

Table des matières

Introduction	1
Notations	6
I Modélisation et Outils Mathématiques	9
1 Modélisation	11
1.1 Cadres physiques - Modèles mathématiques	11
1.2 Lois de comportement	16
1.3 Conditions aux limites de contact et lois de frottement	20
1.4 Conditions aux limites de contact bilatéral avec frottement et usure	24
1.5 Conditions thermiques	25
2 Outils Mathématiques	27
2.1 Espaces de Sobolev	27
2.2 Triplet de Gelfand	31
2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	32
2.4 Eléments d'analyse dans les espaces de Hilbert	35
2.4.1 Equations et inéquations variationnelles d'évolution	35
2.4.2 Théorème du point fixe de Banach	39
2.5 Compléments divers	40
2.5.1 Lemmes de type Gronwall	40
2.5.2 Sous différentiabilité	42

II	Analyse variationnelle de problèmes electro-viscoélastiques de contact avec frottement de Coulomb régularisé	43
3	Problème quasistatique en electro-viscoélasticité avec frottement	45
3.1	Formulation du problème	45
3.2	Formulation variationnelle	47
3.3	Existence et unicité de la solution	49
4	Problème dynamique électro-viscoélastique avec frottement	60
4.1	Formulation du problème	60
4.2	Formulation variationnelle	62
4.3	Existence et unicité de la solution	65
III	Analyse variationnelle de problèmes thermodynamiques de contact avec frottement et usure	76
5	Problème thermoviscoélastique avec mémoire longue et usure	78
5.1	Formulation du problème	78
5.2	Formulation variationnelle	80
5.3	Existence et unicité de la solution	83
6	Problème thermo-élasto-viscoplastique avec endommagement et usure	97
6.1	Formulation du problème	98
6.2	Formulation variationnelle	99
6.3	Existence et unicité de la solution	103
	Conclusion	119
	Bibliographie	121

Introduction

Dans la plupart des systèmes de la mécanique des milieux continus, il existe des situations dans lesquelles un corps déformable entre en contact avec d'autres corps ou bien avec une fondation rigide ou déformable. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent ces structures lorsqu'elles subissent ces forces. Les problèmes de contact mécanique apparaissent principalement dans des domaines aussi variés que l'aéronautique, la mécanique automobile, le génie civil, les sciences du bois, la médecine, la production de l'énergie (assemblage des structures, fissuration dans les joints soudés) et les systèmes de transmission. Prenant en compte les comportements divers des milieux continus, elle englobe l'hydrodynamique, la dynamique des gaz, l'élasticité, la plasticité et d'autres types de comportement. Vu l'importance du phénomène, des efforts considérables ont été consacrés à la modélisation, l'analyse ainsi que l'approximation numérique des processus physiques provenant des contacts entre des corps déformables ou entre un corps et une base rigide, déformable ou lubrifiée. Par conséquent, une théorie mathématique générale de la mécanique du contact (MTCM) a actuellement émergée. Elle concerne les structures mathématiques qui sont à la base des problèmes de contact avec des lois constitutives différentes, c'est à dire, différents matériaux, diverses géométries et des conditions de contact différentes ; voir par exemple [35, 39].

La modélisation des problèmes de contact d'un corps déformable avec une base dépend essentiellement des propriétés mécaniques du matériau considéré, ainsi que des conditions aux limites de contact.

Le sujet de l'endommagement est extrêmement important dans les conceptions en ingénierie puisqu'il influence directement sur la vie usuelle de la structure ou la composante conçue. Il existe une littérature très riche sur ce sujet. Les modèles prenant en considération

l'influence de l'endommagement interne du matériau sur le processus de contact ont été étudiées mathématiquement. L'analyse mathématique de problèmes unidimensionnels peut être trouvée dans [24]. Les premiers modèles de l'endommagement mécanique provenant des considérations thermodynamiques sont apparus dans [20]. Des modèles généraux récents dans [22, 21, 25, 32, 37] sont issus du principe de la puissance virtuelle. Dans tous ces travaux, l'endommagement du matériau est décrit par une fonction β ayant des valeurs entre zéro et un. Lorsque $\beta = 1$, il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, lorsque $\beta = 0$, le matériau est complètement endommagé et lorsque $0 < \beta < 1$, il y a un endommagement partiel et le système a une capacité réduite. Certains problèmes en thermo-mécanique de contact avec endommagement ont été étudiés dans [7, 12, 13, 31, 33, 34, 43].

Quant à l'usure, elle est l'une des principales cibles de la tribologie, cet effet est défini comme un processus de perte progressive de la matière des surfaces opérées des solides résultant de leur interaction de contact, par conséquent les dimensions du corps et sa masse diminuent par l'usure. Il peut y avoir plusieurs causes, tout d'abord, elle est provoquée par les ruptures du matériau sous des contraintes dans la processus de frottement, ou par les réactions chimiques et des processus électrochimiques. Alors l'étude des modèles qui introduisent l'usure a pour but, la réduction de l'énergie dans les processus de frottement et aussi les pertes de la matière dûes à l'usure d'une part, et à l'augmentation de la durée de vie des compasantes et des pièces industrielles, d'autre part l'étude des modèles efficaces pour la prédiction de l'usure dans les milieux industriels est indispensable à l'ingénieur concepteur. Les modèles utilisés très fréquemment sont basés sur les observations d'Archard [5] où l'usure est identifiée comme une augmentation de l'écart entre le corps et la fondation. L'inclusion de l'usure dans des modèles mathématiques est récente et peut être trouvée dans [3, 26, 29], comme il existe aussi une littérature abondante sur le sujet dans [30, 36, 38, 40, 47].

Les matériaux piézoélectriques sont extrêmement utilisés comme interrupteurs et actuateurs dans beaucoup de systèmes d'ingénierie, en radioélectronique, l'électroacoustique et la mesure des équipements. Ils sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique suite à une déformation mécanique et, inversement, une déformation mécanique est générée lorsqu'un potentiel électrique est appliqué.

Les matériaux piézoélectriques, pour lesquels les propriétés mécaniques sont viscoélastiques sont appelés "les matériaux électro-viscoélastiques" et ceux pour lesquelles les propriétés mécaniques sont élasto-viscoplastiques sont appelés "les matériaux électro-élasto-viscoplastiques". Des modèles généraux pour des matériaux électro-élastiques ayant un effet piézoélectrique peuvent être trouvés dans [11, 34, 49]. Un problème de contact avec "slip-dependent" pour les matériaux électro-élastiques a été étudié dans [44], un autre problème les matériaux électro-élasto-viscoplastiques a été étudié dans [27]. Des problèmes de contact sans frottement pour des matériaux électro-viscoélastiques ont été étudiés dans [6, 10, 16, 45] en prenant une fondation isolante.

Actuellement, un intérêt considérable est porté aux problèmes de contact avec frottement impliquant les matériaux piézoélectriques. Cependant, il n'existe virtuellement pas de résultats mathématiques à propos des problèmes de contact pour de tels matériaux et on a besoin de développer la théorie mathématique du contact mécanique (MTCM) pour inclure le couplage entre les propriétés mécaniques et électriques.

Un autre phénomène sera considéré dans cette thèse, il s'agit du phénomène de contact avec l'effet thermique. Les processus de contact et de frottement s'accompagnent invariablement d'une production de la chaleur qui peut être considérable. A titre d'exemple, le freinage brusque d'une voiture peut entraîner la dissipation d'une puissance importante sous forme de chaleur. L'effet thermique dans les processus de contact affecte la composition et la rigidité des surfaces et provoque des contraintes thermiques dans les corps en contact. La façon dont la chaleur affecte les propriétés mécaniques d'une surface peut être partiellement prise en compte (en supposant que le coefficient de frottement dépend de la température, voir [36]). Les modèles mathématiques en thermodynamique ont besoin de quatre éléments : la condition de production de la chaleur, la condition décrivant l'échange de la chaleur entre les corps et la fondation, la relation constitutive et l'équation de l'énergie. Ces modèles ont été développés récemment dans [4, 21, 26, 30, 46].

L'objectif de cette thèse est de proposer une contribution à l'étude de quelques problèmes aux limites en mécanique de contact. A cet effet nous considérons des différentes lois de comportement telles que : thermo-élasto-viscoplastiques, thermo-viscoélastiques et électro-viscoélastiques. Nous avons étudié des problèmes de contact avec frottement dans

un processus dynamique ou quasistatique avec des conditions aux limites, pour lesquelles nous couplons à la fois l'endommagement du matériau et l'usure ou l'endommagement et l'effet thermique ou électrique. Pour chacun de ces problèmes, nous donnons la formulation variationnelle, ensuite l'existence et l'unicité de la solution faible. Ce manuscrit comporte trois parties que nous décrivons brièvement.

Dans la première partie, le but est d'introduire les outils nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités. Cette partie est divisée en deux chapitres. Dans le premier chapitre, on présente les divers modèles mécaniques de contact étudiés, puis, on rappelle quelques lois de comportement et les conditions aux limites. Dans le deuxième chapitre, on indique les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées tout au long de la thèse. Enfin, on rappelle quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle concernant les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les équations et les inéquations variationnelles d'évolution paraboliques et les lemmes de Gronwall.

Dans la deuxième partie est divisée en deux chapitres consacrés à l'étude théorique de deux problèmes de contact pour des lois constitutives non linéaires électro-visco-élastique avec frottement dans un processus quasistatique ou dynamiques, le premier chapitre est consacré à l'étude mathématique dans un processus quasistatique d'un problème de contact entre un corps électro-visco-élastique et une fondation. Le contact est modélisé par une condition de Signorini et une condition électrique régularisée. Le frottement est formulé par une version de la loi de Coulomb. Nous dérivons une formulation variationnelle sous forme de système couplé en terme des champs de déplacement et du potentiel électrique. Aussi, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible pour le modèle. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de la publication [9], pour le deuxième chapitre, nous considérons un problème de contact dans le cas dynamique entre un corps électro-viscoélastique et une fondation électriquement conductrice. Le contact est modélisé par une condition modifiée de Signorini et une condition électrique régularisée. Le frottement est formulé par la loi de Coulomb. Nous dérivons une formulation variationnelle sous forme de système couplé en termes de champs de déplacement et du potentiel électrique. Aussi nous établissons un résultat d'existence d'une solution faible pour le modèle. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de la publication [8].

Dans la troisième partie divisée en deux chapitres, nous présentons deux problèmes dynamiques de contact pour des lois constitutives non linéaires thermoviscoélastiques avec mémoire longue et thermo-élasto-viscoplastiques avec endommagement, sous diverses lois de contact, étudiées dans deux chapitres séparés.

Dans le premier chapitre, on s'intéresse à l'étude un problème thermodynamique d'un corps viscoélastique avec mémoire longue. Le contact est bilatéral avec frottement. Nous écrivons le problème mécanique et nous précisons les hypothèses adéquates sur les données afin d'obtenir la formulation variationnelle. Ensuite nous établissons notre résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. La démonstration est basée sur un théorème d'existence et d'unicité de la solution des équations d'évolution de premier ordre linéaires et non linéaires suivi d'un argument de point fixe. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un problème modélisé par des conditions aux limites de contact avec frottement des matériaux thermo-élasto-viscoplastiques avec endommagement dans un processus dynamique. Le contact bilatéral avec frottement sur une base rigide et mobile se fait avec usure. Le problème se formule comme un système formé par des inéquations d'évolution non linéaires de premier ordre, une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement et une équation variationnelle parabolique par rapport au champ de température, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution du problème mathématique. Après avoir donné les hypothèses sur les données, on établit la formulation variationnelle de ce problème. Les preuves sont basées sur les résultats classiques des inéquations d'évolution non linéaires de premier ordre, équations et inéquations variationnelles paraboliques et des arguments du point fixe.

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω ,
Γ	la frontière de Ω supposée régulière,
$\text{mes } \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_1 ,
$\Gamma_i (i = \overline{1, 3})$	une partie mesurable de Γ ,
ν	la normale unitaire sortante à Γ ,
v_ν, v_τ	les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel v ,
σ_ν, σ_τ	les composantes normales et tangentielles du champ tensoriel σ ,
$C^1(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles continument différentiables sur Ω ,
H	l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega)^d$,
$\mathcal{H}$	l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega)_s^{d \times d}$,
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$,
$\mathcal{H}_1$	l'espace $\{\sigma \in \mathcal{H} / \text{Div} \sigma = (\partial_j \sigma_{ij}) \in H\}$,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ ,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$,
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si X est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes

$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire de X ,
$(\cdot, \cdot)_{X' \times X}$	le produit de dualité entre X' et X ,
$ \cdot _X$	la norme de X ,
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans X ,
$x_n \rightarrow x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans X .

Si de plus $[0, T]$ est un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C(0, T; H)$	l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H ,
$C^1(0, T; H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
$\mathbb{L}^p(0, T; H)$	l'espace des fonctions fortement mesurables sur $[0, T]$ dans H ,
$ \cdot _{\mathbb{L}^p(0, T; H)}$	la norme de $\mathbb{L}^p(0, T; H)$,
$W^{k,p}(0, T; H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p ,
$ \cdot _{W^{k,p}(0, T; H)}$	la norme de $W^{k,p}(0, T; H)$,

Pour une fonction f ; on note par

$\dot{f}, \ddot{f}$	les dérivées première et seconde de f par rapport au temps,
$\text{dom } f$	le domaine de f ;
$\text{supp } f$	le support de f ,
$\partial_i f, f_{,i}$	la dérivée partielle de f par rapport à la i ème composante x_i ,
∇f	le gradient de f ,
$\text{Div } \sigma$	la divergence de tenseur σ ,
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de f ,
∂f	le sous différentiel de f ,
$\text{div } f$	la divergence de vecteur f .

Autre notations

$\liminf$	la limite inférieure,
$\limsup$	la limite supérieure,
$D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact,
$D(\Omega)^d$	$\{\varphi = (\varphi_i), \varphi_i \in D(\Omega), i = \overline{1, d}\},$
$C_0^\infty(\Omega)^d$	$\{f \in C^\infty(\Omega)^d, f = 0 \text{ sur } \Gamma\},$
$\mathbb{S}^d$	espace des tenseurs d'ordre deux symétriques sur $\mathbb{R}^d$ c'est à dire $\mathbb{S}^d = \mathbb{R}_s^{d \times d},$
"."	le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d,$
" ."	la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d,$
C	une constante générique strictement positive,
Λ^n	puissance n de l'opérateur $\Lambda,$
$p.p.$	presque partout,
χ_K	fonction indicatrice de $K.$

Première partie

Modélisation et Outils

Mathématiques

Partie I

Modélisation et Outils Mathématiques

Afin de faciliter la lecture de cette thèse, il nous est paru nécessaire de présenter dans la première partie les cadres physiques et fonctionnels dans lesquels on va travailler. Cette partie est divisée en deux chapitres. Dans le premier chapitre, nous précisons d'abord les cadres physiques et les modèles mathématiques correspondants utilisés dans cette thèse, ensuite nous décrivons les lois de comportement, les conditions de contact et les différentes lois de frottement qui interviennent dans tout le document.

Dans le deuxième chapitre, après un bref rappel de la mécanique des milieux continus, nous introduisons quelques préliminaires mathématiques qui seront utilisés partout dans cette thèse. Nous commençons d'abord par les espaces de type Sobolev associés aux opérateurs divergence et déformation utilisés en mécanique, ainsi que leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. Nous rappelons ensuite les propriétés des espaces des fonctions à valeurs vectorielles et les espaces liés à l'effet piézoélectrique. Enfin, nous énonçons quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert, quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution.

Chapitre 1

Modélisation

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus où nous allons introduire les cadres physiques utilisés dans cette thèse ; il est destiné à rappeler l'équation d'équilibre et l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement électro-viscoélastiques, thermo-viscoélastiques, thermo-élasto-viscoplastiques et par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact.

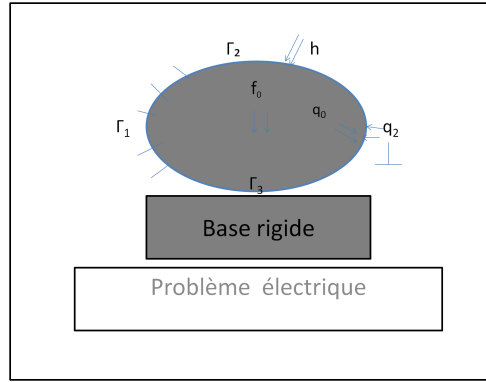
1.1 Cadres physiques - Modèles mathématiques

Dans cette section nous allons introduire les deux cadres physiques et les modèles mathématiques des problèmes mécaniques intervenant dans cette thèse.

Cadre physique n°1. Nous envisageons un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2; 3)$ avec une surface régulière Γ , partitionnée en trois parties mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a et Γ_b , correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, $\text{mes } \Gamma_a > 0$ et $\Gamma_3 \subset \Gamma_b$. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité h et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 et des charges électriques de densité volumiques q_0 (voir figure 1.1). On suppose que h et f_0 varient très lentement par rapport au temps. Le milieu est soumis à l'action de potentiel fixé q_0 sur la partie Γ_a de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2 , agissant

sur la partie Γ_b . Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps. Le corps est en contact avec frottement avec une fondation conductive (ou isolatrice) sur la partie Γ_3 .

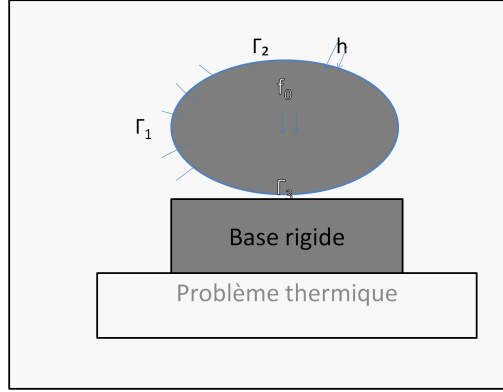
On étudie l'évolution de ces propriétés dans l'intervalle de temps $[0, T]$, sous l'hypothèse des petites transformations. Les hypothèses physiques introduites pour la piézoélectricité consistent à négliger les effets magnétiques et thermiques et à considérer l'interaction électromécanique uniquement. Cette hypothèse est raisonnable pour les matériaux piézoélectriques utilisés habituellement comme les céramiques, les polymères et les piézo-composites. Nous utiliserons ce cadre physique dans la deuxième partie de cette thèse.



Figure(1 .1)

Cadre physique n°2. Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2; 3$) avec une surface frontière régulière Γ , partitionnée en trois parties mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , tel que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$. Nous notons par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité h et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 et d'une source de chaleur externe donnée par la fonction q (voir figure 1.2). On suppose que h et f_0 varient très lentement par rapport au temps. Soient $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps. Le corps est en contact avec ou sans frottement avec un obstacle déformable ou lubrifié sur la partie Γ_3 . Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps. Notre objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps, sous l'hypothèse des petites transformations. Nous utiliserons ce cadre physique dans la troisième partie de la

thèse.



Figure(1.2)

Avant d'aborder les modèles mathématiques qui correspondent au cadre physique présenté, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de cette thèse. Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ ($d = 2; 3$) l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}$. $(.,.)$ et $|\cdot|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} u.v &= u_i v_i, & |v| &= (v, v)^{\frac{1}{2}}, & \forall u, v \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma.\tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & |\tau| &= (\tau, \tau)^{\frac{1}{2}}, & \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

avec la convention de l'indice muet. Pour un vecteur v , nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ . Nous notons par v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle de v sur la frontière données par

$$v_\nu = v.\nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu. \quad (1.1.1)$$

Nous désignons par $\sigma = \sigma(x, t)$ le champ des contraintes, par $u = u(x, t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(u)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \bar{\Omega}$ et $t \in [0, T]$.

Pour un champ des contraintes σ nous dénotons par σ_ν et σ_τ les composantes normale et tangentielle à la frontière donnée par

$$\sigma_\nu = (\sigma \nu) . \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu. \quad (1.1.2)$$

En utilisant (1.1.1) et (1.1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma\nu) \cdot v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau v_\tau, \quad (1.1.3)$$

qui va intervenir tout au long de cette thèse, dans l'établissement des formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact.

