannienne*** *sur une distribution Δ est une fonction $g : \Delta \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle sa restriction g_x à Δ_x est une forme quadratique définie positive.*

Remarque 1.2.1 *La métrique sous-riemannienne apparaît dans la littérature sous des noms variés : métrique riemannienne singulière, métrique de Carnot-Carathédory, métrique sous-riemannienne et métrique riemannienne non holonome.*

Construction d'une métrique sous-riemannienne

Si $v \in \Delta_x$, alors $v = \sum_{i=1}^{m} v_i X_i(x)$. Comme les vecteurs $X_1, X_2, ..X_m$ sont linéairement indépendants et les fonctions v_i sont uniques, on définit la longueur du champ de vecteur v comme suit :

$$\sqrt{g_x(v,v)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} v_i^2}$$

par polarisation g_x peut être définie comme $g_x : \Delta_x \times \Delta_x \to \mathbb{R}$,

$$g_x(u,v) = \frac{1}{2}\left[g_x(u+v,\ u+v) - g_x(u,u) - g_x(v,v)\right] \tag{1-2}$$

Pour le cas $v \notin \Delta_x$ on définit

$$g_x(v, v) = +\infty$$

Ainsi g_x est une forme quadratique définie positive sur Δ_x, c'est une métrique sous-riemannienne associée au système des champs de vecteurs $X_1, X_2, ..X_m$.

Définition 1.2.3 ***Une structure sous-riemannienne*** *sur M est une paire (Δ, g) où Δ est une distribution sur M et g est une métrique riemannienne sur Δ.*

Une variété sous-riemannienne *(M, Δ, g) est une variété M de classe C^∞, munie d'une structure sous-riemannienne (Δ, g).*

Etant donnée une distribution, il est naturel de se demander si elle n'est pas l'espace tangent à une variété.

Définition 1.2.4 *Une sous variété N de M est dite* ***variété intégrale*** *d'une distribution Δ si, pour tout $x \in N$, l'espace tangent T_xN est exactement Δ_x. Si Δ est C^∞, on dit que Δ est* ***intégrable*** *si pour tout $x \in M$, il existe une variété intégrale N de Δ telle que $x \in N$.*

Définition 1.2.5 *Une distribution $\Delta \subset TM$ est dite intégrable si, pour tout point $x \in M$, il existe une sous-variété $N_x \subset M$ contenant x et telle que $T_qN_x = \Delta_x$ pour tout point $q \in N_x$. On appelle la sous-variété N_x la variété intégrale de Δ en x.*

Définition 1.2.6 *Une distribution Δ est dite* ***involutive*** *si, pour tous champs de vecteurs X et Y dans $\mathcal{F}_x$, on a $[X; Y](x) \in \Delta_x$ pour tout $x \in M$.*

Cette propriété est en fait équivalente à l'intégrabilité, comme l'indique le théorème suivant.

Théorème 1 (Théorème de Frobenius (cf. 1)) *Une distribution est intégrable si et seulement si elle est involutive.*

Variétés d'Hörmander

Définition 1.2.7 *Une variété M de dimension $2n+1$ est appelée* ***variété d'Hörmander*** *si elle est définie par $2n$ champs de vecteurs linéairement indépendant$\{X_1, X_2, ..X_{2n}\}$ sur M et telle que la condition d' Hörmander $(*)$ suivante a lieu :*

$$(*) \qquad Lie\{X_1; ..., X_{2n}\} = T_xM, \quad pour\ tout\ x\ de\ M$$

1.2.2 Courbes horizontales

Définition 1.2.8 *Une courbe $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ est dite une* ***courbe horizontale*** *pour une distribution Δ si sa derivée appartient à Δ_γ $\forall s \in [a, b]$ c'est à dire*

$$\dot{\gamma}(s) \in \Delta_{\gamma(s)} \quad \forall s \in [a, b]$$

Définition 1.2.9 *Soit (M, Δ, g)* ***une variété sous-riemannienne****, alors on peut mesurer la longueur et l'énergie d'une courbe horizontale :*

- La ***longueur*** *d'une courbe horizontale $\gamma : [a,\ b] \to M$ est le nombre réel :*

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))}\ ds$$

- L ***énergie*** *d'une courbe horizontale $\gamma : [a,\ b] \to M$ le nombre réel :*

$$e(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b g_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))ds$$

- La distance de ***Carnot Carathedory*** *est donnée par :*

$$d_c(p, q) = \inf\{l(\gamma);\ \gamma(a) = p, \quad \gamma(b) = q, \quad \dot{\gamma} \in \Delta_\gamma\}$$

Remarque 1.2.2 *On a grâce à l'inégalité de Cauchy- Schwartz :*

$$l^2(\gamma) \leq 2(b-a)e(\gamma)$$

Donc si $\gamma(t)$ est d'énergie finie, $\gamma(t)$ sera de longueur finie. La réciproque est fausse en générale.

Le lemme qui suit (appelé le **lemme de Chow***)* est l'un des résultats fondamentaux en géométrie sous-riemannienne.

Lemme 1.2.1 *Soit (M, Δ, g) une variété sous-riemannienne.Si M est connexe et la condition $(*)$ est vérifiée pour tout point $q \in M$. Alors quelque soient les points q_0, q_1 de M, il existe une courbe horizontale $\gamma : I = [a, b] \longrightarrow M$ joignant q_0 à q_1.*

1.2.3 Géodésiques sous-riemanniennes

Définition générale

Soit (M, Δ, g) une variété sous-riemannienne.

Définition 1.2.10 *Une courbe horizontale $\gamma : I = [a, b] \longrightarrow M$ est dite **géodésique minimisante** si elle réalise le minimum de la longueur, c'est à dire $l(\gamma) \leq l(\varphi)$ pour toute courbe horizontale $\varphi : I = [c, d] \longrightarrow M$ telle que $\varphi(c) = \gamma(a)$, $\varphi(d) = \gamma(b)$.*

Remarques 1.2.1 *- Si γ est une géodésique minimisante, sa restriction à tout sous intervalle fermé l'est aussi.*

*- Il est bien connu qu'une géodésique minimisante peut toujours être paramétrée de sorte que son énergie soit minimale. Réciproquement, un chemin **d'énergie minimale** est une géodésique minimisante.*

Caractérisation des géodésiques

Définition 1.2.11 *Le hamiltonien associé à m champs de vecteurs $X_1, ..., X_m$ linéairement indépendant est la fonction*

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} < X_k(x) \ , \xi >^2$$

où $< , >$ dénote le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.12 *On appelle système hamiltonien le système différentiel suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \xi} \\ \dot{\xi} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Les solutions $\gamma(s) = (x(s), \xi(s))$ du système hamiltonien sont appelées **bi-extrémales**

Définition 1.2.13 *Les projections des solutions du système hamiltonien*

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \xi} \\ \dot{\xi} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

sur l'espace des x est une géodésique sous-riemannienne.

La définition précédente ne rend pas compte de certaines géodésiques. En effet, en géométrie sous-riemannienne, il existe une autre classe de géodésiques qui n'a été découverte que dans les années 90 par Montgomery , appelée par la suite des géodésiques non hamiltoniennes ou strictement anormales comme on va le voir plus bas (chapitre 3). En effet le principe du maximum de la théorie du contrôle fournit des conditions nécessaires d'extrémalité qui rendent comte de toutes les géodésiques.

Remarques 1.2.2 *- Les géodésiques au sens de la définition précédente sont appelées les géodésiques hamiltonienne.*

- Dans le cas riemannien, cest à dire lorsque la distribution est égale au fibré tangent, une courbe est une géodésique si et seulement s'il elle est une géodésique hamiltonienne .

- Pour une structure de contact, toute les géodésiques sont hamiltonienne.

Calcul des géodésiques en utilisant la théorie du contrôle

Un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'une commande ou contrôle. La théorie du contrôle analyse les propriétés de ce système dans le but de l'amener d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères : c'est l'étape de réalisation de la commande. Les systèmes abordés sont multiples et leurs origines très divers (mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie...). L'objectif peut être aussi de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal). Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Depuis quelques années, la théorie du contrôle est utilisée aussi en géométrie sous-riemannienne, en particulier dans le problème de stabilisation des distributions et aussi dans l'étude des géodésiques, comme on va le voir ci dessous.

On suppose dans ce qui suit $M = \mathbb{R}^n$.

Choisissons m champs de vecteurs $X_1, ..., X_m$ telle que $\Delta = \text{Vect}\{X_1, ..., X_m\}$. Dans ce contexte une courbe horizontale est solution du système

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) X_i(\gamma(t))$$

où $u : [0, T] \to (u_1, ..., u_n)$ est l'unique contrôle associé à γ. Les deux remarques suivantes sont cruciales en géométrie sous-riemannienne. Tout d'abord si deux courbes sont paramétrées par la longueur d'arc $< \dot{\gamma}, \dot{\gamma} >= 1$, le problème de minimiser la longueur équivaut à minimiser le temps. D'autre part, si l'on ne considère que des courbes définies sur le même intervalle, il est équivalent de minimiser la longueur ou l'énergie.

Pour calculer les courbes minimisantes, il est commode d'utiliser le principe du maximum de la théorie du contrôle. Introduisons le pseudo-hamiltonien

$$H_\lambda(q,p,u) = \ < p, X(q)u > -\lambda < X(q)u, X(q)u > \tag{1-3}$$

où $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda$ est une constante nul ou non nul et (λ, p) est non nul, $<$, $>$ est le produit scalaire usuel et $X(q)u = \sum_{i=1}^{n} u_i X_i(\gamma)$.Une bi-extrémale est un couple $(\gamma,\ p)$ défini sur $[0, T]$ où le triplet (γ, p, u) est solution des équations

$$\begin{array}{rclcrcl} \frac{d\gamma}{dt} & = & \frac{\partial H_\lambda}{\partial p}(\gamma,p,u), & & \frac{dp}{dt} & = & -\frac{\partial H_\lambda}{\partial \gamma}(\gamma,p,u) \\ & & \frac{\partial H_\lambda}{\partial u}(\gamma,p,u) & = & 0 & & \end{array} \tag{1-4}$$

Sa projection γ s'appelle une extrémale. En géométrie sous-riemannienne une extrémale est encore appelée une *géodésique*.

Dans l'étude des bi-extrémales, on fait la distinction entre deux cas. Si $\lambda = 0$, la bi-extrémale est appelée *anormale* et si $\lambda \neq 0$, elle est appelée *normale* et les géodésiques associées sont appelées respectivement anormale et normale. Une géodésique est appelée *strictement anormale* (respectivement *strictement normale)* si elle est la projection d'une bi-extrémale anormale (respectivement normale) et non pas d'une normale (respectivement anormale).

1.3 Applications sur le groupe de Heisenberg

Définition du groupe de Heisenberg

Le groupe de Heisenberg est un très bon cadre pour l'étude de la géométrie sous-riemannienne, il est d'une part très riche en résultats et d'autre part il est très important en application et en particulier en mécanique quantique. Le groupe de Heisenberg joue un rôle similaire à celui des variétés riemanniennes en mécanique classique.

Le groupe de Heisenberg de dimension 3 qu'on note $\mathbf{H}_1$ peut être défini comme $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \{(x, t)\}$ muni par la loi de groupe :

$$(x_1, x_2, t) * (x_1', x_2', t') = (x_1 + x_1',\ x_2 + x_2',\ t + t' - 2(x_1 x_2' - x_2 x_1')) \tag{1-5}$$

Proposition 1.3.1 *Les champs de vecteurs* $X = \dfrac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2 \dfrac{\partial}{\partial t}$, $Y = \dfrac{\partial}{\partial x_2} - 2x_1 \dfrac{\partial}{\partial t}$, $T = \dfrac{\partial}{\partial t}$ *sont invariants à gauche par rapport à la loi* $(*)$

Caractérisation des courbes horizontales sur le groupe de Heisenberg

Pour le cas du groupe de Heisenberg on a la caractérisation suivante d'une courbe horizontale :

Proposition 1.3.2 *Une courbe* $\gamma = (x_1(s), x_2(s), t(s))$ *est horizontale si et seulement si*

$$\dot{t} = 2(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) \tag{1-6}$$

Preuve. On peut écrire le vecteur tangent de γ comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma} &= \dot{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dot{t} \frac{\partial}{\partial t} \\
&= \dot{x}_1 (\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial}{\partial t}) - 2\dot{x}_1 x_2 \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_2 (\frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_1 \frac{\partial}{\partial t}) + 2x_1 \dot{x}_2 \frac{\partial}{\partial t} + \dot{t} \frac{\partial}{\partial t} \\
&= \dot{x}_1 X + \dot{x}_2 Y + (\dot{t} + 2x_1 \dot{x}_2 - 2x_2 \dot{x}_1) \frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}$$

donc $\gamma(s)$ est horizontale si et seulement si le coefficient de $\dfrac{\partial}{\partial t}$ est égal à zéro, ce qui conduit au résultat.

Corollaire 1.3.1 *Une courbe* $\gamma = (x_1, x_2, t)$ *est horizontale pour le groupe de Heisenberg si et seulement si*

$$\dot{\gamma} = \dot{x}_1 X + \dot{x}_2 Y \tag{1-7}$$

Le hamiltonien associé à une distribution sur le groupe de Heisenberg

Le groupe de Heisenberg est un bon environnement pour appliquer le formalisme hamiltonien. Considérons la fonction hamiltonienne $H : T^*(x,t)\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$H(\xi,\theta,x,t,) = \frac{1}{2}(\xi_1 + 2x_1\theta)^2 + \frac{1}{2}(\xi_2 - 2x_2\theta)^2 \tag{1-8}$$

H est le hamiltonien associé au champs de vecteurs $X = \dfrac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2\,\dfrac{\partial}{\partial t}$, $Y = \dfrac{\partial}{\partial x_2} - 2x_1\,\dfrac{\partial}{\partial t}$.

En effet, en posant $P_1 = < X, (\xi_1,\xi_2,\theta) >$, $P_2 = < Y, (\xi_1,\xi_2,\theta) >$ (coordonnées de Poincaré), ce qui donne $P_1 = \xi_1 + 2x_2\theta$ et $P_2 = \xi_2 - 2x_1\theta$, le hamiltonien s'écrit alors

$$H(\xi,\theta,x,t,) = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2)$$

Les bi-extrémales du système hamiltonien sont les quadruplets
$\gamma(s) = (x(s),t(s),\xi(s),\theta(s))$ solutions de :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \xi} \\ \dot{t} &= \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \dot{\xi} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{\theta} &= -\frac{\partial H}{\partial t} \end{cases} \tag{1-9}$$

Métrique sous-riemannienne sur le groupe de Heisenberg

Rappelons que les champs de vecteurs $X = \dfrac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2\,\dfrac{\partial}{\partial t}$, $Y = \dfrac{\partial}{\partial x_2} - 2x_1\,\dfrac{\partial}{\partial t}$, $T = \dfrac{\partial}{\partial t}$ sont des champs de vecteurs invariants à gauche et engendrent l'algèbre de Lie de $\mathbf{H}_1$.La distribution Δ définie X, Y est non intégrable car

$$[X,Y] = -4\frac{\partial}{\partial t} \notin \Delta$$

Comme $X, Y, -\dfrac{\partial}{\partial t}$ engendrent l'espace tangent de $\mathbb{R}^3$, la condition d'Hormander est satisfaite. Rappelons que le hamiltonien est donné par

$$H(\xi, \theta, x, t,) = \frac{1}{2}(\xi_1 + 2x_2\theta)^2 + \frac{1}{2}(\xi_2 - 2x_1\theta)^2$$

On va associer à H un lagrangien $L : T\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en utilisant la transformation de Legendre en $(\dot{x}, \dot{t})$:

$$L(x, t, \dot{x}, \dot{t}) = \sup_{(\xi,\theta)} \Big(\xi_1\dot{x}_1 + \xi_2\dot{x}_2 + \theta\dot{t} - H(\xi, \theta, x, t,) \Big) = \sup_{(\xi,\theta)} F(x, t, \dot{x}, \dot{t}, \xi, \theta). \qquad (1\text{-}10)$$

Si le sup est atteint alors dans ce cas on aura :

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0 \qquad (1\text{-}11)$$

Les deux équations précédentes (1.11) donnent successivement

$$\xi_1 = \dot{x}_1 - 2x_2\theta, \qquad \xi_2 = \dot{x}_2 + 2x_1\theta, \qquad (1\text{-}12)$$

Or

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{\partial H}{\partial \theta} = (\xi_1 + 2x_2\theta)2x_2 - (\xi_2 - 2x_1\theta)2x_1 \\ &= 2x_2\dot{x}_1 - 2x_1\dot{x}_2 \end{aligned}$$

En utilisant $(1 - 12)$ on trouve que le long des solutions $\gamma(s) = (x_1(s), x_2(s), t(s))$ on a

$$\dot{t}(s) - 2x_2(s)\dot{x}_1(s) + 2x_1(s)\dot{x}_2(s) = 0 \qquad (1\text{-}13)$$

Le Lagrangien devient alors :

$$L(x,t,\dot{x},\dot{t}) = \xi_1\dot{x}_1 + \xi_2\dot{x}_2 + \theta\dot{t} - (\frac{1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{x}_2^2) = (\frac{1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{x}_2^2) + \theta(\dot{t} - 2x_2\dot{x}_1 + 2x_1\dot{x}_2)$$

En utilisant $(1-13)$, on obtient que le long des solutions des équations d'Euler-Lagrange (et en général le long des courbes horizontales)

$$L(x,t,\dot{x},\dot{t}) = (\frac{1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{x}_2^2) \tag{1-14}$$

La métrique sous-riemannienne peut être vue comme

$$g_x(v,v) = 2L(x,v) \quad , \qquad \forall v \in \Delta_x$$

Caractérisation des géodésiques sur le groupe de Heisenberg

Pour le cas du groupe de Heisenberg, une équation des équations d'Hamilton stipule que le long des bi-extrémales on a

$$\dot{t(s)} \ = 2x_2(s)\dot{x}_1(s) - 2x_1(s)\dot{x}_2(s) \tag{1-15}$$

Nous avons alors le résultat suivant

Proposition 1.3.3 *Une courbe $\gamma = (x_1(s), x_2(s), t(s))$ est horizontale si et seulement si elle vérifie (1-15) . En particulier les géodésiques sous-riemanniennes sur le groupe de Heisenberg sont des courbes horizontales.*

Preuve. Soit $\gamma(s)$ une géodésique sous-riemannienne , alors γ est une solution du système hamiltonien (1-9) d'où

$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial \xi_1} \ \xi_1 + 2x_2\theta$, $\dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial \xi_2} \ \xi_2 - 2x_1\theta$, $\dot{t} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 2(\dot{x}_1x_2 - x_1\dot{x}_2)$

Donc$\gamma(s)$ est horizontale c'est à dire si la relation $(1-15)$ est vérifiée .

Résolution du système hamiltonien

D'après la condition

$$\dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Ce qui implique que θ est constante le long de la solution.

Les équations

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial \xi_1}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial \xi_2}$$

d'où

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \xi_1 + 2x_2\theta \\ \dot{x}_2 = \xi_2 - 2x_1\theta. \end{cases} \tag{1-17}$$

En dérivant, on obtient

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dot{\xi}_1 + 2\ \dot{x}_2\theta \\ \ddot{x}_2 = \dot{\xi}_2 - 2\ \dot{x}_1\theta. \end{cases} \tag{1-18}$$

En utilisant l'équation $\dot{\xi} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ et le système $(1-17)$ on obtient

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 2\theta(\xi_2 - 2x_1\theta) = 2\theta\ \dot{x}_2 \\ \dot{\xi}_2 = -2\theta(\xi_1 + 2x_2\theta) = -2\theta\ \dot{x}_1 \end{cases} \tag{1-19}$$

de $(1-18)$ et $(1-19)$ on obtient

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 4\theta\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 = -4\theta\ \dot{x}_1 \end{cases} \tag{1-20}$$

Proposition 1.3.4 *On se donne un point $P(x,0)$.Il existe alors une unique géodésique joignant l'origine à P.C'est une ligne droite dans le plan $\{t=0\}$ de longueur $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, et elle obtenue pour $\theta = 0$.*

Preuve. Pour $\theta = 0$, le hamiltonien s'écrit $H(\xi) = \frac{1}{2}\xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2$. De l'équation $\dot{t} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$, découle que $t(s)$ est constante, et de $t(0) = 0$, il vient que $t(s) = 0$ et que la solution appartient à l'espace des x. De $(1-20)$ on en déduit que la solution est une ligne droite.

Remarque 1.3.1 *Il existe des courbes horizontales qui ne sont pas des géodésiques.*

En effet, on considère $\gamma(s) = (s^2/2,\ s,\ s^3/3)$. Cette courbe est horizontale, car elle vérifie la condition d'horizontalité

$$\dot{t}(s) = s^2 = 2(s^2 - s^2/2) = (2\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) \tag{1-21}$$

et la courbe γ n'est pas une géodésique car la relation $(1-20)$ n'est pas vérifiée.

Proposition 1.3.5 *Si $\gamma(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ est une courbe horizontale, alors sa translatée $\bar{\gamma}(s) = L_a\gamma(s)$ est aussi horizontale pour tout $a \in \mathbf{H}_1$.*

Preuve. Si $\gamma(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ et $\bar{\gamma}(s) = (\bar{x}_1(s), \bar{x}_2(s), \bar{x}_3(s))$,
alors

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= a_1 + x_1 \implies \dot{\bar{x}}_1 = \dot{x}_1 \\
\bar{x}_2 &= a_2 + x_2 \implies \dot{\bar{x}}_2 = \dot{x}_2 \\
\bar{x}_3 &= a_3 + x_3 - 2(a_1 x_2 - a_2 x_1)
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\dot{\bar{x}}_3 = \dot{x}_3 - 2(a_1\dot{x}_2 - a_2\dot{x}_1)$$

Supposons que γ est horizontale, alors l'équation (1-6) devient :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_3 &= \dot{x}_3 - 2\left(a_1\dot{x}_2 - a_2\dot{x}_1\right) \\ &= 2\left(\dot{x}_1 x_2 - x_1\dot{x}_2\right) - 2\left(a_1\dot{x}_2 - a_2\dot{x}_1\right) \\ &= 2\left(\dot{x}_1\left(a_2 + x_2\right) - \dot{x}_2\left(a_1 + x_1\right)\right) \\ &= 2\left(\dot{\bar{x}}_1\bar{x}_2 - \bar{x}_1\dot{\bar{x}}_2\right)\end{aligned}$$

donc $\bar{\gamma}(s)$ vérifie l'équation (1-6) c.à.d $\bar{\gamma}(s)$ est horizontale .

Proposition 1.3.6 *Si $\gamma(s) = (x_1(s), x_2(s), t(s))$ est une géodésique. Alors pour tout $a \in \mathbf{H}_1$*

i) La courbe horizontale $\bar{\gamma} = L_a\gamma$ (la translatée de γ) est aussi une géodésique.

ii) Les géodésiques γ , $\bar{\gamma}$ ont la même longueur .

Généralisation à une variété d'Hormander

Soient $X_1, X_2, ..X_{2n}$ des champs de vecteurs invariants à gauche définissant la distribution horizontale. Si $\gamma(s) = (x_1(s), ...x_{2n}(s), t(s), \xi_1(s), \xi_2(s), \theta(s))$ est une bi-extrémale, alors la projection sur l'hyperplan (x, t) est solution des équations d' Euler-Lagrange.