En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2},$$

où $\dot{u}$ désigne le champ des vitesses et $\ddot{u}$ désigne le champ des accélérations. Pour le champ des vitesses $\dot{u}$ les notations $\dot{u}_\nu$ et $\dot{u}_\tau$ représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle à la frontière, c'est-à-dire

$$\dot{u}_\nu = \dot{u} \cdot \nu, \quad \dot{u}_\tau = \dot{u} - \dot{u}_\nu \nu.$$

Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{où } u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (1.1.4)$$

Notons qu'ici et tout au long de la thèse, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante à la variable spatiale. Passons maintenant à la description des modèles mathématiques associées aux cadres physiques ci-dessus.

Modèle mathématique n°1. Le premier modèle mathématique étudié dans cette thèse, décrit l'évolution du corps dans le cadre physique n°2. Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes

$$\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ et le champ de température } \theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de Cauchy.

$$Div\sigma + f_0 = \rho\ddot{u}, \text{ dans } \Omega \times [0, T], \quad (1.1.5)$$

où : $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la masse volumique ; ici "Div" représente l'opérateur divergence pour les tenseurs, $Div \sigma = (\sigma_{ij,j})$. Le processus d'évolution défini par (1.1.5) s'appelle processus dynamique. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho\ddot{u}$ peut être négligé. Dans ce cas, le processus s'appelle quasistatique et l'équation (1.1.5) s'appelle l'équation d'équilibre et devient

$$Div \sigma + f_0 = 0, \text{ dans } \Omega \times [0, T]. \quad (1.1.6)$$

Puisque le corps est encastré sur Γ_1 , le champ des déplacements s'annule

$$u = 0, \text{ sur } \Gamma_1 \times [0, T]. \quad (1.1.7)$$

La condition aux limites de traction est

$$\sigma_\nu = h, \text{ sur } \Gamma_2 \times [0, T]. \quad (1.1.8)$$

Nous allons compléter ultérieurement le modèle mathématique (1.1.5), (1.1.7) – (1.1.8) par les conditions de contact sur la partie Γ_3 de la frontière.

Modèle mathématique n°2. Ce modèle mathématique décrit l'évolution du corps dans le cadre physique n°1. C'est un modèle électro-mécanique. Les inconnues mécaniques du problème sont le champ des déplacements u , le champ des contraintes σ satisfaisant les égalités (1.1.7) – (1.1.8). A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir le champ de déplacements électriques $D : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le potentiel électrique

$\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques.

$$\text{div } D = q_0, \text{ dans } \Omega \times [0, T], \quad (1.1.9)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\text{div} D = (D_{i,i})$ et q_0 représente la densité des charges électriques volumiques. Rappelons que dans le cadre physique n°1, le potentiel électrique s'annule sur la partie Γ_a de la frontière

$$\varphi = 0, \text{ sur } \Gamma_a \times [0, T], \quad (1.1.10)$$

tandis que sur Γ_b , une charge électrique de densité q_2 est prescrite,

$$D\nu = q_2, \text{ sur } \Gamma_b \times [0, T]. \quad (1.1.11)$$

Ce modèle piézoélectrique (1.1.5) – (1.1.11) sera complété ultérieurement par les conditions aux limites sur la surface de contact Γ_3 .

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui même, c'est l'objet des lois de comportement que nous décrirons dans le deuxième paragraphe de ce chapitre.

1.2 Lois de comportement

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes σ et le tenseur des déformations ε et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation. Dans la description des phénomènes purement mécanique, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ , le tenseur des déformations infinitésimales ε et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$.

Lois de comportement visco-élastiques.

le corps suit une loi de comportement de Kelvin-Voigt de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u), \quad (1.2.1)$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}$ sont des fonctions constitutives non linéaires, tel que $\mathcal{A}$ représente l'opérateur de viscosité et $\mathcal{G}$ est l'opérateur d'élasticité.

Pour un corps élastique, la loi se réduit à

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(u)). \quad (1.2.2)$$

On rappelle qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contrainte $\sigma = (\sigma_{ij})$ est donné par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{u}) + g_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u),$$

où $\mathcal{A} = (a_{ijkl})$ est le tenseur de viscosité et $\mathcal{G} = (g_{ijkl})$ est le tenseur d'élasticité, pour $i, j, k, l = 1, \dots, d$.

Dans le cas viscoélastique avec mémoire longue, le corps suit une loi de comportement de *Kelvin – Voigt* de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) + \mathcal{G}\varepsilon(\dot{u}) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u(s))ds, \quad (1.2.3)$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}$ sont des fonctions constitutives non linéaires. $\mathcal{G}$ représente l'opérateur de viscosité et $\mathcal{A}$ désigne l'opérateur d'élasticité. Ici $\mathcal{B}$ est le tenseur de relaxation d'ordre quatre qui définit le comportement du matériau avec mémoire longue

lorsque $\mathcal{B} \cong 0$ on retrouve la viscoélasticité de la mémoire courte

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) + \mathcal{G}\varepsilon(\dot{u}) \quad (1.2.4)$$

Lois de comportement visco-plastiques

Pour les matériaux viscoplastiques, la loi de comportement est de la forme

$$\dot{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + G(\sigma, \varepsilon), \quad (1.2.5)$$

où $\mathcal{A}$ représente l'opérateur de viscosité et G est l'opérateur de plasticité.

Lois de comportement élasto-viscoplastique

La loi de comportement élasto-viscoplastique peut être écrite sous la forme

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s))) ds, \quad (1.2.6)$$

où les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des tenseur d'ordre quatre et non linéaires; leurs composantes a_{ijkl} et b_{ijkl} s'appellent coefficients de viscosité et élasticité respectivement et $\mathcal{G}$

représente une fonction constitutive non linéaire qui décrit le comportement viscoplastique du matériau.

Cette loi modifie légèrement la description des phénomènes thermo-mécaniques ou électromécaniques car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de température θ , le champ de déplacements électriques $D = (D_i)$ ainsi que le champ électrique

$E(\varphi) = -\nabla\varphi = -(\varphi_{,i})$. Nous présentons par la suite les lois de comportement qui interviennent dans cette thèse, elles correspondent à trois catégories particulières de matériaux : matériaux électro-viscoélastiques, matériaux thermo-viscoélastiques et matériaux thermo-élasto-viscoplastiques,

Lois de comportement électro-viscoélastique

Les matériaux piézoélectriques sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique lors de l'application des contraintes mécaniques, et inversement, des contraintes mécaniques sont générées lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Un matériau piézoélectrique dont les propriétés mécaniques sont viscoélastiques est appelé matériau électro-viscoélastique et pour la contrainte on a $\sigma = \sigma^{ve} + \sigma^{el}$, où σ^{ve} et σ^{el} sont respectivement les parties viscoélastiques et électriques de la contrainte, telles que σ^{ve} définie par (1.2.1) et $\sigma^{el} = -\xi^* E(\varphi)$.

A partir de la loi (1.2.1), nous obtenons une loi de comportement électro-viscoélastique comme suit

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) - \xi^* E(\varphi), & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ D = \beta E(\varphi) + \xi\varepsilon(u), & \text{dans } \Omega \times [0, T], \end{cases} \quad (1.2.7)$$

dans laquelle les opérateurs $\mathcal{A}, \mathcal{G}$, sont définis ci-dessus, ξ le tenseur piézoélectrique, β représente le tenseur de la primitivité électrique.

Nous utiliserons la loi de comportement (1.2.7) dans la deuxième partie de cette thèse.

Lois de comportement thermo-viscoélastique avec mémoire longue

Si nous prenons en considération l'effet thermique du matériau durant le contact, nous arrivons à une généralisation de la loi (1.2.3), qui est une loi de comportement thermo-visco-élastique avec mémoire longue ayant la forme

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(u(t))) + \mathcal{G}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u(s))ds - \theta(t)\mathcal{M}. \text{ dans } \Omega \times [0, T], \quad (1.2.8)$$

La température θ est définie par une équation différentielle, qui représente la conservation de l'énergie comme suit

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(K\nabla\theta) = -\mathcal{M}.\nabla\dot{u} + q, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (1.2.9)$$

où $q(x, t)$ est la quantité de chaleur dans le volume Ω durant l'intervalle de temps où $K = (k_{ij})$ représente le tenseur de conductivité thermique, $\operatorname{div}(K\nabla\theta) = (k_{ij}\theta_{,i})$ représente la densité du volume de la source température et $\mathcal{M}$ est un opérateur de dilatation thermique. Nous utiliserons la loi de comportement (1.2.8) dans le chapitre 5 de cette thèse.

Ici et ci-dessous, K_1 et K_0 sont des constantes strictement positives, qui représente les coefficients de diffusion microfissuré, $\partial\varphi_K$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice φ_K et S est une fonction constitutive donnée ; qui représente la source de l'endommagement dans le système.

Lois thermo-élasto-viscoplastiques avec endommagement

Parmi les lois thermo-élasto-viscoplastiques avec endommagement, une loi de comportement qui est même une généralisation de la loi (1.2.6), et peut être écrite sous la forme

$$\sigma(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(s))), \varepsilon(u(s)), \theta(s)) ds. \quad (1.2.10)$$

L'évolution du champ de température θ est régie par l'équation de la chaleur, obtenue à partir de la conservation de l'énergie et définie par l'équation parabolique suivante

$$\dot{\theta} - K_0\Delta\theta = \psi(\sigma, \varepsilon(\dot{u}), \theta) + q, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (1.2.11)$$

où ψ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures et $q(x, t)$ est la quantité de chaleur dans le volume Ω durant l'intervalle de temps.

L'endommagement β est une variable interne causé par déformation viscoplastique, l'inclusion différentielle suivante sera utilisée pour décrire l'évolution du champ d'endommagement

$$\dot{\beta} - K_1 \Delta \beta + \partial \varphi_K(\beta) \ni S(\varepsilon(u), \beta), \text{ dans } \Omega \times [0, T], \quad (1.2.12)$$

Nous utiliserons la loi de comportement (1.2.10) dans le chapitre 6 de cette thèse.

Finalement, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur Γ_3 . D'ailleurs nous décrivons dans ce qui suit les conditions de contact et lois avec ou sans frottement.

1.3 Conditions aux limites de contact et lois de frottement

Les conditions aux limites sur la surface de contact sont décrites à la fois en direction de la normale et dans le plan tangent, ces dernières étant appelées condition de frottement. En direction de la normale nous pouvons distinguer le contact unilatéral (lorsque l'obstacle est rigide), bilatéral (lorsqu'il n'y a pas de séparation entre le corps et l'obstacle), de compliance normale (lorsque l'obstacle est déformable) ou bien de réponse normale instantanée (lorsque la surface de contact est lubrifiée). A part le cas limite lorsque la contrainte tangentielle est nulle (le cas sans frottement), le frottement peut être à seuil (quand le glissement se produit lorsque la force de frottement atteint une valeur critique) ou sans seuil (lorsque le glissement se produit pour n'importe quelle force de frottement). Les lois de frottement à seuil, les plus utilisées dans la littérature sont celles de Coulomb ; elles modélisent un frottement sec, alors que les lois de frottement sans seuil modélisent un frottement lubrifié.

On définit maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ .

- Les conditions aux limites mécaniques (déplacement-traction).

$$u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (1.3.1)$$

Sa signification consiste à ce que le champ des déplacements est imposé sur la partie Γ_1 de la frontière Γ (le corps est encastré par la partie Γ_1).

$$\sigma_\nu = h, \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T]. \quad (1.3.2)$$

Elle signifie que le vecteur des contraintes de Cauchy σ_ν est imposé sur la partie Γ_2 de la frontière Γ , h représentant la densité des forces appliquées sur la surface et constituant une donnée du problème.

Enfin, le corps est éventuellement en contact avec une fondation sur $\Gamma_3 \times [0, T]$. C'est ici que commence toute la richesse des problèmes et que réside notre intérêt, car les conditions sur la surface potentielle de contact Γ_3 peuvent être très diverses et donner ainsi lieu à une variété de modèles de contact avec ou sans frottement.

- Les conditions aux limites électriques

$$\varphi = 0, \quad \text{sur } \Gamma_a \times [0, T]. \quad (1.3.3)$$

Sa signification consiste à ce qu'un champ potentiel électrique est imposé sur la partie Γ_a de la frontière Γ .

$$D_\nu = q_2, \quad \text{sur } \Gamma_b \times [0, T]. \quad (1.3.4)$$

Elle signifie que le vecteur de déplacements électriques D_ν est imposé sur la partie Γ_b de la frontière Γ , q_2 représentant la densité surfacique appliquée sur la surface et constituant une donnée du problème.

Nous citons ici les principales lois de frottement

-Lois de contact bilatéral

On suppose que le contact entre le corps et la fondation se produit avec frottement bilatéral c'est-à-dire le contact est maintenu pendant le mouvement. Cette propriété se traduit mathématiquement par

$$u_\nu = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.3.5)$$

-Lois de contact de Signorini

On dit que le contact entre le corps et une base rigide est sans frottement, si les mouvements tangentiels sont libres, ce qui se traduit par

$$\sigma_\tau = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.3.6)$$

Puisque la base est rigide, elle ne subira donc pas de déformations. Le corps ne pourra donc pas y pénétrer. Cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité suivante

$$u_\nu = u \cdot \nu \leq 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.3.7)$$

Aux points de Γ_3 tels que $u_\nu < 0$, le corps déformable quitte la base rigide. Les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent, on a

$$u_\nu < 0 \implies \sigma_\nu = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.3.8)$$

Aux points de Γ_3 tels que $u_\nu = 0$, on suppose que la base rigide exerce une réaction inconnue suivant la direction de la normale et orientée vers Ω . On a

$$u_\nu = 0 \implies \sigma_\nu \leq 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.3.9)$$

Pour résumer, les conditions de contact (1.3.6) – (1.3.9) s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.3.10)$$

Les conditions aux limites de contact de la forme (1.3.10) sont aussi appelées conditions de contact de Signorini.

Les conditions de contact de Signorini (1.3.10) modélisent le contact d'un corps déformable avec une base rigide. On peut envisager donc des conditions de contact d'un corps déformable avec une base déformable.

-Lois de frottement de type Coulomb

C'est une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique.

Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de glissement et peut s'énoncer comme suit

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq \mu |\sigma_\nu|, \\ |\sigma_\tau| < \mu |\sigma_\nu| \implies u_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau| = \mu |\sigma_\nu| \implies \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau, \end{cases} \quad (1.3.11)$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement.

La loi de Coulomb est souvent utilisée pour les corps rigides ou élastiques. On remarque également qu'il s'agit d'une loi de seuil. Tant que le seuil n'est pas atteint, il n'y a pas de glissement. Ce seuil est variable et dépend de la contrainte normale ce qui représente une difficulté majeure pour l'étude mathématique de cette loi de frottement.

Loi de Coulomb non locale généralisée

Finalement, on présente la loi de frottement qui généralise la loi précédente. Soit l'opérateur R une régularisante normale, c'est à dire un opérateur linéaire continu

$R : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Gamma)$. La régularisante R est introduite pour des raisons techniques car la trace du tenseur des contraintes sur la frontière est très irrégulière. Cette loi s'énonce comme suit

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq \mu p(|R\sigma_\nu|), \\ |\sigma_\tau| < \mu p(|R\sigma_\nu|) \implies u_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau| = \mu p(|R\sigma_\nu|) \implies \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau, \end{cases} \quad (1.3.12)$$

où $p : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est le seuil de frottement vérifiant les conditions suivantes

$$\begin{cases} (a) : \text{il existe } M > 0 \text{ tel que : } |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq M |r_1 - r_2| \\ \text{pour tout } r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, p.p \ x \in \Gamma_3, \\ (b) : \text{L'application : } x \rightarrow p(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}_+, \\ (c) : p(x, 0) = 0, p.p \ x \in \Gamma_3. \end{cases} \quad (1.3.13)$$

La présence de l'opérateur R dans (1.3.12) nous conduit à appeler (1.3.12) loi de frottement non local.

1.4 Conditions aux limites de contact bilatéral avec frottement et usure

Introduisons la fonction d'usure $\omega : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui mesure l'usure de la surface. L'usure est identifiée comme étant la profondeur normale de la matière qui est perdue. Puisque le corps est en contact bilatéral avec la fondation, il en résulte que

$$u_\nu = -\omega, \text{ sur } \Gamma_3. \quad (1.4.1)$$

Ainsi, l'emplacement du contact évolue avec l'usure. Nous rappelons que l'effet de l'usure est la récession sur Γ_3 , il est normal de prévoir que $u_\nu \leq 0$ sur Γ_3 , ce qui implique $\omega \geq 0$ sur Γ_3 .

L'évolution de l'usure de la surface de contact est régie par une version simplifiée de la loi d'Archard (Voir [47]). Nous décrivons maintenant la forme du taux de la loi d'Archard est

$$\dot{\omega} = -k\sigma_\nu |\dot{u}_\tau - v^*|,$$

où $k > 0$ est le coefficient d'usure, v^* est la vitesse tangentielle de la fondation et $|\dot{u}_\tau - v^*|$ représente la vitesse de glissement entre la surface de contact et la fondation.

On voit que l'évolution d'usure est supposée être proportionnelle à la contrainte de contact et la vitesse de glissement. Par souci de simplicité, nous supposons dans le reste de la section que le mouvement de la fondation est uniforme, c-à-d, v^* ne varie pas dans le temps. Notons $v^* = |v^*| > 0$.

Nous supposons que v^* est grande pour pouvoir négliger dans la suite $\dot{u}_\tau$ par rapport à v^* afin d'obtenir la version suivante de la loi d'Archard

$$\dot{\omega} = -kv^*\sigma_\nu. \quad (1.4.2)$$

L'utilisation de la loi simplifiée (1.4.2) pour l'évolution de l'usure permet d'éviter certaines difficultés mathématiques dans l'étude des problèmes de contact. Nous pouvons maintenant éliminer la fonction inconnue ω du problème. De cette manière, le problème étant découplé, et une fois que la solution du problème de contact de frottement a été obtenue,

l'usure de la surface peut être obtenue par intégration de (1.4.2). Soient $\zeta = kv^*$ et $\alpha = \frac{1}{\zeta}$. En utilisant (1.4.1) et (1.4.2) nous avons

$$\sigma_\nu = \alpha \dot{u}_\nu. \quad (1.4.3)$$

Nous modélisons le contact de frottement entre le corps et la fondation avec la loi de Coulomb de frottement sec. Puisqu'il n'y a qu'un contact glissant, donc

$$|\sigma_\tau| = \mu |\sigma_\nu|, \quad \sigma_\tau = -\lambda (\dot{u}_\tau - v^*), \quad \lambda \geq 0, \quad (1.4.4)$$

où $\mu > 0$ est le coefficient de frottement. Ces relations définissent l'évolution des contraintes, en particulier la contrainte tangentielle. Celle-ci est dans le sens opposé à la vitesse de glissement relative $|\dot{u}_\tau - v^*|$.

Naturellement, l'usure augmente dans le temps, c-à-d : $\dot{\omega} \geq 0$. Par conséquent, il résulte de (1.4.1) et (1.4.2) que $\dot{u}_\nu \leq 0$ et $\sigma_\nu \leq 0$ sur Γ_3 . Alors les conditions (1.4.3) et (1.4.4) impliquent

$$-\sigma_\nu = \alpha |\dot{u}_\nu|, \quad |\sigma_\tau| = -\mu \sigma_\nu, \quad \sigma_\tau = -\lambda (\dot{u}_\tau - v^*), \quad \lambda \geq 0. \quad (1.4.5)$$

1.5 Conditions thermiques

La condition au bord associée à la température dérivée de la condition de Fourier

$$-k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \nu_j = k_e (\theta - \theta_R) - h_\tau (|\dot{u}_\tau|), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.5.1)$$

$$\theta = 0, \quad \text{dans } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times [0, T], \quad (1.5.2)$$

où θ_R est la température de fondation, k_e représente l'échange de la température entre le corps déformable et la fondation, h_τ la fonction tangentielle. (1.5.2) est la condition aux limites de la température sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

On considère également les conditions

$$k_0 \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + B\theta = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T], \quad (1.5.3)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T], \quad (1.5.4)$$

où (1.5.3) représente une condition à la limite de Fourier pour la température et (1.5.4) représente une condition à la limite de Neumann homogène pour le domaine de l'endommagement sur Γ . où $\frac{\partial \beta}{\partial \nu}$ représente la dérivée normale de β

Chapitre 2

Outils Mathématiques

Dans ce chapitre, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans cette thèse, et donnons quelques propriétés nécessaires pour l'élaboration de ce travail. Partout dans ce chapitre Ω est un domaine borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^d (d = 2; 3)$, avec une frontière Γ régulière et de Lipschitz. Par ailleurs, nous considérons deux décompositions de Γ , $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ et $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$ avec $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, i \neq j$ telle que $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_a$ et Γ_b sont mesurables et $\text{mes } \Gamma_1 > 0, \text{mes } \Gamma_b > 0$.