Proposition 1.3.7 *Les géodésiques sous-riemanniennes sur une variété d'Hormander sont des courbes horizontales.*

Preuve. Soit γ une géodésique sous-riemannienne, elle est donc une solution des équations d' Euler- Lagrange dont le Hamiltonien associé est donné par :

$$H(\gamma(s)\ ,\ p(s)) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} P_i^2(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} < X_i(\gamma(s))\ ,\ p(s) >^2$$

et les équations d'Hamiltonien sont

$$\dot{\gamma}_j(s) = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

qui peuvent être écrites comme

$$\dot{\gamma}_j(s) = \sum_{i=1}^{2n} < X_i(\gamma) \ , \ p > X_i^j.$$

En multipliant par $\frac{\partial}{\partial x_j}$,on obtient

$$\dot{\gamma}_j(s) \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{2n} < X_i(\gamma) \ , \ p > X_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

d'où

$$\dot{\gamma}(s) = \sum_{i=1}^{2n} < X_i \ , \ p > X_i \ ,$$

ce qui veut dire que $\dot{\gamma}(s) \in \triangle_{\gamma(s)}$ d'où γ est une courbe horizontale. ■

Chapitre 2

Géométrie sous riemannienne sur la sphère $\mathbb{S}^3$

2.1 Généralités sur les quaternions

Soit $\mathbf{Q}$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ ou α, β sont deux nombres complexes. L' ensemble $\mathbf{Q}$ muni de la loi de multiplication usuelle des matrices forme un groupe non commutative appelé groupe des quaternions.L'élément neutre est $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'inverse de $q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ est l'élément $q^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ \overline{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$ où $\Delta = |\alpha^2| + \left|\beta^2\right|$.

Posons

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{2-1}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, on peut facilement écrire :

$$q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = a\mathbf{I} + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d \tag{2-2}$$

par conséquent la famille $\{\mathbf{I}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ forme une base de $\mathbf{Q}$.

Quelques propriétés des quaternions

- Egalité. Deux quaternions $q = a\mathbf{I} + \mathbf{i}b + jc + kd$ et $q' = a'\mathbf{I} + \mathbf{i}b' + jc' + kd'$ sont égaux si et seulement si :

$$a = a'; b = b'; c = c'; d = d'.$$

- Propriétés des coefficients

$$\mathbf{i}^2 = j^2 = k^2 = \mathbf{i}jk = -\mathbf{I}, \qquad \mathbf{i}j = k = -j\mathbf{i} \ ,$$

$$jk = \mathbf{i} = -kj, \qquad k\mathbf{i} = j = -\mathbf{i}k$$

- Multiplication des quaternions

Etant donné deux quaternions $q = a\mathbf{I} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ et $q' = a'\mathbf{I} + b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}$, leur produit qq' est donné par :

$qq' = (aa' - bb' - cc' - dd')\,\mathbf{I} + (ab' + a'b + cd' - c'd)\mathbf{i} + (ac' + a'c + b'd - bd')\mathbf{j} + (ad' + a'd + bc' - b'c)\mathbf{k}$

Remarques 2.1.1 *1) la multiplication n'est pas commutative .*

2) Pour simplifier l'écriture on pose $q = aI + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d = (a; b; c; d)$ *donc :*

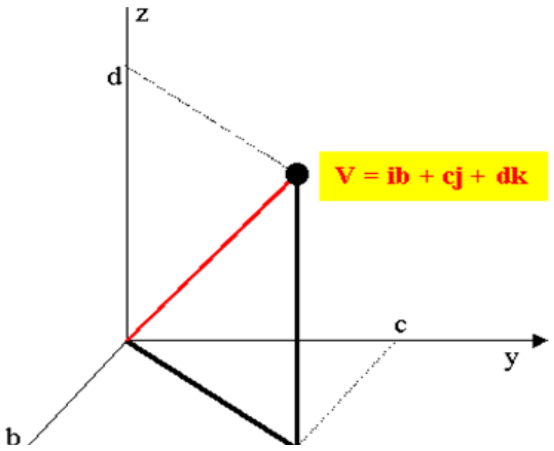
** l'inverse de q est* $q^{-1} = \frac{1}{\Delta}(a; -b; -c; -d)$ *et le conjugué est* $\overline{q} = (a; -b; -c; -d)$ *d'où* $q^{-1} = \frac{1}{\Delta}\overline{q}$.

** Si* $q' = (a'; b'; c'; d')$ *alors :* $q = q'$ *si et seulement si* $a = a'; b = b'; c = c'; d = d$

*** $qq' = (aa' - bb' - cc' - dd', ab' + a'b + cd' - c'd, ac' + a'c + b'd - bd', ad' + a'd + bc' - b'c)$

*** $q\overline{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ *alors module de q est* $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{\Delta}$.

- Représentation d'un quaternion :



- Rotations

Considérons un objet 3D : modifier son orientation revient à faire pivoter l'objet autour d'un ou plusieurs axes. Or la composée de 2 rotations passant par le même point (dans notre cas l'origine) est une rotation passant par ce point. Donc, quelque soit l'orientation d'un objet dans l'espace, on peut décrire cette orientation par une rotation (celle qui résulte de la composition des rotations précédemment appliquées). On peut donc utiliser les quaternions pour représenter les orientations des objets dans l'espace.

2.2 Algèbre de Lie du groupe de Lie $\mathbb{S}^3$

Rappelons que l'ensemble $\mathbb{S}^3$ muni de la multiplication est un groupe non commutatif compact. Nous allons travailler sur les champs de vecteurs invariants à gauche

$$\begin{array}{ccc} L_q & : & \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3 \\ h & \longrightarrow & L_q h = qh \end{array}$$

Ce sont des champs de vecteurs sur $\mathbb{S}^3$ telle que

$$dL_q(X_h) = X_{q*h} \quad , \qquad \forall q, h \in \mathbb{S}^3. \tag{2-3}$$

Définition 2.2.1 *L'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche sur* $\mathbb{S}^3$ *est*

$$\mathcal{L}(\mathbb{S}^3) = \{X;\ dL_q X = X, \forall q \in \mathbb{S}^3\}$$

appelé algèbre de Lie de $\mathbb{S}^3$*.*

$\mathcal{L}(\mathbb{S}^3)$ est un ensemble fermé par rapport au crochet de Lie $[\ ,]$, donc c'est une sous algèbre de $\mathcal{L}(\mathbf{Q})$. Pour trouver une base de $\mathcal{L}(\mathbb{S}^3)$, on doit d'abord trouver une base de $\mathcal{L}(\mathbf{Q})$. Soit X un champ de vecteur invariant à gauche sur $\mathbf{Q}$, alors pour tout $q \in \mathbb{S}^3$on a $X_q = (dL_q)X_e$ où $e = (1,0,0,0)$ est l'élément neutre de $\mathbf{Q}$. Si X_q s'écrit :

$$X_q = \sum_{i=1}^{4} X_q^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

alors les composantes X_q^i s'écrivent :

$$X_q^i = (dL_q)X_e(x_i) = X_e(x_i \circ L_q) \quad , \qquad i = 1, ..., 4,$$

ou x_i est la i-ème coordonnée. Calculons maintenant $x_i \circ L_q$, $\quad i = 1, 2, 3, 4.$
Soient $q = (a, b, c, d), \quad q' = (a', b', c', d')$ alors :

$$(x_{_1} \circ L_q)(q') = x_{_1}(L_q q') = aa' - bb' - cc' - dd'. \tag{2-4}$$

En introduisant les coordonnées

$$\begin{aligned} a &= x_{_1}(q), \quad a' = x_{_1}(q'), \quad b = x_{_2}(q), \quad b' = x_{_2}(q'), \\ c &= x_{_3}(q), \quad c' = x_{_3}(q'), \quad d = x_{_4}(q), \quad d' = x_{_4}(q'), \end{aligned}$$

l'équation (2-4) devient :

$$(x_1 \circ L_q)(q') = x_1(q)x_1(q') - x_2(q)x_2(q') - x_3(q)x_3(q') - x_4(q)x_4(q'),$$

en simplifiant l'écriture précédente tout en supprimant q'on obtient :

$$x_1 \circ L_q = x_1(q)x_1 - x_2(q)x_2 - x_3(q)x_3 - x_4(q)x_4$$

avec un calcul similaire on trouve :

$$\begin{aligned} x_2 \circ L_q &= x_1(q)x_2 + x_2(q)x_1 + x_3(q)x_4 - x_4(q)x_3 \\ x_3 \circ L_q &= x_1(q)x_3 + x_3(q)x_1 + x_4(q)x_2 - x_2(q)x_4 \\ x_4 \circ L_q &= x_1(q)x_4 + x_4(q)x_1 + x_2(q)x_3 - x_3(q)x_2. \end{aligned}$$

La première composante devient :

$$\begin{aligned} X_q^1 &= X_e(x_1 \circ L_q) \\ &= x_1(q)X_e(x_1) - x_2(q)X_e(x_2) - x_3(q)X_e(x_3) - x_4(q)X_e(x_4) \\ &= x_1(q)X_e^1 - x_2(q)X_e^2 - x_3(q)X_e^3 - x_4(q)X_e^4 \end{aligned}$$

en simplifiant l'écriture précédente tout en supprimant q et en notant $\xi^i = X_e^i, \quad i = 1, 2, 3, 4$ on obtient :

$$X^1 = x_1\xi^1 - x_2\xi^2 - x_3\xi^3 - x_4\xi^4$$

Par un calcul similaire on obtient aussi :

$$
\begin{aligned}
X^2 &= x_1\xi^2 + x_2\xi^1 + x_3\xi^4 - x_4\xi^3 \\
X^3 &= x_1\xi^3 + x_3\xi^1 + x_4\xi^2 - x_2\xi^4 \\
X^4 &= x_1\xi^4 + x_4\xi^1 + x_2\xi^3 - x_3\xi^2,
\end{aligned}
$$

donc pour tout champ de vecteur invariant à gauche Z nous pouvons écrire :

$$
\begin{aligned}
Z = \sum_{i=1}^{4} Z^i \frac{\partial}{\partial x_i} &= \left(x_1\xi^1 - x_2\xi^2 - x_3\xi^3 - x_4\xi^4\right)\frac{\partial}{\partial x_1} \\
&+ \left(x_1\xi^2 + x_2\xi^1 + x_3\xi^4 - x_4\xi^3\right)\frac{\partial}{\partial x_2} \\
&+ \left(x_1\xi^3 + x_3\xi^1 + x_4\xi^2 - x_2\xi^4\right)\frac{\partial}{\partial x_3} \\
&+ \left(x_1\xi^4 + x_4\xi^1 + x_2\xi^3 - x_3\xi^2\right)\frac{\partial}{\partial x_4}
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
Z = & \quad \xi^1\left[x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3} + x_4\frac{\partial}{\partial x_4}\right] \\
& + \xi^2\left[-x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_4}\right] \\
& + \xi^3\left[-x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_4\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial}{\partial x_4}\right] \\
& + \xi^4\left[-x_4\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4}\right] \\
= & \ \xi^1 N - \xi^2 X - \xi^3 T - \xi^4 Y
\end{aligned}
$$

où

$$
N = \sum_{i=1}^{4} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}
$$

est un champ de vecteur normal sur $\mathbb{S}^3$ et

$$
\begin{aligned}
X &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_4\frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_4} \\
Y &= x_4\frac{\partial}{\partial x_1} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_1\frac{\partial}{\partial x_4} \\
T &= x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + x_4\frac{\partial}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_2\frac{\partial}{\partial x_4}
\end{aligned}
$$

En introduisant les matrices suivantes :

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2\text{-}5)$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$N = \langle xU, \nabla_x \rangle, \qquad X = -\langle xI_1, \nabla_x \rangle \qquad Y = -\langle xI_3, \nabla_x \rangle, \qquad T = -\langle xI_2, \nabla_x \rangle$$

où $\langle \ , \ \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^4$ et U étant la matrice identité .

Il est facile de remarquer que les champs de vecteurs $\{N, X, Y, T\}$ forment une base de $\mathcal{L}(\mathbf{Q})$ et pour trouver une base pour $\mathcal{L}(\mathbb{S}^3)$ on considère les champs de vecteurs tangents à $\mathbb{S}^3$. On a

$$\begin{aligned} \langle N, X \rangle &= x_2x_1 - x_1x_2 - x_4x_3 + x_3x_4 = 0 \\ \langle N, Y \rangle &= x_4x_1 - x_3x_2 + x_2x_3 - x_1x_4 = 0 \\ \langle N, T \rangle &= x_3x_1 + x_4x_2 - x_1x_3 - x_2x_4 = 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\langle N, X \rangle = \langle N, Y \rangle = \langle N, T \rangle = 0$$

ce qui veut dire que X, Y, T sont des champs de vecteurs tangents sur $\mathbb{S}^3$, alors tout champ de vecteur invariant à gauche sur $(\mathbb{S}^3, *)$ est une combinaison linéaire de X, Y et

T. Et comme la matrice des cœfficients

$$\begin{pmatrix} x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 \end{pmatrix}$$

est de rang 3 pour chaque point q de $\mathbb{S}^3$ d'où les champs de vecteurs X, Y et T sont linéairement indépendants et cela veut dire qu'ils forment une base pour $\mathcal{L}(\mathbb{S}^3)$. La propriété précédente du rang n'a pas d'importance si la contrainte $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ n'est pas juste.

Remarque 2.2.1 *Notons que la famille* $\{X, Y, T, N\}$ *forme système orthonormé par rapport au produit interne (scalaire) de* $\mathbb{R}^4$*.Donc*

$$\mathcal{L}(\mathbf{Q}) = \mathcal{L}(\mathbb{S}^3) \oplus \mathbb{R}N.$$

2.3 Quelques propriétés géométriques du groupe de Lie $\mathbb{S}^3$

2.3.1 Courbes horizontales

Proposition 2.3.1 *Soit* $\gamma(s) = (x_1(s), x_2(s), y_1(s), y_2(s))$ *une courbe de* $\mathbb{S}^3$*. Alors* γ *est une courbe horizontale si et seulement si*

$$\langle \dot{x}, y \rangle = \langle x, \dot{y} \rangle$$

Preuve. Puisque l'espace tangent à la sphère $\mathbb{S}^3$ est engendré par $\{X, Y, T\}$, alors nous pouvons écrire

$$\dot{\gamma} = aX + bY + cT.$$

Si on considère le système $\{X, Y, T\}$ orthonormée sur la sphère $\mathbb{S}^3$, alors

$$\begin{aligned} c &= \langle \dot{\gamma}, T \rangle \\ &= \quad \dot{x}_1 y_1 + \dot{x}_2 y_2 - \dot{y}_1 x_1 - \dot{y}_2 x_2 \\ &= \langle \dot{x}, y \rangle - \langle x, \dot{y} \rangle . \end{aligned}$$

Donc la courbe γ sera horizontale si et seulement si $c = 0$, c.à.d $\langle \dot{x}, y \rangle = \langle x, \dot{y} \rangle$.
La courbe $\gamma = (x_1, x_2, y_1, y_2) : [0, \tau] \longrightarrow \mathbb{R}^3$a pour vecteur tangent $\dot{\gamma} = aX + bY$ où :

$$\begin{aligned} a &= \langle \dot{\gamma}, X \rangle = \dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1 - \dot{y}_1 y_2 + \dot{y}_2 y_1 \\ b &= \langle \dot{\gamma}, Y \rangle = \dot{x}_1 y_2 - \dot{x}_2 y_1 + \dot{y}_1 x_2 - \dot{y}_2 x_1. \end{aligned} \tag{2-6}$$

Si on considère une métrique sur la distribution horizontale Δ en décrétant que les champs de vecteurs X, Y soient orthonormés, alors la longueur de la courbe est :

$$l(\gamma) = \int_0^T \quad \sqrt{a(s)^2 + b(s)^2}.ds$$

.

Considérons à présent la $1-$forme ω sur $\mathbb{R}^4$ telle que :

$$\omega = -y_1 dx_1 - y_2 dx_2 + x_1 dy_1 + x_2 dy_2 = xdy - ydx. \tag{2-7}$$

alors le produit intérieur $\omega(X)$ est donné par :

$$\omega(X) = -x_1 y_2 - y_1 x_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2 = 0$$

De la même manière on obtient :

$$\begin{aligned} \omega(Y) &= \quad x_1 x_2 - y_1 y_2 - x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \\ \omega(T) &= -(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) = -1 \neq 0 \\ \omega(N) &= \quad x_1 y_1 - y_1 x_1 + x_2 y_2 - y_2 x_2 = 0, \end{aligned}$$

où

$$N = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + y_1\frac{\partial}{\partial y_1} + y_2\frac{\partial}{\partial y_2}$$

est un champ normal de la sphère. Alors $\ker\omega$ =Vect $\{X, Y, N\}$ est une distribution horizontale qui peut être donnée :

$$\mathbb{S}^3 \ni p \longrightarrow \Delta_p = \ker\omega \cap T_p\mathbb{S}^3.$$

Donc un vecteur $V = (v, w) = (v_1, v_2, w_1, w_2) \in \Delta_p$ si et seulement si

$$\begin{aligned} \langle x, v\rangle + \langle y, w\rangle &= 0 \ (\iff V \perp N) \\ \langle y, v\rangle - \langle x, w\rangle &= 0 \ (\iff \omega(V) = 0) \\ |x|^2 + |y|^2 &= 1 \ (\iff (x, y) \in \mathbb{S}^3) \end{aligned}$$

2.3.2 Le théorème de Chow sur le groupe de Lie $\mathbb{S}^3$

Dans cette section on traite la propriété globale de la connectivité des courbes horizontales. Il existe dans ce cadre un résultat général très classique qui le théorème de Chow dont la preuve qui se fait par construction est assez compliquée et se fait par recollement de bouts de chemins. Pour le cas du groupe de Lie $\mathbb{S}^3$, nous allons démontrer le théorème de Chow par des outils assez élémentaires. Plus précisément, ce résultat stipule que pour tout couple ordonné (p, q) de points de la sphère $\mathbb{S}^3$, il existe une courbe horizontale lisse joignant p, q.

Avant de procéder à la preuve, nous avons besoin d'introduire une certaine terminologie et des notations.

Introduisons la paramétrisation de $\mathbb{S}^3$ par les angles d'Euler, cette paramétrisation est plus appropriée dans ce contexte que les coordonnées cartésiennes.

Notons φ, ψ, θ les angles d'Euler et posons :

$$\alpha = \frac{\varphi + \psi}{2} \quad , \beta = \frac{\varphi - \psi}{2}$$

Une paramétrisation de la sphère $\mathbb{S}^3$ est donnée par :

$$\begin{array}{rcccl} x_1 & = & \cos\frac{\psi+\varphi}{2}\cos\ \frac{\theta}{2} & = & \cos\ \alpha\ \cos\frac{\theta}{2} \\ x_2 & = & \sin\frac{\psi+\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2} & = & \sin\ \alpha\ \cos\frac{\theta}{2} \\ y_1 & = & \cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2} & = & \cos\ \beta\ \sin\frac{\theta}{2} \\ y_2 & = & \sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2} & = & \sin\ \beta\sin\frac{\theta}{2} \end{array}$$

avec $0 \leq \theta \leq \pi \quad , \quad -\pi \leq \alpha \leq \pi$.

Considérons la 1- forme ω donnée par

$$\omega = x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2$$

alors

$$\begin{array}{rcl} dx_1 & = & -\sin\ \alpha\ \cos\frac{\theta}{2}\ d\alpha\ -\frac{1}{2}\cos\ \alpha\ \sin\frac{\theta}{2}d\theta \\ dx_2 & = & \cos\ \alpha\ \cos\ \frac{\theta}{2}\ d\alpha - \frac{1}{2}\sin\ \alpha\ \sin\frac{\theta}{2}d\theta \\ dy_1 & = & -\sin\beta\ \sin\ \frac{\theta}{2}\ d\beta + \frac{1}{2}\cos\ \beta\ \cos\ \frac{\theta}{2}d\theta \\ dy_2 & = & \cos\ \beta\ \sin\frac{\theta}{2}\ d\beta + \frac{1}{2}\sin\beta\ \cos\frac{\theta}{2}d\theta \end{array}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\omega &= x_1dy_1 - y_1dx_1 + x_2dy_2 - y_2dx_2 \\
&= \left(\cos\beta\ \sin\ \alpha\ \sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2} - \sin\beta\cos\ \alpha\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\right)d\alpha \\
&+ \left(-\cos\ \alpha\cos\ \tfrac{\theta}{2}\sin\beta\ \sin\tfrac{\theta}{2} + \sin\ \alpha\ \cos\ \tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\beta\right)d\beta \\
&+ \tfrac{1}{2}\left(\cos\ \alpha\ \cos\ \tfrac{\theta}{2}\cos\beta\cos\tfrac{\theta}{2} + \cos\ \alpha\ \cos\ \beta\ \sin^2\tfrac{\theta}{2}\right)d\theta \\
&+ \tfrac{1}{2}\left(\sin\ \alpha\ \sin\ \beta\ \cos^2\tfrac{\theta}{2} + \sin\ \beta\ \sin\alpha\sin^2\ \tfrac{\theta}{2}\right)d\theta \\
&= \sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\sin(\alpha-\beta)d\alpha + \sin\tfrac{\theta}{2}\cos\ \tfrac{\theta}{2}\ \sin(\alpha-\beta)d\beta + \tfrac{1}{2}\cos(\beta-\alpha)d\theta \\
&= \tfrac{1}{2}\sin\theta\sin\psi(d\alpha+d\beta) + \tfrac{1}{2}\cos\ \psi\ d\theta \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\sin\ \theta\ \sin\psi\ d\varphi + \cos\psi\ d\theta\right)
\end{aligned}
$$

La restriction de la 1-forme ω sur $\mathbb{S}^3$est donc :

$$\omega|_{\mathbb{S}^3} = \frac{1}{2}\left(\sin\ \theta\ \sin\psi d\ \varphi + \cos\ \psi d\ \theta\right)$$

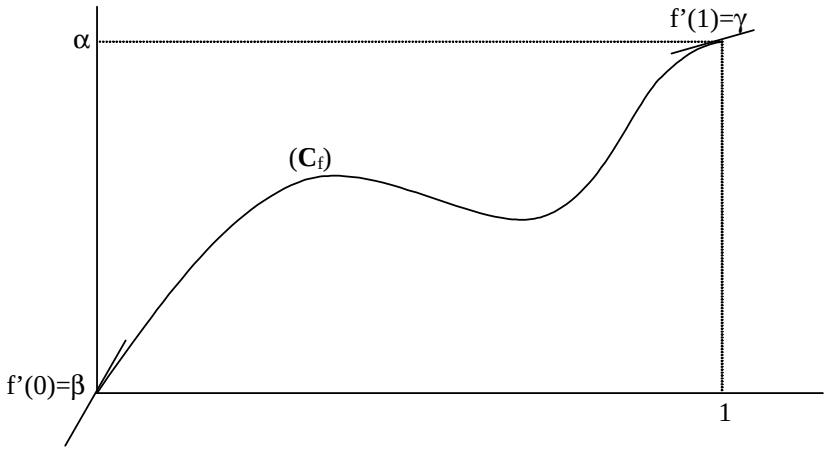
La contrainte $\sin\ \theta\ \sin\ \psi d\ \varphi + \cos\ \psi\ d\theta = 0$ est nonholonome,donc :

$$2d\omega = \cos\theta\sin\psi d\theta\wedge d\varphi + \sin\theta\cos\psi d\psi\wedge d\varphi - \sin\psi d\psi\wedge d\theta \neq 0$$

On arrive finalement à la caractérisation suivante des courbes horizontales en fonction des angles d'Euler.