2.1 Espaces de Sobolev

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ tel que } \partial_i u \in \mathbb{L}^2(\Omega), i = 1, \dots, d\}.$$

D'abord, on note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in \mathbb{L}^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

et la norme associée

$$|u|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \text{ et on écrit } |u|_{H^1(\Omega)}^2 = |u|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + |\nabla u|_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants

$$C^1(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 2.1.1. (Rellich)

$$H^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Théorème 2.1.2. (Trace de Sobolev) Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Gamma)$ telle que $\gamma u = u|_{\Gamma}$ pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$

Remarque 2.1.1. l'espace $\mathbb{L}^2(\Gamma)$ ci-dessus représente l'espace des fonctions réelles sur Γ qui sont $\mathbb{L}^2$ pour la mesure superficielle $d\Gamma$. L'application γ s'appelle application trace ; elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

On note que l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques u et σ

$$\begin{aligned} H &= \{u = (u_i) \text{ tel que } u_i \in \mathbb{L}^2(\Omega)\} = (\mathbb{L}^2(\Omega))^d, \\ \mathcal{H} &= \{\sigma = (\sigma_{ij}) \text{ tel que } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \mathbb{L}^2(\Omega)\} = (\mathbb{L}^2(\Omega))_s^{d \times d}, \\ H_1 &= \{u = (u_i) \text{ tel que } u_i \in H^1(\Omega)\} = H^1(\Omega)^d, \\ \mathcal{H}_1 &= \{\sigma \in \mathcal{H} \text{ tel que } \sigma_{ij,j} \in H\}. \end{aligned}$$

Les espaces H , $\mathcal{H}$, H_1 et $\mathcal{H}_1$ sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés respectivement par

$$\begin{aligned} (u, v)_H &= \int_{\Omega} u_i \cdot v_i dx, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot \tau_{ij} dx, \\ (u, v)_{H_1} &= (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} &= (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, Div \tau)_H, \end{aligned}$$

où $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ et $Div : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Soit X un espace de Banach, nous désignons par $|\cdot|_X$ la norme associée, en particulier les normes associées aux espaces H , $\mathcal{H}$, H_1 et $\mathcal{H}_1$

Puisque la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini *p.p.* Pour tout champ de vecteurs $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ . Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par H_Γ , ce sous-espace s'injecte continûment dans $\mathbb{L}^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_Γ le dual de H_Γ , et $(\cdot, \cdot)$ le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ . Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, il existe un élément $\sigma\nu \in H'_\Gamma$ tel que

$$(\sigma\nu, \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H, \quad \forall v \in H_1.$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\sigma\nu, \gamma v) = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot v da, \quad \forall v \in H_1.$$

Donc, pour σ assez régulier nous avons la formule suivante (Formule de Green)

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot v da, \quad \forall v \in H_1. \quad (2.1.1)$$

Nous définissons les sous-espaces fermés de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et H^1

$$Y = \{v \in \mathbb{L}^2(\Omega) / \varepsilon_{ij}(v) \in \mathbb{L}^2(\Omega)\} = H^1(\Omega) \quad V = \{v \in H_1 \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

Puisque $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V , alors, il existe une constante $C_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq C_K |v|_{H_1}, \quad \forall v \in H_1.$$

Nous considérons sur l'espace V , le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad \forall u, v \in V, \quad (2.1.2)$$

et soit $|\cdot|_V$ la norme associée, i.e.

$$|v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \text{ , } \forall v \in V . \quad (2.1.3)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $|\cdot|_{H_1}$ et $|\cdot|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, |\cdot|_V)$ est un espace de Hilbert. En outre, par le théorème de trace de Sobolev il existe une constante C_0 dépendant uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que

$$|v|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 |v|_V \text{ , } \forall v \in V . \quad (2.1.4)$$

De plus, on note par V' l'espace dual de V et par Y' celui de Y . Nous utilisons les notations $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ et $(\cdot, \cdot)_{Y' \times Y}$ pour représenter la dualité entre V', V et Y', Y respectivement.

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev associés aux inconnues électriques (champ du déplacement électrique D et le potentiel électrique φ) des problèmes électro-mécaniques qui vont être introduits dans la deuxième partie de la thèse.

Soient les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{D = (D_i) \mid D_i \in \mathbb{L}^2(\Omega), \operatorname{div} D \in \mathbb{L}^2(\Omega)\} , \\ W &= \{\zeta \in H^1(\Omega) \mid \zeta = 0 \text{ sur } \Gamma_a\} , \end{aligned}$$

où $\operatorname{div} D = (D_{i,i})$: Ces espaces $\mathcal{W}$ et W sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés par

$$\begin{aligned} (D, E)_{\mathcal{W}} &= (D, E)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} D, \operatorname{div} E)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} , \\ (\varphi, \phi)_W &= (\nabla \varphi, \nabla \phi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} , \end{aligned}$$

et leurs normes associées $|\cdot|_{\mathcal{W}}$ et $|\cdot|_W$, respectivement.

$$|D|_{\mathcal{W}}^2 = |D|_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}^2 + |\operatorname{div} D|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 , \quad |\varphi|_W = |\nabla \varphi|_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}$$

Puisque $\operatorname{mes}(\Gamma_a) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est satisfaite, ainsi,

$$|\nabla \xi|_{\mathcal{W}} \leq c_F |\xi|_{H^1(\Omega)} \text{ , } \forall \xi \in W , \quad (2.1.5)$$

où $C_F > 0$ est une constante qui dépend uniquement de Ω et Γ_a et $\nabla \xi = (\xi_{,i})$.

Il s'ensuit de (2.1.5) que $|\cdot|_{H_1(\Omega)}$ et $|\cdot|_W$ sont des normes équivalentes sur W et donc $(W, |\cdot|_W)$ est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $\tilde{c}_0$ dépendant uniquement de Ω , Γ_a et Γ_3 telle que

$$|\xi|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0 |\xi|_W, \quad \forall \xi \in W. \quad (2.1.6)$$

Aussi, rappelons que lorsque $D \in \mathbb{L}^2(\Omega)^d$ est une fonction régulière, la formule de Green (2.1.1) est satisfaite

$$(D, \nabla \xi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} D, \xi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D\nu \cdot \xi da, \quad \forall \xi \in H^1(\Omega). \quad (2.1.7)$$

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le lecteur par exemple à [1, 10, 19].

2.2 Triplet de Gelfand

Dans cette section nous rappelons la définition d'un triplet de Gelfand. Pour cela on va commencer par un rappel sur le théorème de représentation de Riesz-Fréchet

Théorème 2.2.1. Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\varphi \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que

$$(\varphi, v)_{H' \times H} = (f, v)_H, \quad \forall v \in H.$$

On a de plus

$$|\varphi|_{H'} = |f|_H.$$

Preuve. Pour une démonstration, voir ([14], page 81 – 82).

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\varphi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

Soit maintenant H un espace de Hilbert réel tel que V dense dans H et l'injection

$V \subset H$ est continue. On identifie H et H' . Soit V' le dual de V . On peut alors prolonger H dans V' grâce au procédé suivant : étant donné $f \in H$, l'application $v \in V \mapsto (f, v)_H$ est une forme linéaire continue sur H et a fortiori sur V ; on la note $Tf \in V'$ de sorte que

$$(Tf, v)_{V' \times V} = (f, v)_H, \quad \forall f \in H, \quad \forall v \in V.$$

On vérifie que $T : H \rightarrow V'$ possède les propriétés suivantes

$$(1) \quad |Tf|_{V'} \leq C |f|_H \quad \forall f \in H,$$

$$(2) \quad T \text{ est injective,}$$

$$(3) \quad T(H) \text{ est dense dans } V'.$$

En général T n'est pas surjective de H sur V' . A l'aide de T on prolonge H dans V' et on a le schéma

$$V \subset H = H' \subset V', \quad (2.2.1)$$

où les injections canoniques sont continues et denses. Ce triplet est appelé triplet de Gelfand. On dit que H est l'espace pivot.

2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X; |\cdot|_X)$ un espace de Banach réel. Notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $[0, T]$ à valeurs dans X .

Définition 2.3.1. Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $|f_n(t) - f(t)|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.

Définition 2.3.2. Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite fortement dérivable dans $t_0 \in [0, T]$ s'il existe un élément $\frac{df}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de f dans t_0 , tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} (f(t_0 + h)) - f(t_0) - \frac{df}{dt}(t_0) \right|_X = 0.$$

Définition 2.3.3. Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |f_n(t) - f(t)|_X dt = 0.$$

Théorème 2.3.1. (Bochner) Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable et intégrable si et seulement si $x \mapsto |f(x)|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est intégrable. Dans ce cas,

$$\left| \int_0^T f \, dt \right| \leq \int_0^T |f|_X \, dt.$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. l'espace de Lebesgue $\mathbb{L}^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $f : [0, T] \rightarrow X$ mesurables telles que l'application $t \rightarrow |f|_X$ appartient à $\mathbb{L}^p[0, T]$. On sait que $\mathbb{L}^p(0, T; X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\begin{aligned} |f|_{\mathbb{L}^p(0, T; X)} &= \left(\int_0^T |f|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ |f|_{\mathbb{L}^\infty(0, T; X)} &= \inf \{ c > 0 : |f(t)_X| \leq c, \quad p.p.t \in [0, T] \} \quad \text{si } p = \infty, \end{aligned}$$

par ailleurs, on a les résultats suivants.

Proposition 2.3.1 (1) $\mathbb{L}^p(0, T; X)$ ($1 \leq p < \infty$) est un espace de Banach.

(2) Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ alors $\mathbb{L}^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{\mathbb{L}^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt.$$

(3) $\mathbb{L}^r(0, T; X) \subset \mathbb{L}^q(0, T; X)$ avec injection continue $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

(4) Si X est un espace de Hilbert, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^p(0, T; X)' &= \mathbb{L}^q(0, T; X), \quad \text{si } 1 < q, p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \\ \mathbb{L}^1(0, T; X)' &= \mathbb{L}^\infty(0, T; X), \end{aligned}$$

où $\mathbb{L}^p(0, T; X)'$ représente le dual de l'espace $\mathbb{L}^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$.

Définition 2.3.4 . Soit $u, v \in \mathbb{L}^1(0, T; X)$. La fonction v s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $[0, T]$ si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t) u(t) \, dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) v(t) \, dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty[0, T],$$

$C_c^\infty[0, T]$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans $[0, T]$. Nous écrivons $v = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $v = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ est l'espace des fonctions

$u : [0, T] \rightarrow X$ telles que $u \in \mathbb{L}^p(0, T; X)$ et $\dot{u} \in \mathbb{L}^p(0, T; X)$. L'espace $W^{1,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$|u|_{W^{1,p}(0,T;X)} = |u|_{\mathbb{L}^p(0,T;X)} + |\dot{u}|_{\mathbb{L}^p(0,T;X)}.$$

Définition 2.3.5. Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite absolument continue si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_j, b_j) disjoints, inclus dans $[0, T]$, tels que $\sum_j (b_j - a_j) < \delta$ on a $\sum_j |f(b_j) - f(a_j)|_X \leq \varepsilon$.

Maintenant nous rappelons le lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions de l'espace $W^{1,p}(0, T; X)$

Théorème 2.3.2. Soit $1 \leq p \leq \infty$. $\mathbb{L}^p(0, T; X)$ un espace de Banach réflexif et soit $u \in \mathbb{L}^p(0, T; X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

- (1) $u \in W^{1,p}(0, T; X)$.
- (2) u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable ayant la dérivée forte dans $\mathbb{L}^p(0, T; X)$.

- (3) Il existe $u_0 \in X$ et $g \in \mathbb{L}^p(0, T; X)$, telles que $u(t) = u_0 + \int_0^t g(s) ds, \forall t \in [0, T]$.

Il découle de la démonstration du théorème 2.3.2 que, si X est un espace réflexif, alors toute fonction $u \in W^{1,p}(0, T; X)$ est fortement dérivable p.p sur $[0, T]$ et $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ p.p. sur $[0, T]$ par ailleurs $W^{1,1}(0, T; X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions lipschitziennes

$$u : [0, T] \rightarrow X.$$

Etant donné un entier $k \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{u \in \mathbb{L}^p(0, T; X), u^{(s)} \in \mathbb{L}^p(0, T; X), s \leq k\},$$

on vérifie aisément que $u \in W^{k,p}(0, T; X)$ si et seulement s'il existe k fonctions

$g_1, \dots, g_k \in \mathbb{L}^\infty(0, T; X)$ telles que

$$\int_0^T u(t) \varphi^{(j)}(t) dt = (-1)^j \int_0^T g_i(t) \varphi(t) dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \forall j = 1, 2, \dots, k,$$

où $\varphi^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j de φ . On peut donc considérer les dérivées successives $\dot{u} = g_1, u^{(2)} = g_2, \dots, u^{(k)} = g_k$. L'espace $W^{k,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$|u|_{W^{k,p}(0,T;X)} = |u|_{\mathbb{L}^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^k |u^{(\alpha)}|_{\mathbb{L}^p(0,T;X)}$$

Nous dénotons aussi par $C(0, T; X)$ et $C^1(0, T; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ à valeurs dans X , respectivement, avec les normes

$$\begin{aligned} |x|_{C(0,T;X)} &= \max_{t \in [0,T]} |x(t)|_X, \\ |x|_{C^1(0,T;X)} &= \max_{t \in [0,T]} |x(t)|_X + \max_{t \in [0,T]} |\dot{x}(t)|_X. \end{aligned}$$

Pour plus de détails sur les résultats résumés dans ce paragraphe nous renvoyons le lecteur par exemple à [14].

2.4 Eléments d'analyse dans les espaces de Hilbert

Dans cette section nous rappelons quelques éléments d'analyse dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les inéquations variationnelles d'évolution non linéaire du premier ordre et les équations variationnelles d'évolution paraboliques du premier ordre qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques. Puis nous rappelons le théorème de point fixe de Banach.

2.4.1 Equations et inéquations variationnelles d'évolution

Nous commençons ce paragraphe par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert V muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et la norme associée $|\cdot|_V$ et V' l'espace dual de V en notant par $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ le produit de dualité entre V et V' .

Définition 2.4.1. L'opérateur $A : V \rightarrow V'$ est dit

(a) monotone si

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq 0, \quad \forall u, v \in V.$$

(b) fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq m |u - v|_V^2, \quad \forall u, v \in V.$$

(c) de Lipschitz s'il existe $L > 0$

$$|Au - Av|_{V'} \leq L |u - v|_V, \quad \forall u, v \in V.$$

(d) hemicontinu si pour toute suite numérique $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ telle que $\lambda_n \rightarrow \lambda$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a

$$(A(u + \lambda_n v), w)_{V' \times V} \rightarrow (A(u + \lambda v), w)_{V' \times V} \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad \forall w \in V.$$

En utilisant la définition précédente, on a le résultat suivant

Proposition 2.4.1. Tout opérateur de Lipschitz est hemicontinu.

Le corollaire 2.4.1. Soit X un espaces de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $|\cdot|_X$.

Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout $f \in X$ il existe un unique élément $u \in X$ tel que $Au = f$.

Le corollaire précédent représente un cas particulier du théorème de Minty-Browder (voir par exemple [14] p.88).

Inégalité de Friedrichs-Poincaré. Soit mes $\Gamma_a > 0$. Alors il existe une constante $C_F > 0$ qui dépend seulement de Ω et Γ_a telle que

$$|\nabla \varphi|_H \geq C_F |\varphi|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in W,$$

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}.$$

Théorème 2.4.1. Soit (u_n) une suite bornée de X . Il existe alors un élément $u \in X$ et une sous-suite de (u_n) encore notée (u_n) telles que $u_n \rightharpoonup u$.

Fonctions convexes-Semi-continuité inférieure

-Convexité

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$. Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est-à-dire s'il existe $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v), \quad \forall u, v \in X, \quad t \in]0, 1[.$$

La fonction φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$ tels que $u \neq v$.

Pour toute fonction $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$, on définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par

$$D\varphi = \{u \in X \mid \varphi(u) < +\infty\},$$

$$\text{epi } \varphi = \{(u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(u) \leq \alpha\}.$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants

- 1) φ est propre si et seulement si $D\varphi \neq \emptyset$.
- 2) Le domaine de φ est un ensemble convexe de X si φ est convexe.
- 3) φ est convexe si et seulement si $\text{epi } \varphi$ est un ensemble convexe dans $X \times \mathbb{R}$.

-Semi-continuité inférieure

Une fonction $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (**s.c.i.**) en $u_0 \in H$ si

$$\liminf_{u \rightarrow u_0} \varphi(u) \geq \varphi(u_0).$$

Une fonction est dite s.c.i. sur $K \subset H$ si elle est s.c.i. en tout point de K et elle est dite s.c.i. si elle est s.c.i. sur tout H .

Théorème 2.4.2. Soient $(V, |\cdot|)$ un espace de Banach réel réflexif avec son dual $(V', |\cdot|)$ et $K \subset V$ un ensemble non vide convexe et fermé.

On considère $j : K \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle convexe semicontinue inférieurement et propre et un opérateur $A : V \rightarrow V'$ hémicontinu et fortement monotone, c'est-à-dire

$$\begin{cases} (a) \exists \alpha > 0 \text{ tel que } (Au - Av, u - v)_V \geq \alpha |u - v|_V^2, \quad \forall u, v \in V. \\ (b) \forall u, v \in V, \text{ l'application } t \in [0, 1] \rightarrow (A(1-t)u + tv, u - v)_V, \text{ est continue.} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Alors, pour tout $f \in V'$, il existe $u \in K$ unique tel que

$$(Au, v - u)_V + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_V, \quad \forall v \in K. \quad (2.4.2)$$

Théorème 2.4.3. Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur hémicontinu et monotone qui satisfait

$$\begin{aligned} a) \quad & (Av, v)_{V' \times V} \geq \omega |v|_V^2 + \lambda, \quad \forall v \in V, \\ b) \quad & |Av|_{V'} \leq C_1 (|v|_V + 1), \quad \forall v \in V. \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Pour des constantes $\omega > 0$; $C_1 > 0$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Etant donnée $u_0 \in H$ et $f \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$, alors il existe une fonction unique u qui satisfait

$$\begin{aligned} u &\in \mathbb{L}^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{u} \in \mathbb{L}^2(0, T; V'), \\ \dot{u}(t) + Au(t) &= f(t), \quad p.p.t \in [0, T], \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Théorème 2.4.4 . Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand, K est un ensemble convexe, fermé non vide de V ; et soit $a(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un opérateur bilinéaire, continu et symétrique tel que pour certaines constantes $\zeta > 0$ et c_0 ,

$$a(v, v) = c_0 |v|_H^2 \geq \zeta |v|_V^2, \quad \forall v \in H.$$

Alors, pour chaque $u_0 \in K$ et $f \in \mathbb{L}^2(0, T; H)$; il existe une unique fonction u qui satisfait

$$u \in \mathbb{L}^2(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; V'),$$

et que $u(0) = u_0, u(t) \in K$, pour tout $t \in [0, T]$,

$$(\dot{u}(t), v - u(t))_{V' \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_H, \quad \forall v \in K, \quad p.p.t \in [0, T],$$

Théorème 2.4.5. Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)$ et la norme $|\cdot|$. On identifie H et son dual. Soit V un autre espace de Hilbert de norme $|\cdot|$. On suppose que

$$V \subset H \subset V'$$

Soit $T > 0$ fixé, pour presque tout $t \in [0, T]$ on se donne une forme bilinéaire

$$a(t; u, v) : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ vérifiant les propriétés}$$

- i) La fonction $t \mapsto a(t; u, v)$ est mesurable $\forall u, v \in V$.
- ii) $a(t; u, v) \leq M |u| |v|$ p.p. $t \in [0, T], \forall u, v \in V$. (2.4.11)
- iii) $a(t; v, v) > \alpha \|v\|^2 - C |v|^2 \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in [0, T] \forall v \in V$,

où $\alpha > 0$, M et C sont des constantes, $u_0 \in H$ et $f \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$. Alors il existe une fonction unique u telle que

$$u \in \mathbb{L}^2(0, T; V) \cap C(0, T; H) \text{ et } \frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^2(0, T; V'). \quad (2.4.12)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{du}{dt}(t), v \right) + a(t; u(t), v) = (f(t), v), \text{ p.p. } t \in [0, T], \quad \forall v \in V, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.4.13)$$

Dans cette section, nous allons rappeler une version du théorème de Cauchy- Lipschitz (voir par exemple [48], p.48).