Lemme 2.3.1 *Soit $c(s) = (\varphi(s), \psi(s), \theta(s))$ une courbe sur $\mathbb{S}^3$. La courbe c est horizontale si et seulement si $\omega(\dot{c}) = 0$, c'est à dire*

$$\sin\theta\ \sin\ \psi\ \dot{\varphi} + \cos\ \psi\dot{\theta} = 0. \tag{2-8}$$



Pour démontrer le théorème de Chow, nous aurons besoin aux lemmes suivants :

Lemme 2.3.2 *Soient α, β, γ trois nombres réels . Alors il existe une fonction lisse f telle que $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et*

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(1) = \alpha \quad , \quad f\,'(0) = \beta \quad , \qquad f\,'(1) = \gamma.$$

Lemme 2.3.1 *Soient q_0, q_1, I trois nombres réels. Alors il existe une fonction lisse q telle que $q : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et*

$$q(0) = q_0 \quad , \qquad q(1) = q_1, \qquad \int_0^1 q(u)du = I.$$

Preuve. Soient $q_0, q_1, I \in \mathbb{R}$, en appliquant le lemme $(2-3-2)$, il existe une fonction f telle que $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(1) = I \quad , \quad f\,'(0) = q_0 \quad , \qquad f\,'(1) = q_1$$

On pose $q(s) = f\,'(s)$ alors $f\,(s) = \int_0^s q(u)du$ d'ou $I = f(1) = \int_0^1 q(u)du$ et $q(0) = f\,'(0) = q_0$, $q(1) = f\,'(1) = q_1$

On arrive alors au théorème de connectivité (théorème de Chow) qui s'énonce ainsi :

Théorème 2 *Si P, Q sont deux points de la sphère $\mathbb{S}^3$, alors il existe une courbe horizontale c joignant P et Q.*

Preuve. Soient $P(\varphi_0, \psi_0, \theta_0)$ et $Q(\varphi_1, \psi_1, \theta_1)$ les coordonnés d'Euler. Nous devons trouver une courbe horizontale $c(s) = (\varphi(s), \psi(s), \theta(s))$ avec $c(0) = P$, $c(1) = Q$ ce qui est équivalent à trouver des fonctions $\varphi(s), \psi(s), \theta(s)$ telles que

$$\sin\theta(s)\sin\psi(s)\dot{\varphi}(s) + \cos\psi(s)\dot{\theta}(s) = 0, \tag{2-9}$$

avec

$$\begin{array}{rclrclrcl} \varphi(0) & = & \varphi_0, & \psi(0) & = & \psi_0, & \theta(0) & = & \theta_0, \\ \varphi(1) & = & \varphi_1, & \psi(1) & = & \psi_1, & \theta(1) & = & \theta_1 \end{array} \tag{2-10}$$

supposons que $\cos\psi(s) \neq 0$, alors $(2-9)$ s'écrit :

$$\sin\theta(s)\tan\psi(s)\dot{\varphi}(s) + \dot{\theta}(s) = 0. \tag{2-11}$$

si on pose $\theta(s) = \arcsin p(s)$, $\psi(s) = \arctan q(s)$, $\varphi(s) = \varphi_0 + s(\varphi_1 - \varphi_0)$ où p, q sont deux fonctions qui seront définies ci dessous. Donc la relation $(2-11)$ devient

$$p(s)q(s)k + \frac{p'(s)}{\sqrt{1-p^2(s)}} = 0, \tag{2-12}$$

en séparant les variables de l'équation (2-12), on obtient

$$\frac{dp}{p\sqrt{1-p^2}} = -kq(s)ds,$$

et par une simple intégration on obtient :

$$-\tanh^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} = -k\left(\int_0^s \quad q(u)du + C_1\right) \iff$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-p^2(s)}} = \tanh\left[k\left(\int_0^s \quad q(u)du + C_1\right)\right]$$

La constante C_1 et l'intégrale $\int_0^1 \quad q(u)du$ qui peut être déterminée à partir des conditions (2-10). Nous obtenons :

$$\frac{1}{\sqrt{1-p^2(0)}} = \tanh(kC_1) \Longrightarrow C_1 = \frac{1}{k}\tanh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-p^2(0)}}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-p^2(1)}} = \tanh\left[k\left(\int_0^1 \quad q(u)du + C_1\right)\right] \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 \quad q(u)du = \frac{1}{k}\left[\tanh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-p^2(1)}}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-p^2(0)}}\right)\right]$$

où $p(0) = \sin\theta(0) = \sin\theta_0 \qquad$ et $\qquad p(1) = \sin\theta(1) = \sin\theta_1$. Donc la fonction $q(s)$ satisfait

$$\int_0^1 \quad q(u)du = \frac{1}{k}\left[\tanh^{-1}\left(\frac{1}{|\cos\theta_1|}\right) - \tanh^{-1}\frac{1}{|\cos\theta_0|}\right] \qquad \text{2-13}$$

Les conditions $(2-10)$deviennent

$$q(0) = \tan\psi_0 \quad , \qquad q(1) = \tan\psi_1. \qquad \text{2-14}$$

D'après le lemme $(2-3-3)$ il existe une fonction $q : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que les conditions $(2-13)$ et $(2-14)$ ont lieu .

La fonction $p(s)$ sera définie par la relation :

$$\frac{1}{\sqrt{1-p^2(s)}} = \tanh\left[k\int_0^s q(u)du + \tanh^{-1}\frac{1}{|\cos\theta_0|}\right]$$

Alors la courbe $c(s) = (\varphi(s), \psi(s), \theta(s)) = (\varphi_0 + ks, \arctan q(s), \arcsin p(s))$ est la courbe horizontale désirée joignant les deux points P et Q sur $\mathbb{S}^3$.

Il est connu que dans le cas du groupe de Heisenberg si $(x_0, 0)$et $(x_1, 0)$ sont deux points du plan $(t = 0)$, alors le segment joignant ces points est une courbe horizontale joignant les points qui se trouve dans le plan $t = 0$. Le théorème suivant est son analogue pour la sphère $\mathbb{S}^3$. Le plan $t = 0$ sera remplacé par la sphère $\mathbb{S}^2$.

Théorème 3 *Pour (φ_0, φ_1) et (θ_0, θ_1) donnés, il existe une courbe horizontale c joignant les points ayant les coordonnées d'Euler $(\varphi_0, \psi, \theta_0)$ et $(\varphi_1, \psi, \theta_1)$ ou ψ est une constante.*

Preuve. Soit (φ, ψ, θ) une courbe horizontale où ψ est une constante. L'équation $(2-8)$ s'écrit :

$$-\tan\psi\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1}{\sin\theta},$$

et par une intégration simple

$$-\tan\psi\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\varphi}{d\theta}d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{1}{\sin\theta}d\theta$$

On obtient

$$-\tan\psi\left(\varphi(\theta) - \varphi(\theta_0)\right) = \ln\tan\frac{\theta}{2} - \ln\tan\frac{\theta_0}{2} \qquad 2\text{-}15$$

Pour $\theta = \theta_1$, on obtient

$$\psi = \arctan\left(\ln\frac{\tan\frac{\theta_1}{2}}{\tan\frac{\theta_0}{2}}/\left(\varphi_0 - \varphi_1\right)\right) \qquad 2\text{-}16$$

et en utilisant $(2-15)$

$$\varphi(\theta) - \varphi_0 = -\ln\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta_0}{2}}\right) / \tan\psi$$

Donc, avec ψ définie par la relation $(4-16)$, la courbe horizontale c joignant les points $(\varphi_0, \psi, \theta_0)$ et $(\varphi_1, \psi, \theta_1)$ est :

$$(\varphi, \psi, \theta) = \left(\varphi_0 - \ln\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta_0}{2}}\right) / \tan\psi \ , \ \psi \ , \ \theta\right)$$

Soit $S_{\psi_0} = \{(\varphi, \psi, \theta) \in \mathbb{S}^3, \psi = \psi_0\}$ le sous ensemble de $\mathbb{S}^3$défini par les angles d'Euler, ce qui correspond à une sphère de dimension 2.

Corollaire 2.3.1 *Soient les deux points* $(\varphi_0, \psi, \theta_0)$ *et* $(\varphi_1, \psi, \theta_1)$ *avec* $\psi_1 = \psi_0$. *Alors il existe une courbe horizontale* c *sur* S_{ψ_0} *joignant ces deux points .* ■

Chapitre 3

Géodésiques sous-riemanniennes de la sphère $\mathbb{S}^3$

Le problème des géodésiques est l'un des problèmes les plus anciens en géométrie différentielle et en calcul des variations. Cette importance s'est traduit également en géométrie riemannienne et aussi par la suite en géométrie sous-riemannienne. Dans le cadre riemannien, toute courbe minimisante est la projection d'une extrémale. Ces courbes peuvent être définies de deux façons équivalentes, dépendant du cadre lagrangien ou hamiltonien. Pour une structure sous-riemannienne (Δ, g) sur une variété M, la situation est très différente. Le calcul des variations montre qu'il existe deux classes de courbes minimisantes. La première généralise le cas riemannien : ce sont les courbes qui sont projections de trajectoires contenues dans $T^*M \ -O_M$, T^*M étant le fibré cotangent et O_M sa section zéro, du hamiltonien associé au problème. La deuxième classe plus subtile n'a été découverte que dans les années 90 par Montgomery.

3.1 Caractérisation des géodésiques horizontales à une distribution de $\mathbb{S}^3$ via le formalisme lagrangien

3.1.1 Présentation du problème

On considère la variété sous-riemannienne (M, Δ, g) où $M = \mathbb{S}^3$ est la sphère unité du groupe des quaternions, $\Delta = \text{Vect}\ \{X, Y\}$ où X et Y sont les champs de vecteurs invariants à gauche sur $\mathbb{S}^3$ donnés par :

$$\begin{aligned} X &= x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} \\ Y &= y_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial y_2} \end{aligned}$$

est g est la métrique obtenue en décrétant les champs de vecteurs X et Y orthonormés.

Nous rappelons que dans ce contexte, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe $\gamma = (x_1(s), x_2(s), y_1(s), y_2(s)) : [0, T] \to \mathbb{R}^3$ soit horizontale est qu'elle vérifie

$$< \dot{x}, y > - < x, \dot{y} >= \dot{x}_1 y_1 + \dot{x}_2 y_2 - \dot{y}_1 x_1 - \dot{y}_2 x_2 = 0.$$

D'autre part si $\gamma = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ est horizontale alors

$$\dot{\gamma} = aX + bY,$$

d'où

$$\begin{aligned} a &= < \dot{\gamma}, X > = \dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1 - \dot{y}_1 y_2 + \dot{y}_2 y_1 \\ b &= < \dot{\gamma}, Y > = \dot{x}_1 y_2 - \dot{x}_2 y_1 + \dot{y}_1 x_2 - \dot{y}_2 x_1 \end{aligned}$$

Si on se donne deux points de la sphère $\mathbb{S}^3$, on sait que d'après le chapitre précédent, ces deux points peuvent être joints par un courbe horizontale (théorème de Chow). Nous

rappelons qu'une courbe horizontale de longueur minimale est appelée une géodésique. Il est bien connu que si l'on ne considère que des courbes définies sur le même intervalle alors il est équivalent de minimiser la longueur ou l'énergie.

On considère alors le problème de minimiser l'énergie :

$$\frac{1}{2}\int_0^T (<\dot{\gamma}(s),\dot{\gamma}(s)>_g)ds = \frac{1}{2}\int_0^T (a^2(s)+b^2(s))ds$$

Les courbes minimisantes sont solutions des équations d'Euler-Lagrange du problème variationnel suivant :

$$L(x,\dot{x},y,\dot{y}) = \frac{1}{2}(a^2+b^2) + \lambda(s)(x_1\dot{y_1} - y_1\dot{x_1} + x_2\dot{y_2} - y_2\dot{x_2})$$

La fonction $\lambda(s)$ est appelée multiplicateur de Lagrange.

Remarque 3.1.1 *En général le formalisme hamiltonien est plus adapté au cas sous-riemannien que le formalisme lagrangien car ce dernier exige l'introduction de multiplicateurs de Lagrange, ce qui le rend plus lourd. Dans notre cas c'est le formalisme hamiltonien qui est très compliqué.*

3.1.2 Cas du multiplicateur de Lagrange nul

Dans ce cas les courbes qui minimisent l'énergie sont solutions du système d'Euler -Lagrange où le lagrangien est donné par :

$$L(x,\dot{x},y,\dot{y}) = \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

On a alors

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = ax_2 + by_2, & & \frac{\partial L}{\partial x_1} = -a\ \dot{x}_2 - b\ \dot{y}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = -ax_1 - by_1 & & \frac{\partial L}{\partial x_2} = a\ \dot{x}_1 + b\ \dot{y}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = -ay_2 + b\ x_2 & & \frac{\partial L}{\partial y_1} = a\ \dot{y}_2 - b\ \dot{x}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = ay_1 - b\ x_1 & & \frac{\partial L}{\partial y_2} = -a\ \dot{y}_1 + b\ \dot{x}_1 \end{array}$$

Le système d'Euler -Lagrange est :

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \quad , \quad \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial L}{\partial x_2} \tag{3-1}$$

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = \frac{\partial L}{\partial y_1} \quad , \quad \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = \frac{\partial L}{\partial y_2}. \tag{3-2}$$

Dans notre cas nous avons :

$$\begin{array}{lll} \dot{a}\ x_2 + \dot{b}\ y_2 = -2\left(a\ \dot{x}_2 + b\ \dot{y}_2\right), & & \dot{a}\ x_1 + \dot{b}\ y_1 = -2\left(a\ \dot{x}_1 + b\ \dot{y}_1\right), \\ \dot{a}\ y_2 - \dot{b}\ x_2 = -2\left(a\ \dot{y}_2 - b\ \dot{x}_2\right), & & \dot{a}\ y_1 - \dot{b}\ x_1 = -2\left(a\ \dot{y}_1 - b\ \dot{x}_1\right). \end{array}$$

En multipliant la première équation par x_2, la seconde par x_1, la troisième par y_2 et la quatrième par y_1, et après calcul on obtient :

$$\begin{array}{ll} & \dot{a}\left(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2\right) + \dot{b}(x_1y_1 - y_1x_1 + x_2y_2 - y_2x_2) \\ = & -2\left[a\left(x_2\ \dot{x}_2 + x_1\ \dot{x}_1 + y_2\ \dot{y}_2 + y_1\ \dot{y}_1\right) + b\left(x_2\ \dot{y}_2 + x_1\dot{y}_1 - y_2\dot{x}_2 - \ y_1\dot{x}_{\ 1}\right)\right] \\ \Longleftrightarrow & \dot{a} = -2b\left(y_2\dot{x}_2 + \ y_1\dot{x}_{\ 1} - x_2\ \dot{y}_2 - x_1\dot{y}_1\right) \\ \Longleftrightarrow & \dot{a} = 0 \end{array}$$

où nous avons utilisé la condition d'horizontalité (voir Proposition 2.3.1)

$$y_2\dot{x}_2 + \ y_1\dot{x}_{\ 1} - x_2\ \dot{y}_2 - x_1\dot{y}_1 = 0$$

et la contrainte

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1$$

et sa dérivée

$$x_1\ \dot{x}_1 + x_2\ \dot{x}_2 + y_1\ \dot{y}_1 + y_2\ \dot{y}_2 = 0$$

De la même façon, en multipliant la première équation par y_2, la deuxième par y_1, la troisième par$-\ x_2$, et la quatrième par $-x_1$, et après calcul on obtient similairement que $\dot{b} = 0$.

Théorème 4 *Soient P, Q deux points de $\mathbb{S}^3$et soit γ la courbe horizontale de longueur minimale parmi toutes les courbes joignant P et Q. Alors*

1) *$|\dot{\gamma}(s)|$ est constante le long de la courbe γ.*

2) *Les angles entre le vecteur tangent $\dot{\gamma}$ et les champs de vecteurs X, Y et T sont constants le long de la courbe γ.*

Preuve.

1) De l'égalité $\dot{a} = \dot{b} = 0$, on déduit que $a(s) =$ constante et $b(s) =$ constante et par conséquent,

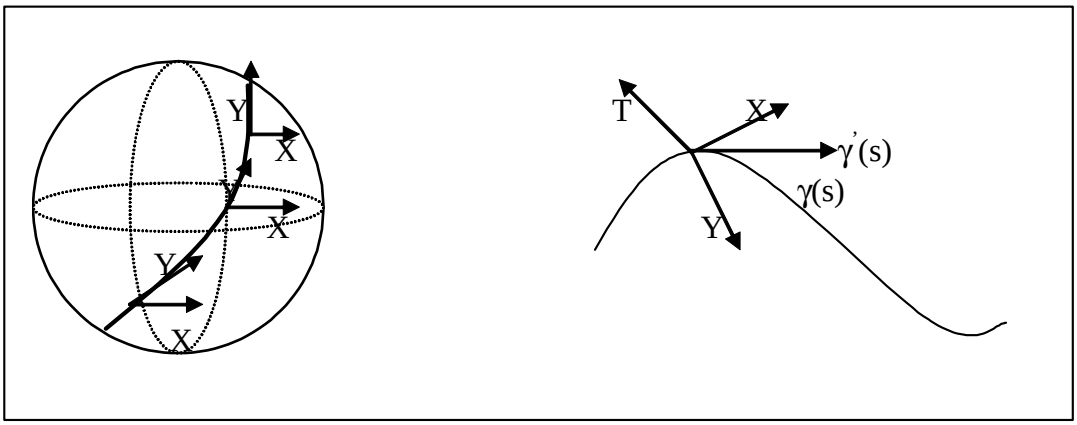
$$|\dot{\gamma}(s)| = \sqrt{a(s)^2 + b(s)^2} = \text{constante}$$

.

2) Comme $a(s)$, $b(s)$, $|\dot{\gamma}(s)|$ sont des constantes alors

$$\cos \widehat{\dot{\gamma}; X} = \frac{\langle \dot{\gamma}; X \rangle}{|\dot{\gamma}|\ \ |X|} = \frac{a(s)}{\sqrt{a(s)^2 + b(s)^2}} = \text{constante}$$

$$\cos \widehat{\dot{\gamma}; Y} = \frac{\langle \dot{\gamma}; Y \rangle}{|\dot{\gamma}|\ \ |Y|} = \frac{b(s)}{\sqrt{a(s)^2 + b(s)^2}} = \text{constante}$$



$$\cos \widehat{\dot{\gamma}; T} = \frac{\langle \dot{\gamma}; T \rangle}{|\dot{\gamma}| \ \ |Y|} = 0 \implies \widehat{\dot{\gamma}; T} = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque 3.1.2 *Le cas où le multiplicateur de Lagrange est nul coïncide avec le cas du groupe de Heisenberg*

3.1.3 Cas du multiplicateur de Lagrange non nul.

Dans ce cas le Lagrangien est

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2}\left[a^2 + b^2\right] + \lambda(s)\left(\dot{x}_1 y_1 + \dot{x}_2 y_2 - \dot{y}_1 x_1 - \dot{y}_2 x_2\right)$$

et le système d'Euler -Lagrange s'écrit :

$$\begin{aligned}
\dot{a}\ x_2 + \dot{b}\ y_2 &= -2\left(a\ \dot{x}_2 + b\ \dot{y}_2 + \lambda\ \dot{y}_1\right) - \dot{\lambda}\ y_1 \\
\dot{a}\ x_1 + \dot{b}\ y_1 &= -2\left(a\ \dot{x}_1 + b\ \dot{y}_1 - \lambda\ \dot{y}_2\right) + \dot{\lambda}\ y_2 \\
\dot{a}\ y_2 - \dot{b}\ x_2 &= -2\left(a\ \dot{y}_2 - b\ \dot{x}_2 + \lambda\ \dot{x}_1\right) - \dot{\lambda}\ x_1 \\
\dot{a}\ y_1 - \dot{b}\ x_1 &= -2\left(a\ \dot{y}_1 - b\ \dot{x}_1 - \lambda\ \dot{x}_2\right) + \dot{\lambda}\ x_2.
\end{aligned}$$

En multipliant la première équation par x_2, la seconde par x_1, la troisième par y_2 et

la quatrième par y_1 et après calcul, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \dot{a}\underbrace{\big(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2\big)}_{=1}+\dot{b}\underbrace{(x_1y_1+x_2y_2-y_1x_1-y_2x_2)}_{=0} \\
= \quad & -2\left[a\underbrace{(x_2\ \dot{x}_2+x_1\ \dot{x}_1+y_2\ \dot{y}_2+y_1\ \dot{y}_1)}_{=0}+b\underbrace{(x_2\ \dot{y}_2+x_1\dot{y}_1-y_2\dot{x}_2-\ y_1\dot{x}_{\ 1})}_{=0}\right] \\
& -2\lambda\underbrace{(x_2\dot{y}_1-x_1\dot{y}_2+\dot{x}_1y_2-\dot{x}_2y_1)}_{=b}+\ \dot{\lambda}\underbrace{(-x_2y_1+x_1y_2-x_1y_2+x_2y_1)}_{=0} \\
\iff \quad & \dot{a}=-2\lambda b.
\end{aligned}$$

De la même façon, en multipliant la première équation par y_2, la deuxième par y_1, la troisième par $-x_2$, et la quatrième par $-x_1$, et après calcul, on obtient

$$\begin{aligned}
& \dot{a}\underbrace{(x_1y_1+x_2y_2-y_1x_1-y_2x_2)}_{=0}+\dot{b}\underbrace{\big(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2\big)}_{=1} \\
= \quad & -2\left[a\underbrace{(y_2\dot{x}_2+\ y_1\dot{x}_{\ 1}-x_2\ \dot{y}_2-x_1\dot{y}_1)}_{=0}+b\underbrace{(x_2\ \dot{x}_2+x_1\ \dot{x}_1+y_2\ \dot{y}_2+y_1\ \dot{y}_1)}_{=0}\right] \\
& -2\lambda\underbrace{(\dot{y}_1y_2-\dot{y}_2y_1-\dot{x}_1x_2+\dot{x}_2x_1)}_{=-a}+\ \dot{\lambda}\underbrace{(-y_2y_1+y_1y_2-x_1x_2+x_2x_1)}_{=0} \\
\iff \quad & \dot{b}=2\lambda a.
\end{aligned}$$

D'où a et b satisfont le système suivant

$$\dot{a} \ = \ -2\lambda b. \tag{3-3}$$

$$\dot{b} \ = \ 2\lambda a. \tag{3-4}$$

En multipliant la première équation par a et la seconde par b et en additionnant, on obtient $a\ \dot{a}+b\ \dot{b}=0$ c'est-à-dire $a^2+b^2=r^2$ constant le long de la géodésique. Ceci signifie que l'énergie est préservée, et le vecteur tangent de la géodésique a une longueur

constante. Soit $\theta(s)$ une fonction telle que

$$a(s) = r\cos\theta(s) \quad , \qquad b(s) = r\sin\theta(s).$$

En remplaçant dans les équations $(3-3)$ et $(3-4)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(s)\sin\theta(s) &= 2\lambda(s)\sin\theta(s) \\ \dot{\theta}(s)\cos\theta(s) &= 2\lambda(s)\cos\theta(s), \end{aligned}$$

en divisant la première équation par $sin\theta(s)$ et la seconde par $cos\theta(s)$ on obtient :

$$\dot{\theta}(s) = 2\lambda(s).$$

la solution de cette équation est $\theta(s) = 2\phi(s) + \theta_0$, où ϕ est une fonction définie par $\phi(s) = \int_0^s \lambda(u)du$. Alors

$$a(s) = r\ \cos\left(2\phi(s) + \theta_0\right) \tag{3-5}$$

$$b(s) = r\ \sin\left(2\phi(s) + \theta_0\right) \tag{3-6}$$

avec $\phi(0) = 0$, $a(0) = r\cos\theta_0$, $b(0) = r\ \sin\theta_0$ et $\theta_0 = tan^{-1}(b(0)/a(0))$.