Théorème 2.4.6. Soit $(X, |\cdot|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$ qui satisfait les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ |F(t, x) - F(t, y)|_X \leq L_F |x - y|_X, \quad \forall x, y \in X, \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ \text{il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que } F(\cdot, x) \in \mathbb{L}^p(0, T; X) \quad \forall x \in X. \end{cases} \quad (2.4.14)$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ telle que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.4.15)$$

Proposition 2.4.2. Si $u, v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|(u, v)| \leq |u| |v|. \quad (2.4.16)$$

2.4.2 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach va être utilisé plus tard dans cette thèse pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution. Soit X un espace de Banach muni de la

norme $|\cdot|_X$, $K \subset X$ une partie de X et soit $\Lambda : K \rightarrow X$ un opérateur défini sur K . On s'intéresse à l'existence d'une solution de l'équation

$$\Lambda(u) = u, \quad u \in K. \quad (2.4.17)$$

Une telle solution de (2.4.17) s'appelle un point fixe de Λ dans K .

Théorème 2.4.7. (point fixe de Banach) Soit K une partie non vide et fermée de l'espace de Banach X et soit $\Lambda : K \rightarrow K$ une contraction, i.e, $\exists k \in]0, 1[$ tel que

$$|\Lambda u - \Lambda v|_X \leq k |u - v|_X, \quad \forall u, v \in K. \quad (2.4.18)$$

Alors il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$, i.e, Λ possède un point fixe unique dans K .

Rappelons que les puissances de l'opérateur Λ sont définies récursivement par

$$\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1}) \text{ pour } n \geq 2.$$

Théorème 2.4.8 . Sous les mêmes conditions du théorème (2.4.7), on suppose que Λ^n est une contraction pour un certain entier $n \geq 2$. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .

2.5 Compléments divers

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration et d'estimation d'erreur, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section, on pourra consulter par exemple [28].

2.5.1 Lemmes de type Gronwall

Lemme 2.5.1. Soient $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$ une fonction.

1. Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \phi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right), \quad \forall t \in [0, T],$$

2. Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a \cdot \int_0^t \phi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

Alors

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

pour le cas particulier $m = 0$ la partie (1) de ce lemme devient

Corollaire 2.5.1. Soient $n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$ une fonction telle que

Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s) \phi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right), \quad \forall t \in [0, T],$$

Le corollaire (2.5.1) est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. On suppose deux solutions, en notant par ϕ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ϕ sous la forme

$$\phi(t) \leq \int_0^t n(s) \phi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. Le corollaire (2.5.1) donne immédiatement la nullité de ϕ .

2.5.2 Sous différentiabilité

Nous considérons partout dans ce paragraphe que X est un espace normé, X' l'espace dual de X et K un sous-ensemble de l'espace X .

Définition 2.5.1. On appelle fonction indicatrice de K , la fonction χ_K définie par

$$\chi_K = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K, \\ +\infty & \text{si } x \notin K. \end{cases}$$

Il est important d'introduire des notions telles que la sous-différentiabilité et le sous-gradient d'une fonction. La notion de sous-différentiabilité intervient fréquemment en mécanique et notamment dans la mécanique du contact.

Définition 2.5.2 . Soit une fonction $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et u un élément de X tel que $j(u) \neq \pm\infty$

Le sous-différentiel de j en u ; noté $\partial j(u)$ est l'ensemble de X' défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' : j(v) \geq j(u) + (u', v - u)_{X' \times X}, \forall v \in X\}. \quad (2.5.1)$$

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous-gradient de j en u : La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$, et on dit sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X .

Dans le cas d'un espace de Hilbert X , le sous-différentiel de j en u peut aussi être écrit comme

$$\partial j(u) = \{u' \in X : j(v) \geq j(u) + (u', v - u)_X, \forall v \in X\}. \quad (2.5.2)$$

Maintenant nous supposons que K est un convexe non vide. Nous considérons la fonction indicatrice χ_K de l'ensemble K . Nous avons si $u \notin K$ alors $\partial \chi_K(u) = \emptyset$. Supposons alors que $u \in K$. Il vient que si $u' \in \partial \chi_K(u)$ alors

$$(u', v - u)_{X' \times X} \leq 0, \forall v \in K.$$

Nous pouvons ainsi caractériser le sous-différentiel $\partial \chi_K$ d'une fonction indicatrice χ_K d'un ensemble convexe non vide

$$\partial \chi_K(u) = \{u' \in X' : (u', v - u)_{X' \times X} \leq 0, \forall v \in K\}.$$

Deuxième partie

Analyse variationnelle de problèmes
electro-viscoélastiques de contact avec
frottement de Coulomb régularisé

Partie II

Analyse variationnelle de problèmes electro-viscoélastiques de contact avec frottement de Coulomb régularisé

Dans cette deuxième partie, nous allons traiter deux problèmes de contact pour des corps electro-viscoélastiques.

Le premier problème est modélisé dans un processus quasistatique avec condition de Signorini et avec frottement, le deuxième problème est modélisé dans un processus dynamique avec condition de Signorini et avec frottement

On établit pour chaque problème une formulation variationnelle et un résultat d'existence et d'unicité. Les démonstrations sont basées sur des résultats classiques d'existence et d'unicité sur les équations et les inéquations d'évolutions et une version du théorème de Cauchy-Lipschitz et des arguments de point fixe.

Chapitre 3

Problème quasistatique en electro-viscoélasticité avec frottement

Nous décrivons dans ce chapitre un modèle mathématique dans un processus quasistatique d'un problème de contact entre un corps électro-visco-élastique et une fondation. Le contact est modélisé par une condition de Signorini et une condition électrique régularisée. Le frottement est formulé par une version de la loi de Coulomb. Nous dérivons une formulation variationnelle sous forme de système couplé en terme des champs de déplacement et du potentiel électrique. Aussi, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible pour le modèle. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de la publication [9].

3.1 Formulation du problème

Le problème étudié dans ce chapitre entre dans le cadre physique $n^{\circ}1$ présenté dans le premier chapitre de cette thèse et par conséquent nous utilisons le deuxième modèle mathématique pour que l'étude soit complète, précisons que la loi comportement est électro-visco-élastique de type (1.2.7) et la condition de contact de Signorini est prescrite dans (1.3.10). Nous considérons les conditions de frottement de type Coulomb (1.3.12).

Alors, le modèle classique pour ce processus est le suivant

Problème $\mathcal{P}_1$: Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, un champ potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ tels que

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) - \xi^* E(\varphi) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.1.1)$$

$$D = \beta E(\varphi) + \xi \varepsilon(u), \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.1.2)$$

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.1.3)$$

$$\text{div } D = q_0, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.1.4)$$

$$u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (3.1.5)$$

$$\sigma_\nu = h, \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (3.1.6)$$

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad u_\nu \sigma_\nu = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (3.1.7)$$

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq \mu p |R \sigma_\nu|, \\ |\sigma_\tau| < \mu p |R \sigma_\nu| \implies \dot{u}_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau| = \mu p |R \sigma_\nu| \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (3.1.8)$$

$$\varphi = 0, \quad \text{sur } \Gamma_a \times [0, T], \quad (3.1.9)$$

$$D\nu = q_2, \quad \text{sur } \Gamma_b \times [0, T], \quad (3.1.10)$$

$$u(0) = u_0, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (3.1.11)$$

Les équations (3.1.1) – (3.1.2) représentent la loi constitutive électro-visco-élastique que nous avons introduite dans (1.2.7) où $\mathcal{A}$ représente l'opérateur de viscosité et $\mathcal{G}$ représente l'opérateur d'élasticité. ξ , ξ^* le tenseur piézoélectrique et son transposé, β dénote le champ de la permittivité électrique. Ensuite, les équations (3.1.3) – (3.1.4) sont les équations d'équilibre des champs de contrainte et déplacement électrique, que nous avons déjà vues dans (1.1.6) et (1.1.9). Les conditions (3.1.5) et (3.1.6) représentent les conditions aux limites déplacement-traction, tandis que (3.1.7) et (3.1.10) sont les conditions aux limites électriques que nous avons définis dans les chapitres précédents. Le contact de Signorini est modélisé par la condition (3.1.7) et le frottement est décrit par la relation (3.1.8) qui peut être écrite sous la forme (1.3.12). Finalement, (3.1.11) est la condition initiale où u_0 est un champ de déplacement donné.

3.2 Formulation variationnelle

Nous donnons maintenant des hypothèses sur les données du problème

Supposons que l'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \exists M_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que } : |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)| \leq M_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega, \\ (b) : \exists m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que } : |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2| \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega, \\ (c) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (d) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{H}, \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

l'opérateur d'élasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \exists M_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que } : |\mathcal{G}(x, \xi_1) - \mathcal{G}(x, \xi_2)| \leq M_{\mathcal{G}} |\xi_1 - \xi_2| \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega, \\ (b) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, \xi) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{S}^d, \\ (c) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.2.2)$$

Le tenseur piézoélectrique $\xi(x) = (e_{ijk}(x))_{i,j,k=1}^d : \tau \in \mathbb{S}^d \rightarrow \xi(x)(\tau) \in \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \xi = (e_{ijk}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \\ (b) : \xi(x, \tau) = (e_{ijk}(x) \tau_{jk}), \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega, \\ (c) : e_{ijk} = e_{ikj} \in \mathbb{L}^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.2.3)$$

Le tenseur de permittivité électrique $\beta(x) = (b_{ij}(x))_{i,j=1}^d : E \in \mathbb{R}^d \rightarrow \beta(x)(E) \in \mathbb{R}^d$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \beta = (\beta_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \\ (b) : \beta(x, E) = (b_{ij}(x) E_j) \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, p.p.x \in \Omega, \\ (c) : b_{ij} = b_{ji} \in \mathbb{L}^\infty(\Omega), \\ (d) : \exists m_\beta > 0 \text{ tel que } : b_{ij}(x) E_i E_j \geq m_\beta |E|^2, \\ \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.2.4)$$

La fonction p seuil de frottement satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} p : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ vérifie} \\ (a) : \exists M > 0 \text{ tel que : } |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq M |r_1 - r_2|, \\ \text{pour tout } r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, p.p.x \in \Gamma_3, \\ (b) : \text{L'application : } x \rightarrow p(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}_+, \\ (c) : p(x, 0) = 0, p.p.x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.2.5)$$

Tandis que le coefficient de frottement μ vérifie

$$\mu \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma_3), \mu(x) \geq 0, p.p.x \text{ sur } \Gamma_3. \quad (3.2.6)$$

Les forces volumiques, la traction surfacique et la densité des charges électriques volumiques et surfaciques vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ f_0 \in \mathbb{L}^2(0, T; H), \ h \in \mathbb{L}^2\left(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d\right), \\ (b) \ q_0 \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \ q_2 \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_b)). \end{array} \right. \quad (3.2.7)$$

Finalement, nous assumons que le déplacement initial satisfait

$$u_0 \in V. \quad (3.2.8)$$

Utilisant le théorème de Riesz, nous définissons les applications $f : [0, T] \rightarrow V'$ et $q : [0, T] \rightarrow W$ comme suit

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \int_{\Omega} f_0(t) v dx + \int_{\Gamma_2} h(t) v da, \quad \forall v \in V, \ t \in [0, T], \quad (3.2.9)$$

$$(q(t), \psi)_W = - \int_{\Omega} q_0(t) \psi dx + \int_{\Gamma_b} q_2(t) \psi da, \quad \forall \psi \in W, \ t \in [0, T]. \quad (3.2.10)$$

Notons que la condition (3.2.7) implique

$$f \in \mathbb{L}^2(0, T; V'), \ q \in \mathbb{L}^2(0, T; W). \quad (3.2.11)$$

On définit U le sous ensemble convexe des déplacements admissibles donné par

$$U = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1, v_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\}, \quad (3.2.12)$$

Soit $U \subset V$ un ensemble non vide convexe et fermé.

Soit la fonctionnelle de frottement $j : \mathcal{H}_1 \times K \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$j(\sigma, v) = \int_{\Gamma_3} \mu p |R \sigma_\nu| |v_\tau| da. \quad (3.2.13)$$

En utilisant les formules de Green (2.1.1) et (2.1.7), il résulte que si (u, σ, φ, D) sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (3.1.1) – (3.1.11), alors on a la formulation variationnelle suivante

Problème $\mathcal{P}V_1$: Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, un champ potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ tels que

$$(\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\sigma, v) - j(\sigma, \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V, \quad \forall u, v \in V, \quad (3.2.14)$$

$$(D(t), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} + (q(t), \psi)_W = 0, \quad \forall \psi \in W. \quad (3.2.15)$$

Notre résultat principal d'existence et d'unicité est présenté dans la section suivante

3.3 Existence et unicité de la solution

L'existence d'une solution unique du problème variationnel $\mathcal{P}V_1$ est donnée par le théorème suivant

Théorème 3.3.1. Supposons que (3.2.1) – (3.2.8) sont vérifiées. Alors, le Problème $\mathcal{P}V_1$ possède une solution unique (u, φ) . En outre, la solution satisfait

$$u \in W^{1,2}(0, T; U), \quad (3.3.1)$$

$$\varphi \in W^{1,2}(0, T; W). \quad (3.3.2)$$

Remarque 3.3.1 : Un "quadruplet" des fonctions (u, σ, φ, D) qui satisfont (3.1.1), (3.1.2), (3.2.14) – (3.2.15) est appelé solution faible du problème de contact $\mathcal{P}V_1$. Nous concluons par le théorème 3.3.1 que, sous les hypothèses (3.2.1) – (3.2.8) il existe une unique solution faible du problème $\mathcal{P}V_1$. Pour préciser la régularité de la solution faible, notons que les relations constitutives (3.1.1) et (3.1.2) et les hypothèses (3.2.1) – (3.2.8) et la régularité (3.3.1) et (3.3.2) montrent que $\sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H})$ et $D \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{W})$; de plus, en utilisant (3.1.1) et (3.1.2), il s'ensuit que (3.2.14) et (3.2.15) sont vérifiées pour tout $v \in V, \psi \in W$ et $t \in [0, T]$. Nous prenons $v = \dot{u}(t) \pm z$ où $z \in C_0^\infty(\Omega)^d$ dans (3.2.14) et $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ dans (3.2.15), on trouve

$$\text{Div} \sigma(t) + f_0(t) = 0, \quad \text{div} D(t) = q_0(t), \quad p.p \text{ dans } \Omega, \quad \forall t \in [0, T],$$

il s'ensuit maintenant des régularités (3.2.7) que $\text{Div} \sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)^d)$ et $\text{div} D \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$, ce qui montre que

$$\sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1), \tag{3.3.3}$$

$$D \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{W}_1). \tag{3.3.4}$$

Nous concluons que la solution faible (u, σ, φ, D) du problème de contact piézoélectrique $\mathcal{P}_1$ possède la régularité (3.3.1) – (3.3.4)

Démonstration du théorème 3.3.1.

Notre objectif principal dans ce paragraphe, est d'établir la démonstration du théorème d'existence et d'unicité pour le problème variationnel $\mathcal{P}V_1$. Pour ceci, nous supposons dans ce qui suit que (3.2.1) – (3.2.8) sont satisfaites et, partout ci-dessous, nous dénotons par C une constante positive indépendante du temps et dont sa valeur peut changer d'une ligne à l'autre. La démonstration se fait en plusieurs étapes. Elle est basée sur les arguments des inéquations d'évolution non linéaires de premier ordre et des arguments de point fixe.

Dans la première étape, pour $G \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1)$ et $\eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$, on considère le problème intermédiaire suivant

Problème $\mathcal{P}V_1^{G\eta}$: Trouver un champ de déplacement $u_{G\eta} : \Omega \times [0, T] \rightarrow U$, tel que

$$\begin{cases} u_{G\eta}(t) \in U & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_{G\eta}(t)), \varepsilon(v - \dot{u}_{G\eta}(t)))_{\mathcal{H}} + (\eta(t), v - \dot{u}_{G\eta}(t))_{V' \times V} + j(G, v) \\ -j(G, \dot{u}_{G\eta}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}_{G\eta}(t)) \quad \forall v(t) \in V, \\ u_{G\eta}(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.3.5)$$

$$(3.3.6)$$

Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz-Fréchet pour définir les opérateurs $A : V \rightarrow V'$ et la fonction $f_\eta : [0, T] \rightarrow V'$ par les égalités

$$(Au, v)_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (3.3.7)$$

$$(f_\eta, v)_{V' \times V} = (f(t) - \eta(t), v)_{V' \times V}, \quad \forall v \in V, \quad (3.3.8)$$

D'après l'hypothèse (3.2.11), on a

$$f_\eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V').$$

On pose maintenant $u_{G\eta} : [0, T] \rightarrow U$ une fonction définie par

$$u_{G\eta}(t) = \int_0^t v_{G\eta}(s) ds + u_0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.3.9)$$

On obtient l'inéquation variationnelle suivante

Problème $QV_1^{G\eta}$: Trouver un champ de déplacement $v_{G\eta} : \Omega \times [0, T] \rightarrow U$, tel que

$$(Av_{G\eta}(t), w - v_{G\eta}(t))_{V' \times V} + j(G, w) - j(G, v_{G\eta}(t)) \geq (f_\eta(t), w - v_{G\eta}(t))_{V' \times V}, \quad \forall w(t) \in V, \quad (3.3.10)$$

Dans l'étude du problème variationnel $QV_1^{G\eta}$, nous avons le résultat suivant

Lemme 3.3.1 : Pour tout $G \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1)$ et $\eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$, $QV_1^{G\eta}$ admet une solution unique de régularité

$$v_{G\eta} \in \mathbb{L}^2(0, T; U), \quad (3.3.11)$$

pour tout $v, w \in V$ et $t \in [0, T]$. Nous appliquons le théorème 2.4.2. Nous utilisons (3.2.1) et (3.3.7) pour avoir que A est fortement monotone et de Lipschitz et satisfait

$$(Av_1(t) - Av_2(t), v_1 - v_2)_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} |v_1 - v_2|_V^2. \quad (3.3.12)$$

Nous utilisons (3.2.1), nous obtenons

$$(Av_1(t) - Av_2(t), w)_{V' \times V} \leq M_{\mathcal{A}} |v_1 - v_2|_V |w|_V. \quad (3.3.13)$$

Pour $w = Av_1(t) - Av_2(t)$ dans la dernière inégalité, nous trouvons

$$|Av_1(t) - Av_2(t)|_{V'} \leq M_{\mathcal{A}} |v_1 - v_2|_V. \quad (3.3.14)$$

Il est facile de montrer que $j(G, \cdot)$ est convexe semicontinue inférieurement et propre. Donc, le problème $QV_1^{G_\eta}$ admet une solution unique $v_{G_\eta} \in \mathbb{L}^2(0, T; U)$

On utilise le résultat suivant

Lemme 3.3.2. Le problème $PV_1^{G_\eta}$ possède une solution unique $u_{G_\eta} \in W^{1,2}(0, T; U)$.