Soit $\gamma(s)$ une géodésique sous-riemannienne. Comme $\{X, Y\}$ sont orthonormés, alors

$$a(s) = \langle\dot{\gamma}, X\rangle = \underbrace{|\dot{\gamma}|}_{=r} \cdot \underbrace{|X|}_{=1} \cos(\widehat{\dot{\gamma}, X}) = r\ \cos(\widehat{\dot{\gamma}, X})$$

et

$$b(s) = \langle \dot{\gamma}, Y \rangle = \underbrace{|\dot{\gamma}|}_{=r} \cdot \underbrace{|Y|}_{=1} \cos(\widehat{\dot{\gamma}, Y}) = r \cos(\widehat{\dot{\gamma}, Y}) = r \sin(\frac{\pi}{2} - \widehat{\dot{\gamma}, Y})$$

En comparant les équations $(3-5)$ et $(3-6)$ nous arrivons au résultat suivant

Proposition 3.1.1 *Les angles pour lesquels les géodésiques sous-riemanniennes intersectent les courbes intégrales des champs de vecteurs X et Y sont donnés par les formules*

$$\widehat{\dot{\gamma}(s), X_{\gamma(s)}} = 2\phi(s) + \theta_0$$

$$\widehat{\dot{\gamma}(s), Y_{\gamma(s)}} = \frac{\pi}{2} - \widehat{\dot{\gamma}(s), X_{\gamma(s)}}$$

Démontrons le résultat suivant qui caractérise l'énergie d'une manière plus simple

Proposition 3.1.2 *Si $\gamma(s) = (x_1(s),\, x_2(s),\, y_1(s),\, y_2(s))$ est une géodésique sous-riemannienne, alors*

$$\dot{x}_1^2(s) + \dot{x}_2^2(s) + \dot{y}_1^2(s) + \dot{y}_2^2(s) = a^2(s) + b^2(s)$$

Preuve. En utilisant les définitions de a et b, la condition d'horizontalité et de la contrainte d'holonomie, nous pouvons écrire le système suivant

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1 - \dot{y}_1 y_2 + \dot{y}_2 y_1 &= a(s) \\
\dot{x}_1 y_2 - \dot{x}_2 y_1 + \dot{y}_1 x_2 - \dot{y}_2 x_1 &= b(s) \\
\dot{x}_1 y_1 + \dot{x}_2 y_2 - x_1 \dot{y}_1 - x_2 \dot{y}_2 &= 0 \\
\dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 + \dot{y}_1 y_1 + \dot{y}_2 y_2 &= 0
\end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire comme suit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_2 & -x_1 & -y_2 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & x_2 & -x_1 \\ y_1 & y_2 & -x_1 & -x_2 \\ x_1 & x_2 & y_1 & y_2 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $|M| = 1$, $M^{-1} = M^t$ et M est une matrice orthogonale. Il est bien connu q'une matrice orthogonale préserve la longueur euclidienne des vecteurs, il vient alors que

$$\dot{x}_1^2(s) + \dot{x}_2^2(s) + \dot{y}_1^2(s) + \dot{y}_2^2(s) = a^2(s) + b^2(s)$$

le long de toute géodésique sous-riemannienne, ce qui achève la preuve.

Remarque 3.1.3 *Le résultat ci-dessus est vérifié parceque la restriction de la métrique euclidienne de* $\mathbb{R}^4$ *sur Vect*(X, Y) *est une métriques sous-riemannienne.*

Le résultat suivant est utile pour la suite.

Proposition 3.1.3 *Soit* $\gamma(s)$ *une géodésique sous-riemannienne. Alors* $\left\langle \ddot{\gamma}(s), T_{\gamma(s)} \right\rangle = 0$*, c'est-à-dire, la composante de l'accélération est nulle le long de la direction* $T = [X, Y]$.

Preuve. Soit la courbe horizontale $\gamma(s) = (x_1(s), x_2(s), y_1(s), y_2(s))$. En dérivant la condition d'horizontalité suivante,

$$\dot{x}_1 y_1 + \dot{x}_2 y_2 - x_1 \dot{y}_1 - x_2 \dot{y}_2 = 0$$

on obtient

$$\ddot{x}_1 y_1 + \ddot{x}_2 y_2 - x_1 \ddot{y}_1 - x_2 \ddot{y}_2 = 0$$

laquelle on peut écrir

$$\langle (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2), (y_1, y_2, -x_1, -x_2) \rangle = 0$$

or $\langle \ddot{\gamma}, T \rangle = 0$,ou

$$T = y_1 \partial_{x_1} + y_2 \partial_{x_2} - x_1 \partial_{y_1} - x_2 \partial_{y_2}$$

Dans la suite, nous allons voir un autre problème variationnel, où on remplace l'énergie $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ par $\frac{1}{2}\,(\,\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)$

et considérons un nouveau Lagrangien L^* tel que

$$L^*(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2}\left(\,\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2\right) + \lambda(s)\,(\dot{x}_1 y_1 + \dot{x}_2 y_2 - x_1 \dot{y}_1 - x_2 \dot{y}_2)\,.$$

Les équations d'Euler-Lagrange données par le Lagrangien L^* décrivent les mêmes géodésiques sous-riemanniennes que les équations associées au premier lagrangien L. Les équations d'Euler-Lagrange de L^* sont :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 &= 2\lambda \dot{y}_1 + \dot{\lambda} y_1 \\ \ddot{x}_2 &= 2\lambda \dot{y}_2 + \dot{\lambda} y_2 \\ \ddot{y}_1 &= -2\lambda\ \dot{x}_1 - \dot{\lambda} x_1 \\ \ddot{y}_2 &= -2\lambda\ \dot{x}_2 - \dot{\lambda} x_2 \end{cases}$$

En multipliant la première équation par y_1, la seconde par y_2, la troisième par $-x_1$et

la quatrième par $-x_2$ et après calcul on obtient :

$$\ddot{x}_1 y_1 + \ddot{x}_2 y_2 - x_1 \ddot{y}_1 - x_2 \ddot{y}_2 = 2\lambda \underbrace{(x_2\ \dot{x}_2 + x_1\ \dot{x}_1 + y_2\ \dot{y}_2 + y_1\ \dot{y}_1)}_{=0} + \dot{\lambda} \underbrace{(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2)}_{=1}$$

on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(s) &= \ddot{x}_1 y_1 + \ddot{x}_2 y_2 - x_1 \ddot{y}_1 - x_2 \ddot{y}_2 \\ &= \langle (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2), (y_1, y_2, -x_1, -x_2) \rangle \\ &= \langle\ \ddot{\gamma}, T\ \rangle \end{aligned}$$

En utilisant la Proposition (3.1.3), nous obtenons :

Proposition 3.1.4 *Le multiplicateur de Lagrange $\lambda(s)$ est constant le long d'une géodésique sous-riemannienne.*

Si $\lambda = \frac{c}{2}$,avec c une constante, alors la proposition (3.1.1) devient :

$$\dot{\gamma}\widehat{(s), Y_{\gamma(s)}} = cs + \theta_0$$

Cela nous amène à la caractérisation suivante d'une géodésique sous-riemannienne.

Proposition 3.1.5 *La courbe $\gamma(s)$ est une géodésique sous-riemannienne sur $(\mathbb{S}^3, X, Y)$ si et seulement si l'angle entre sa vitesse et la direction du champ de vecteur X augmente de façon linéaire par rapport à s.*

3.2 Caractérisation des géodésiques horizontales à une distribution de $\mathbb{S}^3$ via la théorie du contrôle

3.2.1 Définitions et préliminaires

On considère le problème sous-riemannien (M, Δ, g) du paragraphe précédent, où $M = \mathbb{S}^3$, $\Delta = \text{Vect}\,\{X_1, X_2\}$ où X_1 et X_2 sont les champs de vecteurs invariants à gauche donnés par :

$$\begin{aligned} X_1 &= y\,\frac{\partial}{\partial x} - x\,\frac{\partial}{\partial y} - t\,\frac{\partial}{\partial z} + z\,\frac{\partial}{\partial t} \\ X_2 &= t\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} - x\,\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

où l'on a posé dans l'écriture précédente, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = t$. Pour donner une formulation équivalente du problème précédent avec un problème de contrôle optimal nous aurons besoin d'introduire :

Une *courbe admissible* sur $\mathbb{S}^3$ est une courbe $\gamma : [0, T] \to \mathbb{S}^3$ telle que $\dot{\gamma}(t) \in \Delta_{\gamma(t)} \setminus \{0\}$ pour presque tout t. Notons $(\ ,\ )$ le produit scalaire défini par g. La longueur et l'énergie d'une courbe admissible sont données respectivement par :

$$l(\gamma) = \int_0^T (\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))^{\frac{1}{2}} dt, \qquad e(\gamma) = \int_0^T (\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

Soient x_0, $x_1 \in \mathbb{S}^3$, une courbe *minimisante* joignant x_0 à x_1 est une courbe courbe admissible $\gamma : [0, T] \to \mathbb{S}^3$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(T) = x_1$ de longueur minimale. C'est un résultat classique qu'à T fixé le problème de minimiser la longueur équivaut au problème de minimiser l'énergie. Pour calculer ces courbes minimisantes il est commode d'utiliser le *principe du maximum de la théorie du contrôle*. Selon ce principe les courbes minimisantes appartiennent à une famille restreinte de courbe que l'on calcule comme suit.

Introduisons alors le système :

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{2} u_i(t) X_i\left(\gamma\left(t\right)\right)$$

où $u(t) = (u_1(t),\, u_2(t))$ est le contrôle associé à la courbe $\gamma\left(t\right)$. Soit λ une constante égale à 0 ou $\frac{1}{2}$ et considérons le pseudo-hamiltonien :

$$H_\lambda(\gamma, p, u) = \ < p,\ X(\gamma)u > -\lambda(X(\gamma)u, X(\gamma)u)$$

où $p = (p_x, p_y, p_z, p_t) \in \mathbb{R}^4$ est le vecteur adjoint, (p, λ) est non nul, $<, >$ est le produit scalaire usuel induit sur $\mathbb{S}^3$ et $X(\gamma)u$ désigne $\sum\limits_{i=1}^{2} u_i X_i\left(\gamma\right)$. On appelle *relèvement géodésique* (ou une *bi-iextrémale*) une courbe $(\ \gamma, p)$ définie sur $[0,\ T]$ telle que $t \rightarrow (\ \gamma(t), p(t))$ est solution presque partout des équations suivantes :

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} \ = \ \frac{\partial H_\lambda}{\partial p}(\gamma(t), p(t), u(t)), \qquad \frac{dp(t)}{dt} \ = \ -\frac{\partial H_\lambda}{\partial \gamma}(\gamma(t), p(t), u(t))$$

$$\frac{\partial H_\lambda}{\partial u} \ = \ 0.$$

Sa projection $t \rightarrow (\ \gamma(t)\ ,\ p(t))$ sur $\mathbb{S}^3$ s'appelle une *géodésique*. On peut observer qu'il y a deux types de relèvements géodésiques. Si $\lambda = 0$, le relèvement est dit *anormal* et si $\lambda = \frac{1}{2}$, il est dit *normal* et les géodésiques correspondantes sont qualifiées respectivement d'anormales et de normales. Une même géodésique peut admettre un relèvement normal et un relèvement anormal ; on dit qu'elle *strictement anormale* si elle est la projection d'un relèvement anormal mais non d'un relèvement normal.

Pour calculer les géodésiques sous-riemanniennes, il est convenable de supposer comme dans la section précédente les champs de vecteurs X_1et X_2 orthonormés. Alors dans ce cas, la longueur et l'énergie d'une courbe admissible sont données respectivement par :

$$l(\gamma) = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{2} u_i^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} dt, \qquad e(\gamma) = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{2} u_i^2(t)\right) dt$$

3.2.2 Calcul des géodésiques normales

Le pseudo-hamiltonien associé aux géodésiques normales correspond à la valeur $\lambda = \frac{1}{2}$, il est alors donné par :

$$H_{\frac{1}{2}} = \ < p, X(\gamma)u > -\frac{1}{2}(X(\gamma)u, X(\gamma)u)$$

où $p = (p_x, p_y, p_z, p_t)$. Le contrôle associé à une géodésique se calcule en résolvant l'équation $\frac{\partial H_{\frac{1}{2}}}{\partial u} = 0$ et l'on obtient

$$u_1 = yp_x - xp_y - tp_z + zp_t, \qquad u_2 = tp_x - zp_y + yp_z - xp_t$$

et le hamiltonien associé est :

$$H_{\frac{1}{2}}(\gamma, p, u) = \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right) = \frac{1}{2}\left[\left(yp_x - xp_y - tp_z + zp_t\right)^2 + \left(tp_x - zp_y + yp_z - xp_t\right)^2\right]$$

Les relèvements géodésiques normaux vérifient les équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H_{\frac{1}{2}}}{\partial p_x} = \left(yp_x - xp_y - tp_z + zp_t\right) y + \left(tp_x - zp_y + yp_z - xp_t\right) t \\ \dot{y} = \dfrac{\partial H_{\frac{1}{2}}}{\partial p_y} = -\left(yp_x - xp_y - tp_z + zp_t\right) x - \left(tp_x - zp_y + yp_z - xp_t\right) z \\ \dot{z} = \dfrac{\partial H_{\frac{1}{2}}}{\partial p_z} = -\left(yp_x - xp_y - tp_z + zp_t\right) t + \left(tp_x - zp_y + yp_z - xp_t\right) y \\ \dot{t} = \dfrac{\partial H_{\frac{1}{2}}}{\partial p_t} = \left(yp_x - xp_y - tp_z + zp_t\right) z - \left(tp_x - zp_y + yp_z - xp_t\right) x \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H_{\frac{1}{2}}}{\partial x} = -\left(yp_x - xp_y - tp_z + zp_t\right) p_y - \left(tp_x - zp_y + yp_z - xp_t\right) p_t \\ \dot{p}_y = -\dfrac{\partial H_{\frac{1}{2}}}{\partial y} = \left(yp_x - xp_y - tp_z + zp_t\right) p_x + \left(tp_x - zp_y + yp_z - xp_t\right) p_z \\ \dot{p}_z = -\dfrac{\partial H_{\frac{1}{2}}}{\partial z} = \left(yp_x - xp_y - tp_z + zp_t\right) p_t - \left(tp_x - zp_y + yp_z - xp_t\right) p_y \\ \dot{p}_t = -\dfrac{\partial H_{\frac{1}{2}}}{\partial t} = -\left(yp_x - xp_y - tp_z + zp_t\right) p_z + \left(tp_x - zp_y + yp_z - xp_t\right) p_x \end{cases}$$

Une autre représentation de ces équations est obtenue en introduisant le vecteur $P = (P_i)$, $i = 1, 2$ où $P_i = < p,\ X_i(x) >$ (coordonnées de Poincaré, P_i est en fait le hamiltonien associé au champs de vecteurs X_i). La condition d'optimalité donne dans ce cas

$$u_1 = P_1, \qquad u_2 = P_2$$

et le hamiltonien associé aux géodésiques normales prend alors la forme

$$H_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2)$$

où

$$\begin{aligned} P_1 &= yp_x - xp_y - tp_z + zp_t, \\ P_2 &= tp_x - zp_y + yp_z - xp_t \end{aligned}$$

Les *géodésiques normales* sont alors solutions des équations :

$$\begin{cases} \dot{x} &= P_1 y + P_2 t \\ \dot{y} &= -P_1 x - P_2 z \\ \dot{z} &= -P_1 t + P_2 y \\ \dot{t} &= P_1 z - P_2 x \end{cases}$$

Si on dénote par $P_{ij} =< p, [X_i, X_j] >$ le hamiltonien associé au crochet de Lie des champs de vecteurs X_i et X_j, avec $[X_i, X_j](x) = \frac{\partial X_i}{\partial x}(x)X_j(x) - \frac{\partial X_j}{\partial x}(x)X_i(x)$. Il est bien connu que $P_{ij} = \{P_i,\ P_j\}$, $1 \leq i < j = 1, 2$, $\{P_i,\ P_j\}$ étant le crochet de Poisson de P_i et P_j. Nous rappelons q'on entend par crochet de Poisson de deux fonctions $P_1(x, p)$ et $P_2(x, p)$ le produit scalaire de leurs gradients

$$\{P_1,\ P_2\} \ = \ < \nabla P_1,\ \nabla P_1 > \ = \ \frac{\partial P_1}{\partial x}\frac{\partial P_2}{\partial p} \ - \ \frac{\partial P_2}{\partial x}\frac{\partial P_1}{\partial p} \ ,$$

En particulier, le crochet de Poisson possède les propriétés suivantes :

$$
\begin{aligned}
\{P_1,\ P_2\} &= -\{P_2,\ P_1\}, \\
\{\lambda P_1 + \mu\ P_2,\ P_3\} &= \lambda\{P_1,\ P_3\} + \mu\{\ P_2,\ P_3\}, \\
\{P_1 P_2,\ P_3\} &= P_1\{P_2,\ P_3\} + P_2\{P_1,\ P_3\}.
\end{aligned}
$$

Pour notre problème, nous avons le long des extrémales les relations suivantes :

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
\dot{P}_1 &=& \left\{P_1,\ H_{\frac{1}{2}}\right\} &= P_2 P_{12} \\
\dot{P}_2 &=& \left\{P_2,\ H_{\frac{1}{2}}\right\} &= -P_1 P_{12} \\
\dot{P}_{12} &=& 0 &
\end{array}
\right.
$$

Remarque 3.2.1 *Si $\{X_1, X_2, X_3\}$ est une base de l'algèbre de Lie de $\mathbb{S}^3$, alors en paramétrisant par la longueur $H_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) = \frac{1}{2}$ et en introduisant les coordonnées cylindriques :*

$$
P_1 = \cos\theta, \quad P_2 = \sin\theta, \qquad P_3 = \lambda
$$

ce qui conduit aux équations

$$
\dot{P}_1 = P_2 P_3, \qquad \dot{P}_2 = -P_1 P_3
$$

Si $\theta \neq k\pi$, on obtient : $\dot{\theta} = -P_3 = -\lambda$.

A partir des équations précédentes on peut définir un feuilletage dans le plan (y, θ) qui conduit à une étude plus approfondie sur la nature et le rôle des géodésiques normales. Plus plus de détail concernant ce type d'étude on peut consulter [8] *et* [9].

3.2.3 Calcul des géodésiques anormales

Pour le cas anormal le hamiltonien correspond à $\lambda = 0$, il est donc donné par

$$
H_0 = \sum_{i=1}^{2} u_i P_i
$$

D'après le principe du maximum, les extrémales anormales sont alors solutions de :

$$P_1 = P_2 = P_{12} = 0$$

En différentiant les contraintes le long des extrémales nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{P}_1 = \left\{ P_1,\ \sum_{i=1}^{2} u_i P_i \right\} = u_2 P_{12} \\ 0 &= \dot{P}_2 = \left\{ P_2,\ \sum_{i=1}^{2} u_i P_i \right\} = -u_1 P_{12}, \end{aligned}$$

ce qui implique aussi que les extrémales sont solutions de :

$$u_1 \left\{ \left\{ P_1\ ,\ P_2 \right\},\ P_1 \right\} + u_2 \left\{ \left\{ P_1\ ,\ P_2 \right\},\ P_2 \right\} = 0.$$

Bibliographie

[1] A.A.Agrachev, A.V.Sarychev, *Abnormal sub-Riemannian geodesics :* .Morse index and rigidity. Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, 13, 6 (1996), $635 - 690$.

[2] M. Alcheikh, P. orro, F. Pelletier, *Characterizations of Hamiltonian geodesics in sub-Riemannian geometry,* J. Dynam. Cont. Syst. 3. (1998), $391 - 418$.

[3] R. Beals, B. Gaveau, P.C. Greiner, *On a Geometric Formula for the Fundamental Solution of Sub-elliptic Laplacians*, Math. Nachr. **181**(1996) , 81-163.

[4] R. Beals, P.C. Greiner, *Calculus on Heisenberg Manifolds*, Ann. Math. Studies $\neq$ 119,Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1988.

[5] A. Bellaiche, J.J. Risler, *Sub-Riemannian Geometry.*Progr. Math. **144**,Birkhauser, Basel (1996)

[6] M.Berger , B.Gostiaux , Géométrie différentielle,N0 :Armand Colin :5960.

[7] R.W. Brokett, *Control Theory and Singular Riemannian Geometry*, New Directions in Applied Mathematics, Hilton,P.J. and Young, G.S., ed. Springer-Verlag ,(1981).

[8] B.Bonnard , E.Trélat,*On the role of abnormal minimizers in SR-géometry* .Preprint (1999)

[9] B.Bonnard, M. Chyba , E . Trélat, *Sub-Riemannian geometry* : *One parameter deformation of the Martinet flat case*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol .4 , No. 1 Janvier 1998, $59 - 76$.

[10] P.Buser , Géométrie riemannienne, version du 22/10/2003 .

[11] O. Calin, *Geometric Mechanics on a step 4 sub-Riemannian manifold*, University of Notre Dame, IN, 46556, USA.

[12] O. Calin, V. *The missing direction and differential geometry on Heisenberg manifolds*, Thèse de PHD, département de mathématiques, université de Toronto (2000).

[13] O.Calin , V.Mangione ,variational calculus on sub-Riemannian manifolds balkan journal of geometry and its applications , VOL .8,N0 1,2003, pp.21-32 .

[14] O.Calin, D.Chang and P.Greiner, On a step $2(k+1)$ sub-Riemannian manifold, J. Geom. Anal., 12 (1) (2004), 1-18.

[15] O. Calin, D-C. Chang and P. Greiner, *Geometric Mechanics on the Heisenberg Group*, Bull. Instit. Math, Academia Sinica, 33, $\neq$ 3, (2005), $185-252$.

[16] O. Calin, D-C. Chang and P. Greiner, *Heisenberg group and ils generalizations*, AMS/IP series in Advanced Math., International Press, Cambridge, Massachusetts (2007).

[17] Y.Coudene 09/03,Quaternions et rotations,G.Casanova , Que-sais-je ?1657 « L'algèbre vectorielle ».

[18] E. Fabel, C. Gorodski, M. Rumin, *Holonomy of sub-Riemannian Manifolds*, International J. of Mathematics, vol 8, No **3** (1977) 317-344.

[19] B. Gaveau, *Principe de Moindre Action, Propagation de la Chaleur et Estimées Sous-Elliptiques sur Certains Groupes Nilpotents*, Acta Math. **139** (1977), 95-153.

[20] I.Kupka , *Géométrie sous-riemannienne* , Séminaire Bourbaki(1996).

[21] I. Kupka, *Abnormal extremals* . Preprint (1992).

[22] D.F. Lawden, *Elliptic Functions and Applications*, Applied Math. Sciences 80 , Springer-Verlag, (1989).

[23] R. Montgomery, A tour of sub-geometries, their geodesics and applications. Math. Survey and Monographs, American Maths. Soc., Providence, RI, 2002.

[24] R. Montgomery, *A survey of singular curves in sub-Riemannian geometry, J. Dyn. and Control Systems* 1 (1) , (1995) , 49-90.

[25] R. Montgomery , *Geodesics wihich do not satisfy the geodesic equations* , siani J . cont . opt . 32,n.6, 1605-1620 (1994). .

[26] F. Jean, Géométrie Différentielle Appliquée, Notes de cours, édition 2007/2008.

[27] F. Pelletier, L. Valère, *le problème des géodesiques en géométrie sous-riemannienne singulière*, C . R . A .S , Paris , t . 317 , série I , 71-76 , (1993).

[28] R.S. Strichartz, *Sub-riemannian geometry,* J.Differential Geometry 24 (1986) 221-263, and Corrections to "*Sub-Riemannian geometry*" J.Dff.Geom.30, no.2 (1989), 595-596.