Preuve. La preuve du lemme 3.3.2 est une conséquence du lemme 3.3.1 et la relation (3.3.9)

Dans l'étape suivante nous utilisons la solution $u_{G_\eta} \in W^{1,2}(0, T; U)$ obtenue dans le lemme 3.3.2 pour construire le problème variationnel suivant

Problème $P_1^{\varphi_{G_\eta}}$: Trouver un champ potentiel électrique $\varphi_{G_\eta} : \Omega \times [0, T] \rightarrow W$ tels que

$$(\beta \nabla \varphi_{G_\eta}(t), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} - (\xi \varepsilon(u_{G_\eta}(t)), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, \quad t \in [0, T]. \quad (3.3.15)$$

Lemme 3.3.3. Il existe une solution unique $\varphi_{G_\eta} \in W^{1,2}(0, T; W)$ qui satisfait (3.3.15). De plus, si $\varphi_{G_{\eta_1}}$ et $\varphi_{G_{\eta_2}}$ sont deux solutions de (3.3.15). Alors, il existe une constante $C > 0$ tel que

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq C |u_1(t) - u_2(t)|_V, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.3.16)$$

Preuve. Soit $t \in [0, T]$. Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir l'opérateur $A_{G\eta} : W \rightarrow W$ par

$$(A_{G\eta}(t)\varphi, \psi)_W = (\beta \nabla \varphi_{G\eta}(t), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} - (\xi \varepsilon(u_{G\eta}(t)), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.3.17)$$

pour tout $\varphi, \psi \in W$. Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in W$; nous utilisons les hypothèses (3.2.4) pour trouver

$$(A_{G\eta}(t)\varphi_1 - A_{G\eta}(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_\beta |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2. \quad (3.3.18)$$

Nous avons, aussi

$$(A_{G\eta}(t)\varphi_1 - A_{G\eta}(t)\varphi_2, \psi)_W \leq c_\beta |\varphi_1 - \varphi_2|_W |\psi|_W. \quad (3.3.19)$$

Les inégalités (3.3.18) et (3.3.19) montrent que l'opérateur $A_{G\eta}(t)$ est fortement monotone et de lipschitz, donc, nous utilisons un résultat standard sur les égalités variationnelles, il s'ensuit qu'il existe un unique élément $\varphi_{G\eta} \in W$ tel que

$$A_{G\eta}\varphi_{G\eta}(t) = q(t). \quad (3.3.20)$$

Nous combinons maintenant (3.3.17) et (3.3.20) pour déduire que $\varphi_{G\eta} \in W$ est l'unique solution de l'équation variationnelle (3.3.15).

Nous prouvons maintenant que $\varphi_{G\eta} \in W^{1,2}(0, T; W)$. Pour ceci, nous considérons $t_1, t_2 \in [0, T]$ et pour des raisons de simplicité, nous écrivons $\varphi_{G\eta}(t_i) = \varphi_i$, $u_{G\eta}(t_i) = u_i$, $q(t_i) = q_i$, pour $i = 1, 2$. Moyennant (3.3.15), (3.2.3) et (3.2.4) nous dérivons l'inégalité

$$m_\beta |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 \leq c_\xi |u_1 - u_2|_V |\varphi_1 - \varphi_2|_W + |q_1 - q_2|_W |\varphi_1 - \varphi_2|_W. \quad (3.3.21)$$

Alors, nous avons

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq C (|u_1(t) - u_2(t)|_V + |q_1(t) - q_2(t)|_W), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.3.22)$$

La relation (3.2.10) implique que $q \in \mathbb{L}^2(0, T; W)$, nous avons $u_{G\eta} \in W^{1,2}(0, T; U)$ donc l'inégalité (3.3.22) implique que $\varphi_{G\eta} \in W^{1,2}(0, T; W)$

Soient, maintenant $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$, $G_1, G_2 \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1)$ et, pour simplifier, notons $\varphi_{G\eta}(t_i) = \varphi_i$, $u_{G\eta}(t_i) = u_i$ pour $i = 1, 2$. En utilisant (3.3.15) et moyennant des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (3.3.21) on déduit que

$$m_\beta |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq c_\xi |u_1(t) - u_2(t)|_V + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.3.23)$$

Alors nous avons le résultat du lemme 3.3.3.

Considérons maintenant l'opérateur

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V') &\rightarrow \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V') \text{ défini par} \\ \Lambda(G, \eta) &= (\Lambda_1(G), \Lambda_2(\eta)), \quad \forall G \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1), \forall \eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V'), \\ \Lambda_1(G) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_{G\eta}) + \mathcal{G}\varepsilon(u_{G\eta}) - \xi^* E(\varphi_{G\eta}) \\ (\Lambda_2(\eta), \xi)_{V' \times V} &= (\mathcal{G}\varepsilon(u_{G\eta}(t) + \xi^* \nabla \varphi_{G\eta}(t), \xi)_{V' \times V} \quad \forall \xi \in V \\ |\Lambda(G_1, \eta_1) - \Lambda(G_2, \eta_2)|^2 &= |(\Lambda_1(G_1), \Lambda_2(\eta_1)) - (\Lambda_1(G_2), \Lambda_2(\eta_2))|^2, \\ &= |\Lambda_1(G_1) - \Lambda_1(G_2)|^2 + |\Lambda_2(\eta_1) - \Lambda_2(\eta_2)|^2. \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

Dans la dernière étape, nous montrons que l'opérateur Λ possède un point fixe unique

Lemme 3.3.4. Il existe un unique élément $(G^*, \eta^*) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V')$ tel que

$$\Lambda(G^*, \eta^*) = (G^*, \eta^*). \quad (3.3.25)$$

Preuve. Soient $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$, $G_1, G_2 \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1)$ et par simplicité, nous utilisons les notations u_i et φ_i pour les fonctions $u_{G\eta_i}$ et $\varphi_{G\eta_i}$ obtenues dans les lemmes 3.3.2 et 3.3.3 pour $i = 1, 2$. Soit $t \in [0, T]$. On a

$$\Lambda_1(G) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_{G\eta}) + \mathcal{G}\varepsilon(u_{G\eta}) - \xi^* E(\varphi_{G\eta})$$

Ce qui donne

$$|G_1 - G_2| \leq C(|v_1(t) - v_2(t)|_V + |u_1(t) - u_2(t)|_V + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W). \quad (3.3.26)$$

En utilisant (3.3.16), nous obtenons

$$|G_1 - G_2| \leq C (|v_1(t) - v_2(t)|_V + |u_1(t) - u_2(t)|_V). \quad (3.3.27)$$

D'un autre côté, puisque

$$u_i(t) = u_0 + \int_0^t v_i(s) ds,$$

nous obtenons

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V ds. \quad (3.3.28)$$

à partir de (3.3.28), la relation (3.3.27) devient

$$|G_1 - G_2| \leq C \left(|v_1(t) - v_2(t)|_V + \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V ds \right). \quad (3.3.29)$$

à partir de (3.3.5), on trouve

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(v_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2(t)), \varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t))) + (\eta_1(t) - \eta_2(t), v_1(t) - v_2(t)) \\ & + j(G_1, v_1(t)) - j(G_1, v_2(t)) - j(G_2, v_1(t)) + j(G_2, v_2(t)) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

et, on a

$$\begin{aligned} & j(G_1, v_2(t)) - j(G_1, v_1(t)) - j(G_2, v_2(t)) + j(G_2, v_1(t)) = \int_{\Gamma_3} \mu p |R G_{1\nu}| |v_{2\tau}| da - \\ & - \int_{\Gamma_3} \mu p |R G_{1\nu}| |v_{1\tau}| da - \int_{\Gamma_3} \mu p |R G_{2\nu}| |v_{2\tau}| da + \int_{\Gamma_3} \mu p |R G_{2\nu}| |v_{1\tau}| da. \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

De (2.1.4), (3.2.5), (3.2.6) et en utilisant les propriétés de R , on trouve

$$j(G_1, v_2(t)) - j(G_1, v_1(t)) - j(G_2, v_2(t)) + j(G_2, v_1(t)) \leq C |G_1 - G_2|_{\mathcal{H}_1} |v_1 - v_2|_V \quad (3.3.32)$$

Donc (3.3.30) devient

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{A}\varepsilon(v_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2(t)), \varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t))) + (\eta_1(t) - \eta_2(t), v_1(t) - v_2(t)) \\
 & \leq C |G_1 - G_2|_{\mathcal{H}_1} |v_1 - v_2|_V
 \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

Par intégration, et en utilisant la relation (2.1.3), (3.2.1) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz on trouve

$$\begin{aligned}
 m_{\mathcal{A}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds & \leq \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'} |v_1(s) - v_2(s)|_V ds \\
 & + C \int_0^t |G_1(s) - G_2(s)|_{\mathcal{H}_1} |v_1(s) - v_2(s)|_V ds,
 \end{aligned} \tag{3.3.34}$$

pour tout $t \in [0, T]$. De plus, d'après l'inéquation $2ab \leq \frac{2C}{m_{\mathcal{A}}} a^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2C} b^2$ et $2ab \leq \frac{2}{m_{\mathcal{A}}} a^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} b^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
 m_{\mathcal{A}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds & \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \frac{m_{\mathcal{A}}}{4} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \\
 & + \frac{C}{m_{\mathcal{A}}} \int_0^t |G_1(s) - G_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 ds + \frac{m_{\mathcal{A}}}{4} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds
 \end{aligned} \tag{3.3.35}$$

On trouve

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq C \left(\int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \int_0^t |G_1(s) - G_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 ds \right). \tag{3.3.36}$$

On applique cette inégalité dans (3.3.28)

$$|u_1 - u_2|_V^2 \leq C \left(\int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \int_0^t |G_1(s) - G_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 ds \right). \tag{3.3.37}$$

Par (3.3.30), on a

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{A}\varepsilon(v_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2(t)), \varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t))) + (\eta_1(t) - \eta_2(t), v_1(t) - v_2(t)) \\
 & + j(G_1, v_1(t)) - j(G_1, v_2(t)) - j(G_2, v_1(t)) + j(G_2, v_2(t)) \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.3.38}$$

On utilise les relations (2.1.3), (3.2.1), (3.3.32) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour avoir

$$m_{\mathcal{A}} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \leq | \eta_1(t) - \eta_2(t) |_{V'} |v_1(t) - v_2(t)|_V + C |G_1(t) - G_2(t)|_{\mathcal{H}_1} |v_1(t) - v_2(t)|_V \quad (3.3.39)$$

Pour tout $t \in [0, T]$. De plus, on utilise les inégalités $2ab \leq \frac{2C}{m_{\mathcal{A}}}a^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2C}b^2$ et $2ab \leq \frac{2}{m_{\mathcal{A}}}a^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}b^2$, on obtient

$$m_{\mathcal{A}} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} | \eta_1(t) - \eta_2(t) |_{V'}^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{4} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + \frac{C}{m_{\mathcal{A}}} |G_1(t) - G_2(t)|_{\mathcal{H}_1}^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{4} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \quad (3.3.40)$$

Ce qui implique

$$|v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \leq C (| \eta_1(t) - \eta_2(t) |_{V'}^2 + |G_1(t) - G_2(t)|_{\mathcal{H}_1}^2) \quad (3.3.41)$$

A partir de (3.3.36) et (3.3.41), donc, (3.3.29) devient

$$|G_1(t) - G_2(t)|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C (| \eta_1(t) - \eta_2(t) |_{V'}^2 + |G_1(t) - G_2(t)|_{\mathcal{H}_1}^2) + C \left(\int_0^t | \eta_1(s) - \eta_2(s) |_{V'}^2 ds + \int_0^t |G_1(s) - G_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 ds \right). \quad (3.3.42)$$

D'un autre côté,

$$(\Lambda_2(\eta), \xi)_{V' \times V} = (\mathcal{G}\varepsilon(u_{G\eta}(t) + \xi^* \nabla \varphi_{G\eta}(t), \xi)_{V' \times V} \quad \forall \xi \in V$$

On trouve

$$| \eta_1(t) - \eta_2(t) |_{V'}^2 \leq C (| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) |_W^2 + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2) \quad (3.3.43)$$

D'autre part (3.3.16) donne

$$| \eta_1(t) - \eta_2(t) |_{V'}^2 \leq C (|u_1(t) - u_2(t)|_V^2) \quad (3.3.44)$$

De (3.3.37), on a

$$|\eta_1 - \eta_2|_{V'}^2 \leq C \left(\int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \int_0^t |G_1(s) - G_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 ds \right). \quad (3.3.45)$$

Utilisons (3.3.24), pour trouver

$$\begin{aligned} |\Lambda(G_1, \eta_1) - \Lambda(G_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V')}^2 &\leq C (|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}^2 + |G_1(t) - G_2(t)|_{\mathcal{H}_1}^2) \\ &+ C \left(\int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \int_0^t |G_1(s) - G_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 ds \right). \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

Pour tout $t \in [0, T]$, par récurrence, avec Λ^p la composée $p^{\text{ième}}$ de l'opérateur Λ , on a

$$|\Lambda^p(G_1, \eta_1) - \Lambda^p(G_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V')}^2 \leq \left(\sum_{j=0}^p C_p^j C^{p-j} \frac{C^j T^j}{j!} \right) |(G_1, \eta_1) - (G_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V')}^2. \quad (3.3.47)$$

Et par conséquent (3.3.47) implique, pour tout $t \in [0, T]$ et $p \in \mathbb{N}$, que

$$|\Lambda^p(G_1, \eta_1) - \Lambda^p(G_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V')}^2 \leq \frac{(Cp + CT)^p}{p!} |(G_1, \eta_1) - (G_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V')}^2. \quad (3.3.48)$$

Supposons que $C < \frac{1}{e}$, il s'en suit d'après le critère de d'Alembert que la série $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Cp+CT)^j}{j!}$ est convergente, d'où il résulte que le terme général $\frac{(Cp+CT)^p}{p!}$ tend vers 0, lorsque $p \rightarrow \infty$

Ce qui implique pour p suffisamment grand que l'application Λ^p est une contraction dans l'espace de Banach $\mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V')$. Alors, il existe un unique $(G^*, \eta^*) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V')$ tel que $\Lambda^p(G^*, \eta^*) = (G^*, \eta^*)$ et de plus (G^*, η^*) est l'unique point fixe de Λ , tel que

$$\Lambda(G^*, \eta^*) = (G^*, \eta^*). \quad (3.3.49)$$

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du théorème 3.3.1.

Existence. Soit $(G^*, \eta^*) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V')$ le point fixe et soit (u^*, φ^*) la solution de $PV_1^{G\eta}$, $P_1^{\varphi_{G\eta}}$ pour $(G, \eta) = (G^*, \eta^*)$ pour $u^* = u_{G^*\eta^*}$ et $\varphi^* = \varphi_{G^*\eta^*}$. Nous concluons par (3.2.14) et (3.2.15) que (u^*, φ^*) possède la régularité donnée par (3.3.1) et (3.3.2)

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (3.3.24) et l'unicité de la solution des problèmes $PV_1^{G_\eta}$ et $P_1^{\varphi_{G_\eta}}$ ce qui achève la démonstration.

Chapitre 4

Problème dynamique

électro-viscoélastique avec frottement

Nous considérons un problème de contact dans le cas dynamique entre un corps électro-viscoélastique et une fondation électriquement conductrice. Le contact est modélisé par une condition de Signorini et une condition électrique régularisée. Le frottement est formulé par la loi de Coulomb. Nous dérivons une formulation variationnelle sous forme de système couplé en termes de champs de déplacement et du potentiel électrique. Aussi nous établissons un résultat d'existence d'une solution faible pour le modèle. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de la publication [8].

4.1 Formulation du problème

Le problème étudié dans ce chapitre entre dans le cadre physique $n^{\circ}1$ présenté dans le premier chapitre de la thèse et par conséquent nous utilisons le deuxième modèle mathématique, pour que l'étude soit complète, précisons que la loi de comportement est électro-viscoélastique du type (1.2.7) et la condition de contact avec Signorini est prescrite dans (1.3.10). Nous considérons les conditions de frottement du type Coulomb (1.3.12).

Alors, le modèle classique pour ce processus est le suivant

Problème $\mathcal{P}_2$: Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, un champ potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ tels que

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) - \xi^* E(\varphi), \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (4.1.1)$$

$$D = \beta E(\varphi) + \xi \varepsilon(u), \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (4.1.2)$$

$$\rho \ddot{u} = \text{Div } \sigma + f_0, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (4.1.3)$$

$$\text{div } D = q_0, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (4.1.4)$$

$$u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (4.1.5)$$

$$\sigma_\nu = h, \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (4.1.6)$$

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad u_\nu \sigma_\nu = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (4.1.7)$$

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq \mu p |R \sigma_\nu|, \\ |\sigma_\tau| < \mu p |R \sigma_\nu| \implies \dot{u}_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau| = \mu p |R \sigma_\nu| \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (4.1.8)$$

$$\varphi = 0, \quad \text{sur } \Gamma_a \times [0, T], \quad (4.1.9)$$

$$D\nu = q_2, \quad \text{sur } \Gamma_b \times [0, T], \quad (4.1.10)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{et} \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (4.1.11)$$

Les équations (4.1.1) – (4.1.2) représentent la loi constitutive électro-visco-élastique que nous avons introduite dans (1.2.7) où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}$ représentent les opérateurs de viscosité et d'élasticité respectivement. ξ , ξ^* le tenseur piézoélectrique et son transposé, β dénote le champ de la permittivité électrique. Ensuite, l'équation (4.1.3) représente l'équation de mouvement où f_0 est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable Ω , et ρ désigne la masse volumique, (4.1.4) est l'équation d'équilibre des champs de déplacement électrique, que nous avons déjà vu dans (1.1.5) et (1.1.9). Les conditions (4.1.5) et (4.1.6) représentent les conditions aux limites déplacement-traction, tandis que (4.1.9) et (4.1.10) sont les conditions aux limites électriques que nous avons définis dans les chapitres précédents. Le contact de Signorini est modélisé par la condition (4.1.7) et le frottement est décrit par la relation (4.1.8) qui peut être écrite sous la forme (1.3.12). Finalement, (4.1.11) est les conditions initiales.

4.2 Formulation variationnelle

Nous donnons maintenant des hypothèses sur les données du problème

Supposons que l'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \exists M_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que } : |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)| \leq M_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) : \exists m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que } : |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2| \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (c) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (d) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

Supposons que l'opérateur d'élasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$, satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \exists M_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que } : |\mathcal{G}(x, \xi_1) - \mathcal{G}(x, \xi_2)| \leq M_{\mathcal{G}} |\xi_1 - \xi_2| \\ \forall \xi_1, \xi_2 \in S^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, \xi) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \xi \in S^d, \\ (c) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (4.2.2)$$

Le tenseur piézoélectrique $\xi = (e_{ijk}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \xi(x, \tau) = (e_{ijk}(x) \tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) : e_{ijk} = e_{ikj} \in \mathbb{L}^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (4.2.3)$$

Le tenseur de permittivité électrique $\beta = (\beta_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \beta(x, E) = (b_{ij}(x) E_j) \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) : b_{ij} = b_{ji} \in \mathbb{L}^\infty(\Omega), \\ (c) : \exists m_{\beta} > 0 \text{ tel que } : b_{ij}(x) E_i E_j \geq m_{\beta} |E|^2, \\ \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (4.2.4)$$

La fonction $p : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ seuil de frottement satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \exists M > 0 \text{ tel que : } |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq M |r_1 - r_2| \\ \text{pour tout } r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, p.p. x \in \Gamma_3, \\ (b) : \text{L'application } : x \rightarrow p(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}_+, \\ (c) : p(x, 0) = 0, p.p. x \in \Gamma_3, \end{array} \right. \quad (4.2.5)$$

tandis que le coefficient de frottement μ et la masse volumique ρ vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma_3), \mu(x) \geq 0 \text{ p.p. } x \text{ sur } \Gamma_3, \\ \rho \in \mathbb{L}^\infty(\Omega), \text{ il existe } \rho^* > 0 \text{ tel que } \rho \geq \rho^*, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (4.2.6)$$

Les forces volumiques, la traction surfacique et la densité des charges électriques volumiques et surfaciques vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ f_0 \in \mathbb{L}^2(0, T; H), \ h \in \mathbb{L}^2\left(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d\right), \\ (b) \ q_0 \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \ q_2 \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_b)). \end{array} \right. \quad (4.2.7)$$

Finalement, nous assumons les conditions initiales

$$u_0 \in V, \ v_0 \in \mathbb{L}^2(\Omega)^d. \quad (4.2.8)$$

Utilisant le théorème de Riesz, nous définissons les applications $f : [0, T] \rightarrow V'$ et $q : [0, T] \rightarrow W$ comme suit

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \int_{\Omega} f_0(t) v dx + \int_{\Gamma_2} h(t) v da, \quad \forall v \in V, t \in [0, T], \quad (4.2.9)$$

$$(q(t), \psi)_W = - \int_{\Omega} q_0(t) \psi dx + \int_{\Gamma_b} q_2(t) \psi da, \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T]. \quad (4.2.10)$$

On note que la condition (4.2.7) implique que

$$f \in \mathbb{L}^2(0, T; V'), \quad q \in \mathbb{L}^2(0, T; W). \quad (4.2.11)$$

Soit la fonctionnelle de frottement $j : \mathcal{H}_1 \times V \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$j(\sigma, v) = \int_{\Gamma_3} \mu p |R \sigma_\nu| |v_\tau| da. \quad (4.2.12)$$

On note par la suite $H = \mathbb{L}^2(\Omega)^d$ et on considère sur H le produit scalaire $((.,.))$ défini par

$$((u, v)) = (\rho u, v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}, \forall u, v \in H.$$

Soit $\|\cdot\|_H$ une norme associée définie par

$$\|v\|_H = (\rho v, v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}^{\frac{1}{2}}, \forall v \in H,$$

de l'hypothèse (4.2.6) il vient que $\|\cdot\|_H$ et $|\cdot|_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}$ sont des normes équivalentes sur H . De plus l'inclusion de la trace de $(V; \|\cdot\|_V)$ dans $(H; \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. Nous notons par V' l'espace dual de V . En identifiant H avec son propre dual, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$V \subset H = H' \subset V'.$$

Nous utilisons la notation $(.,.)_{V' \times V}$ pour la dualité entre V' et V , et nous avons

$$(u, v)_{V' \times V} = ((u, v)), \forall u \in H, \forall v \in V.$$

On note également par $|\cdot|_{V'}$ la norme du dual sur l'espace V' .

En utilisant les formules de Green (2.1.1) et (2.1.7), il résulte que si (u, σ, φ, D) sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (4.1.1) – (4.1.11), alors on a la formulation variationnelle suivante

Pblème $\mathcal{P}V_2$: Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, un champ potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ tels que

$$\begin{aligned} (\ddot{u}(t), w - \dot{u}(t))_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(w - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\sigma, w) - j(\sigma, \dot{u}(t)) &\geq (f(t), w - \dot{u}(t)), \\ \forall u, w \in V, \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

$$(D(t), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} + (q(t), \psi)_W = 0, \quad \forall \psi \in W, \tag{4.2.14}$$

Notre résultat principal d'existence et d'unicité est présenté dans la section suivante

4.3 Existence et unicité de la solution

L'existence d'une solution unique du problème variationnel $\mathcal{P}V_2$ est donnée par le théorème suivant

Théorème 4.3.1. Supposons que (4.2.1) – (4.2.8) sont vérifiées. Alors, le Problème $\mathcal{P}V_2$ possède une solution unique (u, φ) . En outre, la solution satisfait

$$u \in C^1(0, T; H) \cap W^{1,2}(0, T; V) \cap W^{2,2}(0, T; V'), \quad (4.3.1)$$

$$\varphi \in W^{1,2}(0, T; W), \quad (4.3.2)$$

Remarque 4.3.1. Un "quadruplet" des fonctions (u, σ, φ, D) qui satisfont (4.1.1), (4.1.2), (4.2.13) et (4.2.14) est appelé solution faible du problème de contact $\mathcal{P}V_2$. Nous concluons par le théorème (4.3.1) que, sous les hypothèses (4.2.1) – (4.2.10), (4.2.12) il existe une unique solution faible du Problème $\mathcal{P}V_2$. Pour préciser la régularité de la solution faible, notons que les relations constitutives (4.1.1), (4.1.2) et les hypothèses (4.2.1) – (4.2.8) et la régularité (4.3.1) – (4.3.2), montrent que $\sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H})$, et $D \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{W})$, de plus, en utilisant (4.1.1) et (4.1.2) il s'ensuit que (4.2.13) – (4.2.14) sont vérifiées pour tout $w \in V$, et $t \in [0, T]$. Nous prenons $z = \dot{u}(t) \pm z$ où $z \in C_0^\infty(\Omega)^d$ dans (4.2.13) et $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ dans (4.2.14), on trouve

$$\text{Div } \sigma(t) + f_0(t) = \rho \ddot{u}, \quad \text{div } D(t) = q_0(t), \quad p.p \text{ dans } \Omega, \quad \forall t \in [0, T],$$

Il s'ensuit maintenant des régularités (4.2.6) et (4.2.7) que $\text{Div } \sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)^d)$ et $\text{div } D \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$, ce qui montre que

$$\sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1), \text{Div } \sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; V'), \quad (4.3.3)$$

$$D \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{W}_1). \quad (4.3.4)$$

Nous concluons que la solution faible (u, σ, φ, D) du problème de contact électro-visco-élastique $\mathcal{P}V_2$ possède la régularité (4.3.1) – (4.3.4).

Démonstration du théorème 4.3.1 : L'objectif principal dans ce paragraphe, est d'établir la démonstration du théorème d'existence et d'unicité pour le problème variationnel $\mathcal{P}V_2$. A cette fin, nous supposons dans ce qui suit que (4.2.1) – (4.2.8) sont satisfaites et,

partout ci-dessous, nous dénotons par C une constante positive indépendante du temps et dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre. La démonstration se fait en plusieurs étapes. Elle est basée sur les arguments des inéquations d'évolution non linéaires de premier ordre, des équations d'évolutions linéaires de premier ordre et des arguments de point fixe.

Dans la première étape, pour $G \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1)$ et $\eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$, on considère le problème intermédiaire suivant

Problème $\mathcal{P}V_2^{G\eta}$: Trouver un champ de déplacement $u_{G\eta} : [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$\begin{cases} u_{G\eta}(t) \in U & (\ddot{u}_{G\eta}(t), w - \dot{u}_{G\eta}(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_{G\eta}(t)), \varepsilon(w - \dot{u}_{G\eta}(t)))_{\mathcal{H}} + \\ (\eta, w - \dot{u}_{G\eta}(t))_{V' \times V} + j(G, w) - j(G, \dot{u}_{G\eta}(t)) \geq (f(t), w - \dot{u}_{G\eta}(t)), \quad \forall w \in V, \end{cases} \quad (4.3.5)$$

$$\dot{u}_{G\eta}(0) = v(0) = v_0. \quad (4.3.6)$$

Nous utilisons le théorème de représentation de *Riesz – Fréchet* pour définir la fonction $f_\eta : [0, T] \rightarrow V'$ par

$$(f_\eta(t), w)_{V' \times V} = (f(t) - \eta(t), w)_{V' \times V}, \quad p.p.t \in [0, T], \forall w \in V. \quad (4.3.7)$$

D'après l'hypothèse (4.2.11) alors

$$f_\eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V'). \quad (4.3.8)$$

On définit l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ par

$$(Av, w)_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(v), \varepsilon(w))_{\mathcal{H}}, \quad \forall v, w \in V. \quad (4.3.9)$$

On pose maintenant $u_{G\eta} : [0, T] \rightarrow V$ une fonction définie par

$$u_{G\eta}(t) = \int_0^t v_{G\eta}(s) ds + u_0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.3.10)$$

On obtient l'inéquation variationnelle suivante

Problème $QV_2^{G\eta}$: Trouver un champ de déplacement $v_{G\eta} : \Omega \times [0, T] \rightarrow V$, tel que

$$\begin{aligned} & (\dot{v}_{G\eta}(t), w - v_{G\eta}(t))_{V' \times V} + (Av_{G\eta}(t), w - v_{G\eta}(t))_{V' \times V} + j(G, w) - j(G, v_{G\eta}(t)) \geq \\ & (f_\eta(t), w - v_{G\eta}(t))_{V' \times V}, \quad \forall w(t) \in V, \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

$$v_{G\eta}(0) = v_0. \quad (4.3.12)$$

Lemme 4.3.1. Pour tout $G \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1)$ et $\eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$, le problème $QV_2^{G\eta}$ admet une solution unique avec la régularité $v_{G\eta} \in C(0, T; H) \cap \mathbb{L}^2(0, T; V)$ et $\dot{v}_{G\eta} \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$.

Preuve. En utilisant l'injection continue de V dans $\mathbb{L}^2(\Gamma_3)^d$ alors j est continue et convexe. On définit la suite

$$j_\varepsilon(G, v) = \int_{\Gamma_3} \mu p |R G_\nu| \sqrt{|v_\tau|^2 + \varepsilon^2} da, \quad \forall v \in V, \forall \varepsilon > 0.$$

Sa dérivée de *Fréchet* est donnée par

$$j'_\varepsilon(G, v).w = \int_{\Gamma_3} \mu p |R G_\nu| \frac{(v_\tau, w_\tau)}{\sqrt{|v_\tau|^2 + \varepsilon^2}} da, \quad \forall v \in V, \forall \varepsilon > 0.$$

Donc j_ε est de classe C^1 . Des calculs algébriques directs montrent que pour tout $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$, et pour tous réels x et y , $n \geq 1$

$$\sqrt{(\alpha x + \beta y)^2 + \frac{1}{n}} \leq \alpha \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \beta \sqrt{y^2 + \frac{1}{n}},$$

d'où j_ε est convexe $\forall \varepsilon > 0$. On a

$$\exists C > 0, \forall w \in V, |j'_\varepsilon(G, w)|_{V'} \leq C |G|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}. \quad (4.3.13)$$

D'après (4.2.1) (b) et la monotonie de j'_ε , $A + j'_\varepsilon$ est un opérateur monotone. L'hypothèse (4.2.1) (a) implique que $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur de Lipschitz donc continu. D'où l'application $t \rightarrow A(u + tv)$ est continue et alors A est un opérateur hémicontinu. Puisque j'_ε est continu alors $A + j'_\varepsilon$ est un opérateur hémicontinu. Maintenant, d'après (4.2.1) (b) et la monotonie de j'_ε , nous trouvons

$$((A + j'_\varepsilon)u - (A + j'_\varepsilon)v, u - v)_{V' \times V} \geq m_A |u - v|_V^2, \quad \forall u, v \in V. \quad (4.3.14)$$

Alors $A + j'_\varepsilon$ est un opérateur monotone.

Nous choisissons $v = 0_V$ dans (4.3.14) et en utilisant l'inégalité $2\alpha\beta \leq m_{\mathcal{A}}\alpha^2 + \frac{1}{m_{\mathcal{A}}}\beta^2$, on obtient $\forall u, v \in V$

$$((A + j'_\varepsilon)u, u)_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} |u|_V^2 - |A0_V|_{V'} \quad |u|_V \geq \frac{1}{2} m_{\mathcal{A}} |u|_V^2 - \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} |A0_V|_{V'}^2.$$

Donc la condition (2.4.3) (a) est vérifiée pour $\omega = \frac{1}{2} m_{\mathcal{A}}$, $\lambda = \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} |A0_V|_{V'}^2 \in \mathbb{R}$.

Ensuite, en utilisant (4.2.1) (a) et (4.3.13) on obtient

$$|(A + j'_\varepsilon)u - (A + j'_\varepsilon)v|_{V'} \leq M_{\mathcal{A}} |u - v|_V + C.$$

Choisissant $v = 0_V$ on trouve

$$|(A + j'_\varepsilon)u|_V \leq C(|u|_V + 1), \quad \forall u \in V.$$

Alors la condition (2.4.3) (b) est vérifiée.

Enfin, nous rappelons que par (4.2.8) et (4.3.8) il résulte alors du théorème 2.4.3 qu'il existe $v_{G\eta}^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0, T; V) \cap C(0, T; H)$, $\dot{v}_{G\eta}^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$, tel que

$$\begin{cases} \dot{v}_{G\eta}^\varepsilon(t) + Av_{G\eta}^\varepsilon(t) + j'_\varepsilon(G, v_{G\eta}^\varepsilon) = f_\eta(t) \text{ dans } V', p.p.t \in [0, T], \\ v_{G\eta}^\varepsilon(0) = v_0. \end{cases} \quad (4.3.15)$$

Alors $v_{G\eta}^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; V')$ et on a

$$\begin{cases} (\dot{v}_{G\eta}^\varepsilon(t), w - v_{G\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} + (Av_{G\eta}^\varepsilon(t), w - v_{G\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} + j_\varepsilon(G, w) - j_\varepsilon(G, v_{G\eta}^\varepsilon(t)) \\ \geq (f_\eta(t), w - v_{G\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V}, \quad \forall w \in V, \quad p.p.t \in [0, T]. \end{cases} \quad (4.3.16)$$

De (4.3.15) on a

$$\begin{aligned} & (\dot{v}_{G\eta}^\varepsilon(t), v_{G\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} + (Av_{G\eta}^\varepsilon(t), v_{G\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} + j'_\varepsilon(G, v_{G\eta}^\varepsilon(t)) = \\ & (f_\eta(t), v_{G\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V}, \quad p.p.t \in [0, T]. \end{aligned}$$

$$\exists C > 0. \quad \forall t \in [0, T] : |v_{G\eta}^\varepsilon(t)|_H \leq C. \quad \int_0^T |v_{G\eta}^\varepsilon(t)|_V^2 \leq C. \quad \int_0^T |\dot{v}_{G\eta}^\varepsilon(t)|_{V'}^2 \leq C.$$

Donc il existe une sous-suite (v_{G_η}) telle que

$$\begin{aligned} v_{G_\eta}^\varepsilon &\rightharpoonup v_{G_\eta} \text{ dans } \mathbb{L}^2(0, T; V) \text{ et dans } \mathbb{L}^\infty(0, T; H). \\ \dot{v}_{G_\eta}^\varepsilon &\rightharpoonup \dot{v}_{G_\eta} \text{ faiblement étoile dans } \mathbb{L}^2(0, T; V'). \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Il vient que

$$v_{G_\eta}^\varepsilon \in C(0, T; H) \text{ et } v_{G_\eta}^\varepsilon(t) \rightharpoonup v_{G_\eta}(t) \text{ dans } H, \forall t \in [0, T]. \quad (4.3.18)$$

Par intégration de (4.3.16), on obtient $\forall w \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_0^T (\dot{v}_{G_\eta}^\varepsilon(t), w)_{V' \times V} dt + \int_0^T (Av_{G_\eta}^\varepsilon(t), w)_{V' \times V} dt + \int_0^T j_\varepsilon(G, w) dt \geq (f_\eta(t), w(t))_{V' \times V} \\ &\int_0^T (\dot{v}_{G_\eta}^\varepsilon(t), v_{G_\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt + \int_0^T (Av_{G_\eta}^\varepsilon(t), v_{G_\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt + \int_0^T j_\varepsilon(G, v_{G_\eta}^\varepsilon(t)) dt \geq (f_\eta(t), w(t))_{V' \times V} \\ &+ \frac{1}{2} |v_{G_\eta}^\varepsilon(T)|_H^2 - \frac{1}{2} |v_{G_\eta}^\varepsilon(0)|_H^2 + \int_0^T (Av_{G_\eta}^\varepsilon(t), v_{G_\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt + \int_0^T j_\varepsilon(G, v_{G_\eta}^\varepsilon(t)) dt. \end{aligned} \right. \quad (4.3.19)$$

De (4.3.17), (4.3.18) et la semi-continuité inférieure (voir [11]), on a $\forall w \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_0^T (\dot{v}_{G_\eta}(t), w - v_{G_\eta})_{V' \times V} dt + \int_0^T (Av_{G_\eta}(t), w - v_{G_\eta})_{V' \times V} dt + \int_0^T j(G, w) dt \\ &- \int_0^T j(G, v_{G_\eta}) dt \geq \int_0^T (f_\eta(t), w - v_{G_\eta})_{V' \times V} dt. \end{aligned} \right.$$

Ce qui implique que

$$\left\{ \begin{aligned} &(\dot{v}_{G_\eta}(t), w - v_{G_\eta})_{V' \times V} + (Av_{G_\eta}(t), w - v_{G_\eta})_{V' \times V} + j(G, w) - j(G, v_{G_\eta}) \\ &\geq (f_\eta(t), w - v_{G_\eta})_{V' \times V}, \forall w \in V, p.p. t \in [0, T]. \end{aligned} \right.$$

Donc le problème $QV_2^{G_\eta}$ admet au moins solution $v_{G_\eta} \in C(0, T; H) \cap \mathbb{L}^2(0, T; V)$ et $\dot{v}_{G_\eta} \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$.

Pour l'unicité, on pose $v_{G_\eta}^1, v_{G_\eta}^2$ deux solutions de $QV_2^{G_\eta}$. On utilise (4.3.11) on obtient pour tout $t \in [0, T]$

$$\left(\dot{v}_{G\eta}^2(t) - \dot{v}_{G\eta}^1(t), v_{G\eta}^2(t) - v_{G\eta}^1(t) \right)_{V' \times V} + \left(Av_{G\eta}^2(t) - Av_{G\eta}^1(t), v_{G\eta}^2(t) - v_{G\eta}^1(t) \right)_{V' \times V} \leq 0.$$

On intègre l'inéquation précédente et en utilisant (4.2.1) et (4.3.9) on obtient

$$\frac{1}{2} \left| v_{G\eta}^2(t) - v_{G\eta}^1(t) \right|_V^2 + m_{\mathcal{A}} \int_0^t \left| v_{G\eta}^2(s) - v_{G\eta}^1(s) \right|_V^2 ds \leq 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Ce qui implique

$$v_{G\eta}^1 = v_{G\eta}^2.$$

Dans le problème $\mathcal{P}V_2^{G\eta}$, on a le résultat suivant

Lemme 4.3.2. Le problème $\mathcal{P}V_2^{G\eta}$ possède une solution unique

$$u_{G\eta} \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1(0, T; H) \cap W^{2,2}(0, T; V').$$

Preuve. la preuve du lemme 4.3.2 est une conséquence du lemme 4.3.1 et la relation (4.3.10).

Dans l'étape suivante nous utilisons $u_{G\eta} \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1(0, T; H)$ la solution du problème $\mathcal{P}V_2^{G\eta}$ obtenue dans le lemme 4.3.2 pour considérer le problème suivant

Problème $\mathcal{P}V_2^{\varphi_{G\eta}}$: Trouver un champ potentiel électrique $\varphi_{G\eta} : \Omega \times [0, T] \rightarrow W$ tels que

$$(\beta \nabla \varphi_{G\eta}(t), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} - (\xi \varepsilon(u_{G\eta}(t)), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W, \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T]. \quad (4.3.20)$$

On a le résultat suivant

Lemme 4.3.3. Il existe une solution unique $\varphi_{G\eta} \in W^{1,2}(0, T; W)$ qui satisfait (4.3.20). De plus, si $\varphi_{G\eta_1}$ et $\varphi_{G\eta_2}$ sont deux solutions de (4.3.20). Alors, il existe une constante $C > 0$ tel que

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq C |u_1(t) - u_2(t)|_V, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.3.21)$$

Preuve. Soit $t \in [0, T]$. Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir l'opérateur $A_{G\eta} : W \rightarrow W$ par

$$(A_{G\eta}(t)\varphi, \psi)_W = (\beta \nabla \varphi_{G\eta}(t), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} - (\xi \varepsilon(u_{G\eta}(t)), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.3.22)$$

pour tout $\varphi, \psi \in W$. Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in W$; nous utilisons les hypothèses (4.2.4) pour trouver

$$(A_{G\eta}(t)\varphi_1 - A_{G\eta}(t)\varphi_1, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_\beta |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2. \quad (4.3.23)$$

Nous avons, aussi

$$(A_{G\eta}(t)\varphi_1 - A_{G\eta}(t)\varphi_1, \psi)_W \leq c_\beta |\varphi_1 - \varphi_2|_W |\psi|_W. \quad (4.3.24)$$

Les inégalités (4.3.23) et (4.3.24) montrent que l'opérateur $A_{G\eta}(t)$ est fortement monotone et de lipschitz sur W donc, nous utilisons un résultat standard sur les égalités variationnelles, il s'ensuit qu'il existe un unique élément $\varphi_{G\eta} \in W$ tel que

$$A_{G\eta}\varphi_{G\eta}(t) = q(t). \quad (4.3.25)$$

Nous combinons maintenant (4.3.22) et (4.3.25) pour déduire que $\varphi_{G\eta} \in W$ est l'unique solution de l'équation variationnelle (4.3.20).

Nous prouvons maintenant que $\varphi_{G\eta} \in W^{1,2}(0, T; W)$. Pour ceci, nous considérons

$t_1, t_2 \in [0, T]$ et pour des raisons de simplicité, nous écrivons $\varphi_{G\eta}(t_i) = \varphi_i$, $u_{G\eta}(t_i) = u_i$, $q(t_i) = q_i$, pour $i = 1, 2$. Moyennant (4.3.20), (4.2.3) et (4.2.4) nous dérivons l'inégalité

$$m_\beta |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 \leq c_\xi |u_1 - u_2|_V |\varphi_1 - \varphi_2|_W + |q_1 - q_2|_W |\varphi_1 - \varphi_2|_W. \quad (4.3.26)$$

Alors, nous avons

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq C(|u_1(t) - u_2(t)|_V + |q_1(t) - q_2(t)|_W), \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.3.27)$$

nous notons que la relation (4.2.10) implique que $q \in \mathbb{L}^2(0, T; W)$ et nous avons

$u_{G\eta} \in C^1(0, T; V)$. L'inégalité (4.3.27) implique que $\varphi_{G\eta} \in W^{1,2}(0, T; W)$.

Soient, maintenant $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$, $G_1, G_2 \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1)$ et, par simplicité, notons $\varphi_{G\eta}(t_i) = \varphi_i$, $u_{G\eta}(t_i) = u_i$ pour $i = 1, 2$. Nous utilisons, (4.3.20) et moyennant des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (4.3.26) on déduit que

$$m_\beta |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq c_\xi |u_1(t) - u_2(t)|_V + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.3.28)$$

Alors nous avons le résultat du lemme 4.3.3

Considérons maintenant l'opérateur

$$\begin{aligned}
 \Lambda : \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V') &\rightarrow \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V') \text{ défini par} \\
 \Lambda(G, \eta) &= (\Lambda_1(G), \Lambda_2(\eta)), \forall G \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1), \forall \eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V'), \\
 \Lambda_1(G_{G\eta}) &= \mathcal{A}\varepsilon(v_{G\eta}) + \mathcal{G}\varepsilon(u_{G\eta}) - \xi^* E(\varphi_{G\eta}), \\
 (\Lambda_2 \eta_{G\eta}, \varkappa)_{V' \times V} &= (\mathcal{G}\varepsilon(u_{G\eta}) - \xi^* E(\varphi_{G\eta}), \varkappa)_{V' \times V}, \forall \varkappa \in V, \\
 |\Lambda(G_1, \eta_1) - \Lambda(G_2, \eta_2)|^2 &= |\Lambda_1(G_1) - \Lambda_1(G_2)|^2 + |\Lambda_2(\eta_1) - \Lambda_2(\eta_2)|^2.
 \end{aligned} \tag{4.3.29}$$

Dans la dernière étape, nous montrons que l'opérateur Λ possède un point fixe unique

Lemme 4.3.4. Il existe un unique élément $(G^*, \eta^*) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V')$ tel que

$$\Lambda(G^*, \eta^*) = (G^*, \eta^*). \tag{4.3.30}$$

Preuve. Soient $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$, $G_1, G_2 \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1)$ et par simplicité, nous utilisons les notations u_i et φ_i pour les fonctions $u_{G\eta_i}$ et $\varphi_{G\eta_i}$ obtenues dans les lemmes 4.3.3 et 4.3.2 pour $i = 1, 2$. Soit $t \in [0, T]$

On a, d'un côté,

$$\Lambda_1(G_{G\eta}) = \mathcal{A}\varepsilon(v_{G\eta}) + \mathcal{G}\varepsilon(u_{G\eta}) - \xi^* E(\varphi_{G\eta}).$$

Ce qui donne

$$|G_1 - G_2|_{\mathcal{H}_1} \leq C(|v_1(t) - v_2(t)|_V + |u_1 - u_2|_V + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W). \tag{4.3.31}$$

En utilisant (4.3.21) nous obtenons

$$|G_1 - G_2|_{\mathcal{H}_1} \leq C(|v_1(t) - v_2(t)|_V + |u_1 - u_2|_V), \tag{4.3.32}$$

nous avons

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V ds. \tag{4.3.33}$$

Nous remplaçons cette inégalité dans (4.3.32), pour obtenir

$$|G_1 - G_2|_{\mathcal{H}_1} \leq C \left(|v_1(t) - v_2(t)|_V + \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V ds \right). \tag{4.3.34}$$

D'un autre côté, on a

$$(\Lambda_2 \eta_{G\eta}, \varkappa)_{V' \times V} = (\mathcal{G}\varepsilon(u_{G\eta}) - \xi^* E(\varphi_{G\eta}), \varkappa)_{V' \times V} \quad \forall \varkappa \in V.$$

Ce qui donne

$$|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'} \leq C(|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W + |u_1(t) - u_2(t)|_V). \quad (4.3.35)$$

Et gardant à l'esprit (4.3.21) et (4.3.33), nous trouvons que

$$|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'} \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V ds. \quad (4.3.36)$$

On utilise (4.3.5), on trouve

$$\begin{aligned} & (\dot{v}_1(t) - \dot{v}_2(t), v_1(t) - v_2(t)) + (\mathcal{A}\varepsilon(v_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2(t)), \varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t))) + \\ & (\eta_1(t) - \eta_2(t), v_1(t) - v_2(t)) + j(G_1, v_1(t)) - j(G_1, v_2(t)) - j(G_2, v_1(t)) + j(G_2, v_2(t)) \leq 0. \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

Et, on a

$$\begin{aligned} j(G_1, v_2(t)) - j(G_1, v_1(t)) - j(G_2, v_2(t)) + j(G_2, v_1(t)) &= \int_{\Gamma_3} \mu p |R G_{1\nu}| |v_{2\tau}| da - \\ &- \int_{\Gamma_3} \mu p |R G_{1\nu}| |v_{1\tau}| da - \int_{\Gamma_3} \mu p |R G_{2\nu}| |v_{2\tau}| da + \int_{\Gamma_3} \mu p |R G_{2\nu}| |v_{1\tau}| da. \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

Par (2.1.4), (4.2.5), (4.2.6) et on utilise les propriétés de R , on trouve

$$j(G_1, v_2(t)) - j(G_1, v_1(t)) - j(G_2, v_2(t)) + j(G_2, v_1(t)) \leq C |G_1 - G_2|_{\mathcal{H}_1} |v_1 - v_2|_V. \quad (4.3.39)$$

Donc, (4.3.37) devient

$$\begin{aligned} & (\dot{v}_1(t) - \dot{v}_2(t), v_1(t) - v_2(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(v_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2(t)), \varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t))) + \\ & (\eta_1(t) - \eta_2(t), v_1(t) - v_2(t)) \leq C |G_1 - G_2|_{\mathcal{H}_1} |v_1 - v_2|_V. \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

Par intégration, on utilise les conditions unitiales $v_1(0) = v_2(0) = v_0$, la relation (2.1.3), (4.2.1) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour trouver que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + m_{\mathcal{A}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq \\ \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'} |v_1(s) - v_2(s)|_V ds + C \int_0^t |G_1(s) - G_2(s)|_{\mathcal{H}_1} |v_1(s) - v_2(s)|_V ds. \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

Pour tout $t \in [0, T]$. On utilise l'inégalité $2ab \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} a^2 + m_{\mathcal{A}} b^2$ et $2ab \leq \frac{C}{m_{\mathcal{A}}} a^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{C} b^2$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + m_{\mathcal{A}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds \\ + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + \frac{C}{2m_{\mathcal{A}}} \int_0^t |G_1(s) - G_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 ds + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds. \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

On trouve

$$|v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \leq C \left(\int_0^t |G_1(s) - G_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 ds + \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds \right). \quad (4.3.43)$$

De (4.3.40)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + m_{\mathcal{A}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq \\ \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'} |v_1(s) - v_2(s)|_V ds + C \int_0^t |G_1(s) - G_2(s)|_{\mathcal{H}_1} |v_1(s) - v_2(s)|_V ds, \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

pour tout $t \in [0, T]$.

On utilise l'inégalité $2ab \leq \frac{2}{m_{\mathcal{A}}} a^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} b^2$ et $2ab \leq \frac{2C}{m_{\mathcal{A}}} a^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2C} b^2$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + m_{\mathcal{A}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds \\ + \frac{m_{\mathcal{A}}}{4} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + \frac{C}{m_{\mathcal{A}}} \int_0^t |G_1(s) - G_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 ds + \frac{m_{\mathcal{A}}}{4} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds. \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

On trouve

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq C \left(\int_0^t |\eta_1 - \eta_2|_{V'}^2 ds + \int_0^t |G_1 - G_2|_{\mathcal{H}_1}^2 ds \right). \quad (4.3.46)$$

A partir de (4.3.43) et (4.3.46), la relation (4.3.34) devient

$$|G_2(t) - G_1(t)|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C \left(\int_0^t |\eta_1 - \eta_2|_{V'}^2 ds + \int_0^t |G_1 - G_2|_{\mathcal{H}_1}^2 ds \right). \quad (4.3.47)$$

Par (4.3.36) et (4.3.46), on obtient

$$|\eta_1 - \eta_2|_{V'}^2 \leq C \left(\int_0^t |\eta_1 - \eta_2|_{V'}^2 ds + \int_0^t |G_1 - G_2|_{\mathcal{H}_1}^2 ds \right). \quad (4.3.48)$$

On utilise (4.3.29), pour trouver que

$$|\Lambda(G_1, \eta_1) - \Lambda(G_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V')}^2 \leq C \int_0^t |(G_1, \eta_1) - (G_2, \eta_2)|_{\mathcal{H}_1 \times V'}^2 ds. \quad (4.3.49)$$

Par récurrence, avec Λ^p la composée $p^{\text{ième}}$ de l'opérateur Λ , on a

$$|\Lambda^p(G_1, \eta_1) - \Lambda^p(G_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V')}^2 \leq \frac{(Ct)^p}{p!} |(G_1, \eta_1) - (G_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V')}^2. \quad (4.3.50)$$

Ce qui implique pour p suffisamment grand, l'application Λ^p est une contraction dans l'espace de Banach $\mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V')$. Alors, il existe un unique element

$(G^*, \eta^*) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V')$ tel que

$$\Lambda(G^*, \eta^*) = (G^*, \eta^*). \quad (4.3.51)$$

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du théorème 4.3.1.

Existence. Soit $(G^*, \eta^*) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1 \times V')$ le point fixe et soit (u^*, φ^*) la solution de $PV_2^{G\eta}$, $PV_2^{\varphi G\eta}$ pour $(G^*, \eta^*) = (G, \eta)$ pour $u^* = u_{G^*\eta^*}$ et $\varphi^* = \varphi_{G^*\eta^*}$. Nous concluons par (4.2.13) et (4.2.14) que (u^*, φ^*) possédant la régularité donnée par (4.3.1) et (4.3.2)

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (4.3.29) et l'unicité de la solution des problèmes $PV_2^{G\eta}$ et $P_{\theta G\eta}$ ce qui achève la démonstration.

Troisième partie

Analyse variationnelle de problèmes thermodynamiques de contact avec frottement et usure

Partie III

Analyse variationnelle de problèmes thermodynamiques de contact avec frottement et usure

Dans cette troisième partie, nous allons traiter deux problèmes dynamique de contact pour des corps thermo-viscoélastiques avec mémoire longue et usure où thermo-élasto-viscoplastique avec endommagement et usure.

Les deux problèmes sont modélisés par un contact bilatéral avec frottement sur une base rigide et mobile avec usure.

On établit pour chaque problème une formulation variationnelle et un résultat d'existence et d'unicité. La démonstration est basée sur un théorème d'existence et d'unicité de la solution des inéquations d'évolution non linéaires de premier ordre, des équations variationnelle du type paraboliques de premier ordre suivi d'un argument de point fixe.

Chapitre 5

Problème thermoviscoélastique avec mémoire longue et usure

Dans ce chapitre, nous considérons un problème thermodynamique d'un corps viscoélastique avec mémoire longue. Le contact bilatéral avec frottement sur une base rigide et mobile avec usure. Nous écrivons le problème mécanique et nous précisons les hypothèses adéquates sur les données afin d'obtenir la formulation variationnelle. Ensuite nous établissons notre résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. La démonstration est basée sur un théorème d'existence et d'unicité de la solution des inéquations d'évolution non linéaires de premier ordre, des équations variationnelle du type paraboliques de premier ordre suivi d'un argument de point fixe.

5.1 Formulation du problème

Le problème étudié dans ce chapitre entre dans le cadre physique $n^{\circ}2$ présenté dans le premier chapitre de la thèse et par conséquent nous utilisons le premier modèle mathématique, pour que l'étude soit complète, précisons que la loi de comportement est thermoviscoélastique avec mémoire longue du type (1.2.8) et la condition de contact avec frottement et usure sur la surface de contact Γ_3 est prescrite dans (1.4.5).

Alors, le modèle classique pour ce processus est le suivant

Problème P_3 : Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, la température $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ et l'usure

$\omega : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(u(t))) + \mathcal{G}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u(s))ds - \theta(t)\mathcal{M}, \text{ dans } \Omega \times [0, T] \quad (5.1.1)$$

$$\rho \ddot{u} = \text{Div}(\sigma) + f_0, \text{ dans } \Omega \times [0, T], \quad (5.1.2)$$

$$\dot{\theta} - \text{div}(K \nabla \theta) = -\mathcal{M} \cdot \nabla \dot{u} + q, \text{ dans } \Omega \times [0, T], \quad (5.1.3)$$

$$u = 0, \text{ sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (5.1.4)$$

$$\sigma \nu = h, \text{ sur } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (5.1.5)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu = -\alpha |\dot{u}_\nu|, & |\sigma_\tau| = -\mu \sigma_\nu, \\ \sigma_\tau = -\lambda (\dot{u}_\tau - v^*), & \lambda \geq 0, \dot{\omega} = -k v^* \sigma_\nu, k > 0. \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (5.1.6)$$

$$-k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \nu_j = k_e (\theta - \theta_R) - h_\tau (|\dot{u}_\tau|), \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (5.1.7)$$

$$\theta = 0, \text{ dans } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times [0, T], \quad (5.1.8)$$

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1, \theta(0) = \theta_0, \omega(0) = \omega_0, \text{ sur } \Omega. \quad (5.1.9)$$

L'équation (5.1.1) représente la loi de comportement d'un matériau thermo-viscoélastique avec mémoire longue. (5.1.2) représente l'équation du mouvement où f_0 est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable Ω , et ρ désigne la masse volumique. La condition (5.1.3) représente l'équation de la conservation d'énergie où $q(x, t)$ est la quantité de chaleur dans le volume Ω durant l'intervalle de temps où $K = (k_{ij})$ représente le tenseur de conductivité thermique, $\text{div}(K \nabla \theta) = (k_{ij} \theta_{,i})$ représente la densité du volume de la source température et $\mathcal{M}$ est un opérateur de dilatation thermique. Les conditions (5.1.4) et (5.1.5) sont des conditions déplacement- traction. La condition (5.1.6) représente la condition de contact avec frottement et usure sur la surface de contact Γ_3 . La condition (5.1.7) représente la condition au bord associée à la température dérivée de la condition de Fourier avec θ_R la température de fondation, k_e représente l'échange de la température entre le corps déformable et la fondation, h_τ la fonction tangentielle. (5.1.8) est la condition aux limites de la température sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. (5.1.9) représente les conditions initiales.

5.2 Formulation variationnelle

Nous donnons maintenant des hypothèses sur les données du problème

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \exists L_{\mathcal{A}} > 0 : |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) \text{ L'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est de Lebesgue mesurable dans } \Omega, \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (c) \text{ L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (5.2.1)$$

L'opérateur de viscosité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \exists L_{\mathcal{G}} > 0 : |\mathcal{G}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{G}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{G}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) \exists m_{\mathcal{G}} > 0 : (\mathcal{G}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{G}(x, \varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{G}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \\ (c) \text{ L'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, \varepsilon) \text{ est de Lebesgue mesurable dans } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (d) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (5.2.2)$$

Le tenseur de relaxation $\mathcal{B} : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ tel que $(t, x, \tau) \mapsto (\mathcal{B}_{ijkh}(t, x) \tau_{kh})$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{B}_{ijkh} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{L}^\infty(\Omega)), \\ (b) \mathcal{B}(t) \sigma \cdot \tau = \sigma \cdot \mathcal{B}(t) \tau, \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } t \in [0, T], \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (5.2.3)$$

La fonction $h_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \exists L_\tau > 0 : |h_\tau(x, r_1) - h_\tau(x, r_2)| \leq L_\tau |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (b) x \rightarrow h_\tau(x, r) \in \mathbb{L}^2(\Gamma_3) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}_+. \end{array} \right. \quad (5.2.4)$$

Nous supposons que la masse volumique, les forces volumiques et surfaciques satisfont

$$\rho \in \mathbb{L}^\infty(\Omega), \text{ il existe } \rho^* > 0 \text{ tel que } \rho \geq \rho^*, \text{ p.p. } x \in \Omega, \quad (5.2.5)$$

$$f_0 \in \mathbb{L}^2(0, T; H), \quad h \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d), \quad (5.2.6)$$

$$q \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad \theta_R \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3)), \quad k_e \in \mathbb{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+), \quad (5.2.7)$$

$$\mathcal{M} = (m_{ij}), \quad m_{ij} = m_{ji} \in \mathbb{L}^\infty(\Omega), \quad (5.2.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K = (k_{i,j}); \quad k_{ij} = k_{ji} \in \mathbb{L}^\infty(\Omega), \\ \exists c_k > 0, \forall (\xi_i) \in \mathbb{R}^d, k_{ij} \xi_i \xi_j \geq c_k \xi_i \xi_i. \end{array} \right. \quad (5.2.9)$$

Les données initiales satisfont les conditions suivantes

$$u_0 \in V, \quad u_1 \in \mathbb{L}^2(\Omega), \quad \theta_0 \in \mathbb{L}^2(\Omega), \quad \omega_0 \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma_3). \quad (5.2.10)$$

Les fonctions α et μ satisfont

$$\alpha \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma_3), \quad \alpha(x) \geq \alpha^* > 0, \quad p.p.\text{ sur } \Gamma_3, \quad (5.2.11)$$

$$\mu \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) > 0, \quad p.p.\text{ sur } \Gamma_3. \quad (5.2.12)$$

On note par la suite $H = \mathbb{L}^2(\Omega)^d$ et on considère sur H le produit scalaire $((.,.))$ défini par

$$((u, v)) = (\rho u, v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}, \quad \forall u, v \in H.$$

Soit $\|\cdot\|_H$ une norme associée définie par

$$\|v\|_H = (\rho v, v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H.$$

De l'hypothèse (5.2.5) il vient que $\|\cdot\|_H$ et $|\cdot|_H$ sont des normes équivalentes sur H . De plus l'inclusion de la trace de $(V; |\cdot|_V)$ dans $(H; \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. Notons par V' l'espace dual de V . En identifiant H avec son propre dual, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$V \subset H = H' \subset V'.$$

Nous utilisons la notation $(.,.)_{V' \times V}$ pour la dualité entre V' et V , et on a

$$(u, v)_{V' \times V} = ((u, v)), \quad \forall u \in H, \forall v \in V.$$

On note également par $|\cdot|_{V'}$ la norme du dual sur l'espace V' .

On définit l'espace suivant

$$E = \{\gamma \in H^1(\Omega) / \gamma = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}. \quad (5.2.13)$$

Finalement, nous considérons la fonctionnelle d'usure $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} \alpha |u_\nu| (\mu |v_\tau - v^*|) da. \quad (5.2.14)$$

On définit la fonctionnelle $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, par

$$\phi(u, v) = \int_{\Gamma_3} \alpha |u_\nu| v_\nu da, \forall v \in V. \quad (5.2.15)$$

On définit l'opérateur $G : V \rightarrow V'$ par

$$(Gv, w)_{V' \times V} = (\mathcal{G}(\varepsilon(v(t))), \varepsilon(w))_{\mathcal{H}}, \forall v, w \in V. \quad (5.2.16)$$

Utilisant le théorème de Riesz, nous définissons l'application $f : [0, T] \rightarrow V'$, comme suit

$$(f, v)_{V' \times V} = \int_{\Gamma_2} h v ds + \int_{\Omega} f_0 v dx. \quad (5.2.17)$$

Pour tout $t \in [0, T]$, et on note que la condition (5.2.6) implique que

$$f \in \mathbb{L}^2(0, T; V'), \quad (5.2.18)$$

On définit les opérateurs suivants $Q : [0, T] \rightarrow E'$; $K : E \rightarrow E'$ et $R : V \rightarrow E'$ par

$$(Q(t), \mu)_{E' \times E} = \int_{\Gamma_3} k_e \theta_R(t) \mu ds + \int_{\Omega} q \mu dx, \forall \mu \in E, \quad (5.2.19)$$

$$(K\tau, \mu)_{E' \times E} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_3} k_e \tau \mu ds, \quad \forall \mu \in E, \quad (5.2.20)$$

$$(Rv, \mu)_{E' \times E} = \int_{\Gamma_3} h_\tau (|v_\tau|) \mu dx - \int_{\Omega} (\mathcal{M} \cdot \nabla v) \mu dx, \quad \forall v \in V, \tau, \mu \in E. \quad (5.2.21)$$

En utilisant les formules de Green (2.1.1), il résulte que si $(u, \sigma, \theta, \omega)$ sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (5.1.1) – (5.1.9), alors on a la formulation variationnelle suivante

Pblème $\mathcal{PV}_3$: Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, la température $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ et l'usure

$\omega : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que

$$(\ddot{u}(t), w - \dot{u}(t))_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(w - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}, w) - j(\dot{u}, \dot{u}(t)) + \phi(\dot{u}, w) - \phi(\dot{u}, \dot{u}(t)) \quad (5.2.22)$$

$$\geq (f(t), w - \dot{u}(t)), \quad \forall u, w \in V,$$

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R\dot{u}(t) + Q(t), \quad \text{sur } E' \quad (5.2.23)$$

$$\dot{\omega} = -kv^* \sigma_\nu \quad (5.2.24)$$

Notre résultat principal d'existence et d'unicité est présenté dans la section suivante

5.3 Existence et unicité de la solution

L'existence d'une solution unique du problème variationnel $\mathcal{PV}_3$ est donnée par le théorème suivant

Théorème 5.3.1. Supposons que (5.2.1) – (5.2.8) et (5.2.10) – (5.2.12) soient vérifiés. Alors il existe une solution unique (u, θ, ω) au problème $\mathcal{PV}_3$. En outre, la solution satisfait

$$\begin{aligned} u &\in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1(0, T; H) \cap W^{2,2}(0, T; V') \\ \theta &\in W^{1,2}(0, T; E') \cap \mathbb{L}^2(0, T; E) \cap C(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)) \\ \omega &\in C^1(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3)) \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Remarque 5.3.1. Un "quadruplet" des fonctions $(u, \sigma, \theta, \omega)$ qui satisfont (5.1.1), (5.1.3) et (5.2.24) – (5.2.27) est appelé solution faible du problème de contact $\mathcal{PV}_3$. Nous concluons par le théorème 5.3.1 que, sous les hypothèses (5.2.1) – (5.2.8), (5.2.10) – (5.2.12) et (5.2.14) – (5.2.21) il existe une unique solution faible du Problème $\mathcal{PV}_3$. Pour préciser la régularité de la solution faible, notons que les relations constitutives (5.1.1), (5.1.3) et les hypothèses (5.2.1) – (5.2.8) et (5.2.10) – (5.2.12) et la régularité (5.3.1), montrent que $\sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H})$. On utilisant (5.1.1) et (5.1.3) il s'ensuit que (5.2.22) est vérifiée pour tout $w \in V$, et $t \in [0, T]$. Nous prenons $z = \dot{u}(t) \pm z$ où $z \in C_0^\infty(\Omega)^d$ dans (5.2.22), on trouve

$$\text{Div } \sigma(t) + f_0(t) = \rho \ddot{u}, \quad p.p \text{ dans } \Omega, \quad \forall t \in [0, T],$$

Il s'ensuit maintenant des régularités (5.2.5) et (5.2.6) que $\text{Div } \sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)^d)$ ce qui montre que

$$\sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1), \text{Div } \sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; V'). \quad (5.3.2)$$

Nous concluons que la solution faible $(u, \sigma, \theta, \omega)$ du problème de contact thermovisco-élastique $\mathcal{PV}_3$ possède la régularité (5.3.1) – (5.3.2).

Démonstration du Théorème 5.3.1. L'objectif principal dans ce paragraphe, est d'établir la démonstration du théorème d'existence et d'unicité pour le problème variationnel $\mathcal{PV}_3$. A cette fin, nous supposons dans ce qui suit que (5.2.1) – (5.2.8) et (5.2.10) – (5.2.12) sont satisfaites et, partout ci-dessous, nous dénotons par C une constante positive indépendante du temps et dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre. La démonstration se fait en plusieurs étapes. Elle est basée sur les arguments des inéquations d'évolution non linéaires de premier ordre, des équations d'évolutions paraboliques linéaires de premier ordre et des arguments de point fixe.

Dans la première étape, pour $g \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$ et $\eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$, on considère le problème intermédiaire suivant

Problème $\mathcal{PV}_3^{g\eta}$: Trouver un champ de déplacement $u_{g\eta}$ tel que

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}_{g\eta}(t), w - \dot{u}_{g\eta}(t))_{V' \times V} + (G\dot{u}_{g\eta}(t), w - \dot{u}_{g\eta}(t))_{V' \times V} + (\eta(t), w - \dot{u}_{g\eta}(t))_{V' \times V} \\ & j(g, w) - j(g, \dot{u}_{g\eta}(t)) \geq (f(t), w - \dot{u}_{g\eta}(t))_{V' \times V}, \quad \forall w \in V, t \in [0, T], \\ & u_{g\eta}(0) = u_0 \quad \dot{u}_{g\eta}(0) = u_1. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Nous utilisons le théorème de représentation de *Riesz – Fréchet* pour définir la fonction $f_\eta : [0, T] \rightarrow V'$ par

$$(f_\eta(t), w)_{V' \times V} = (f(t) - \eta(t), w)_{V' \times V} \quad p.p. t \in [0, T], \forall w \in V. \quad (5.3.4)$$

D'après l'hypothèse (5.2.18) alors

$$f_\eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V'). \quad (5.3.5)$$

On pose maintenant $u_{g\eta} : [0, T] \rightarrow V$ une fonction définie par

$$u_{g\eta}(t) = \int_0^t v_{g\eta}(s) ds + u_0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.3.6)$$

On obtient l'inéquation variationnelle suivante

Problème $QV_3^{g\eta}$: Trouver un champ de déplacement $v_{g\eta}$ tel que

$$\begin{aligned} (\dot{v}_{g\eta}(t), w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V} + (Gv_{g\eta}(t), w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V} + j(g, w) - j(g, v_{g\eta}(t)) \geq \\ (f_\eta(t), w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V}, \quad \forall w(t) \in V, \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

$$v_{g\eta}(0) = v_0. \quad (5.3.8)$$

Lemme 5.3.1. Pour tout $g \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$ et $\eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$, le problème $QV_3^{g\eta}$ admet une solution unique avec la régularité

$$v_{g\eta} \in C(0, T; H) \cap \mathbb{L}^2(0, T; V) \text{ et } \dot{v}_{g\eta} \in \mathbb{L}^2(0, T; V').$$

Preuve. En utilisant l'injection continue de V dans $\mathbb{L}^2(\Gamma_3)^d$ alors j est continue et convexe. On définit la suite

$$j_\varepsilon(g, v) = \int_{\Gamma_3} \alpha |g_\nu| \left(\mu \sqrt{|v_\tau - v^*|^2 + \varepsilon^2} \right) da, \quad \forall v \in V.$$

Sa dérivée de *Fréchet* est donnée par

$$j'_\varepsilon(g, v).w = \int_{\Gamma_3} \alpha \mu |g_\nu| \frac{(v_\tau - v^*, w_\tau)}{\sqrt{|v_\tau - v^*|^2 + \varepsilon^2}} da, \quad \forall v \in V, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Donc j_ε est de classe C^1 . Des calculs algébrique directs montrent que pour tout $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$, et pour tous réels x et $y, n \geq 1$

$$\sqrt{(\alpha x + \beta y)^2 + \frac{1}{n}} \leq \alpha \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \beta \sqrt{y^2 + \frac{1}{n}}.$$

D'où j_ε est convexe $\forall \varepsilon > 0$. On a

$$\exists C > 0, \forall v \in V, |j'_\varepsilon(g, v)|_{V'} \leq C |g|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}. \quad (5.3.9)$$

D'après (5.2.2)(b) et la monotonie de j'_ε , $G + j'_\varepsilon$ est un opérateur monotone. L'hypothèse (5.2.2)(a) implique que $G : V \rightarrow V'$ est un opérateur de Lipschitz donc continu. D'où l'application $t \rightarrow G(u + tv)$ est continue et alors G est un opérateur hémicontinu. Puisque j'_ε est continu alors $G + j'_\varepsilon$ est un opérateur hémicontinu. Maintenant, d'après (5.2.2)(b) et la monotonie de j'_ε , nous trouvons

$$((G + j'_\varepsilon)u - (G + j'_\varepsilon)v, u - v)_{V' \times V} \geq m_G |u - v|_V^2, \quad \forall u, v \in V. \quad (5.3.10)$$

Alors $G + j'_\varepsilon$ est un opérateur monotone.

Nous choisissons $v = 0_V$ dans (5.3.10) et en utilisant l'inégalité $2\alpha\beta \leq m_G\alpha^2 + \frac{1}{m_G}\beta^2$, on obtient $\forall u, v \in V$

$$((G + j'_\varepsilon)u, u)_{V' \times V} \geq m_G |u|_V^2 - |G0_V|_{V'}^2, \quad |u|_V \geq \frac{1}{2}m_G |u|_V^2 - \frac{1}{2m_G} |G0_V|_{V'}^2.$$

Donc la condition (2.4.3) (a) est vérifiée pour $\omega = \frac{1}{2}m_G$, $\lambda = \frac{1}{2m_G} |G0_V|_{V'}^2 \in \mathbb{R}$.

Ensuite, en utilisant (5.2.2)(a) et (5.3.9) on obtient

$$|(G + j'_\varepsilon)u - (G + j'_\varepsilon)v|_{V'} \leq L_G |u - v|_V + C.$$

Choissant $v = 0_V$ on trouve

$$|(G + j'_\varepsilon)u|_{V'} \leq C(|u|_V + 1), \quad \forall u \in V.$$

Alors la condition (2.4.3) (b) est vérifiée.

Enfin, nous rappelons que par (5.2.10) et (5.3.5) il résulte alors du théorème (2.4.3) qu'il existe $v_{g\eta}^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H)$, $\dot{v}_{g\eta}^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$, tel que

$$\begin{cases} \dot{v}_{g\eta}^\varepsilon(t) + Gv_{g\eta}^\varepsilon(t) + j'_\varepsilon(g, v_{g\eta}^\varepsilon) = f_\eta(t) \text{ dans } V', \text{ p.p.t. } \in [0, T], \\ v_{g\eta}^\varepsilon(0) = v_0. \end{cases} \quad (5.3.11)$$

Alors $v_{g\eta}^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; V')$ et on a

$$\begin{cases} (\dot{v}_{g\eta}^\varepsilon(t), w - v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} + (Gv_{g\eta}^\varepsilon(t), w - v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} + j_\varepsilon(g, w) - j_\varepsilon(g, v_{g\eta}^\varepsilon(t)) \\ \geq (f_\eta(t), w - v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V}, \quad \forall w \in V, \text{ p.p.t. } \in [0, T]. \end{cases} \quad (5.3.12)$$

De (5.3.11) on a

$$\begin{aligned} & (\dot{v}_{g\eta}^\varepsilon(t), v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} + (Gv_{g\eta}^\varepsilon(t), v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} + j'_\varepsilon(g, v_{g\eta}^\varepsilon(t)) = \\ & (f_\eta(t), v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V}, \quad \text{p.p.t. } \in [0, T]. \end{aligned}$$

En utilisant (5.2.2), la monotonie de j'_ε et (5.3.11) il vient que

$$\exists C > 0. \quad \forall t \in [0, T] : |v_{g\eta}^\varepsilon(t)|_H \leq C. \quad \int_0^T |v_{g\eta}^\varepsilon(t)|_V^2 \leq C. \quad \int_0^T |\dot{v}_{g\eta}^\varepsilon(t)|_{V'}^2 \leq C.$$

Donc il existe une sous-suite $(v_{g\eta})$ telle que

$$\begin{aligned} v_{g\eta}^\varepsilon &\rightharpoonup v_{g\eta} \text{ dans } \mathbb{L}^2(0, T; V) \text{ et dans } \mathbb{L}^\infty(0, T; H). \\ \dot{v}_{g\eta}^\varepsilon &\rightharpoonup \dot{v}_{g\eta} \text{ faiblement étoile dans } \mathbb{L}^2(0, T; V'). \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Il vient que

$$v_{g\eta}^\varepsilon \in C(0, T; H) \text{ et } v_{g\eta}^\varepsilon(t) \rightharpoonup v_{g\eta}(t) \text{ dans } H, \forall t \in [0, T]. \quad (5.3.14)$$

Par intégration de (5.3.12), on obtient $\forall w \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\dot{v}_{g\eta}^\varepsilon(t), w)_{V' \times V} dt + \int_0^T (Gv_{g\eta}^\varepsilon(t), w) dt + \int_0^T j_\varepsilon(g, w) dt \geq \int_0^T (\dot{v}_{g\eta}^\varepsilon(t), v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt \\ &+ \int_0^T (Gv_{g\eta}^\varepsilon(t), v_{g\eta}^\varepsilon(t)) dt + \int_0^T j_\varepsilon(g, v_{g\eta}^\varepsilon(t)) dt + \int_0^T (f_\eta(t), w - v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt \\ &\geq \frac{1}{2} |v_{g\eta}^\varepsilon(T)|_H^2 - \frac{1}{2} |v_{g\eta}^\varepsilon(0)|_H^2 + \int_0^T (Gv_{g\eta}^\varepsilon(t), v_{g\eta}^\varepsilon(t)) dt + \int_0^T j_\varepsilon(g, v_{g\eta}^\varepsilon(t)) dt \\ &+ \int_0^T (f_\eta(t), w - v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt. \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

De (5.3.13), (5.3.14) et la semi-continuité inférieure on a $\forall w \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\dot{v}_{g\eta}(t), w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V} dt + \int_0^T (Gv_{g\eta}(t), w - v_{g\eta}(t)) dt + \int_0^T (j(g, w) - j(g, v_{g\eta}(t))) dt \geq \\ &\geq \int_0^T (f_\eta(t), w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V} dt. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} &(\dot{v}_{g\eta}(t), w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V} + (Gv_{g\eta}(t), w - v_{g\eta}(t)) + j(g, w) - j(g, v_{g\eta}(t)) \geq (f_\eta(t), w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V}, \\ &\forall w \in V, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Donc le problème $QV_3^{g\eta}$ admet au moins une solution $v_{g\eta} \in C(0, T; H) \cap \mathbb{L}^2(0, T; V)$ et $\dot{v}_{g\eta} \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$.

Pour l'unicité, on pose $v_{g\eta}^1, v_{g\eta}^2$ deux solutions de $QV_3^{g\eta}$. On utilise (5.3.7) on obtient pour tout $t \in [0, T]$

$$\left(\dot{v}_{g\eta}^2(t) - \dot{v}_{g\eta}^1(t), v_{g\eta}^2(t) - v_{g\eta}^1(t) \right)_{V' \times V} + \left(Gv_{g\eta}^2(t) - Gv_{g\eta}^1(t), v_{g\eta}^2(t) - v_{g\eta}^1(t) \right)_{V' \times V} \leq 0.$$

On intègre l'inéquation précédente et en utilisant (5.2.2) et (5.2.16) on obtient

$$\frac{1}{2} \left| v_{g\eta}^2(t) - v_{g\eta}^1(t) \right|_V^2 + m_G \int_0^t \left| v_{g\eta}^2(s) - v_{g\eta}^1(s) \right|_V^2 ds \leq 0, \forall t \in [0, T].$$

Ce qui implique $v_{g\eta}^2 = v_{g\eta}^1$.

Dans l'étude du problème $\mathcal{P}V_3^{g\eta}$, on a le résultat suivant

Lemme 5.3.2. Le problème $\mathcal{P}V_3^{g\eta}$ possède une solution unique

$$u_{g\eta} \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1(0, T; H) \cap W^{2,2}(0, T; V').$$

Preuve. La preuve du lemme 5.3.2 est une conséquence du lemme 5.3.1 et la relation (5.3.6).

Dans l'étape suivante nous utilisons $u_{g\eta} \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1(0, T; H)$ la solution du problème $\mathcal{P}V_3^{g\eta}$ obtenue dans le lemme 5.3.2 pour considérer le problème suivant

Problème $P_{\theta g\eta}$: Trouver $\theta_{g\eta} \in E$ tel que

$$\dot{\theta}_{g\eta}(t) + K\theta_{g\eta}(t) = R\dot{u}_{g\eta}(t) + Q(t), \text{ sur } E'.$$

Lemme 5.3.3. Sous les hypothèses (5.2.4) – (5.2.10), le problème $P_{\theta g\eta}$ admet une solution unique

$$\theta_{g\eta} \in W^{1,2}(0, T, E') \cap \mathbb{L}^2(0, T; E) \cap C(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)).$$

Preuve. On a le triplet de Gelfand donné par $E \subset \mathbb{L}^2(\Omega) \subset E'$. On a $\theta_0 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$. L'opérateur K est linéaire et continu alors $a(\tau, \mu) = (K\tau, \mu)_{E' \times E}$ est bilinéaire, continue et coercive, en effet la continuité de $a(., .)$ est déduite des hypothèses (5.2.7) et (5.2.9) comme suit

$$\begin{aligned} a(\tau, \mu) &= (K\tau, \mu)_{E' \times E} \leq \|k\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)^{d \times d}} \|\nabla \tau\|_E \|\nabla \mu\|_E + \|k_e\|_{\mathbb{L}^\infty(\Gamma_3)} \|\tau\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)} \|\mu\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)} \\ &\leq C \|\tau\|_E \|\mu\|_E. \end{aligned}$$

On a

$$a(\tau, \tau) = (K\tau, \tau)_{E' \times E} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_3} k_e \tau^2 ds.$$

D'après (5.2.7) et (5.2.9) il existe une constante positive C telle que

$$(K\tau, \tau)_{E' \times E} \geq C |\tau|_E^2,$$

d'où la condition (iii) du théorème 2.4.5 est satisfaite. On a aussi $\theta_0 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$. Soit

$$F(t) \in E' : (F(t), \tau)_{E' \times E} = (R\dot{u}_{g\eta}(t) + Q(t), \tau) \quad \forall \tau \in E.$$

D'après l'hypothèse de (5.2.4) on a $\int_0^T |R\dot{u}|_{E'}^2 dt < \infty$. De (5.2.7), on a $\int_0^T |Q(t)|_{\mathbb{E}}^2 dt < \infty$ d'où $\int_0^T |F|_{E'}^2 dt < \infty$. Alors $F \in \mathbb{L}^2(0, T; E')$.

Alors d'après le théorème 2.4.5 $\exists! \theta_{g\eta} \in W^{1,2}(0, T; E') \cap \mathbb{L}^2(0, T; E) \cap C(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$.

Considérons maintenant l'opérateur

$\Lambda : \mathbb{L}^2(0, T; V \times V') \rightarrow \mathbb{L}^2(0, T; V \times V')$ est défini par

$$\Lambda(g, \eta) = (\Lambda_1(g), \Lambda_2(\eta)), \forall g \in \mathbb{L}^2(0, T; V), \forall \eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V'),$$

$$\Lambda_1(g) = v_{g\eta},$$

$$(\Lambda_2(\eta), w)_{V' \times V} = (\mathcal{A}(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(w))_{\mathcal{H}} + \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s) \varepsilon(u(s)) ds, \varepsilon(w) \right)_{\mathcal{H}} - (\theta(t) \mathcal{M}, \varepsilon(w))_{\mathcal{H}} + \phi(g, w)$$

$$\begin{aligned} |\Lambda(g_2, \eta_2) - \Lambda(g_1, \eta_1)|_{\mathbb{L}^2(0, T; V \times V')}^2 &= |(\Lambda_1(g_2), \Lambda_2(\eta_2)) - (\Lambda_1(g_1), \Lambda_2(\eta_1))|_{\mathbb{L}^2(0, T; V \times V')}^2 \\ &= |\Lambda_1(g_2) - \Lambda_1(g_1)|_{\mathbb{L}^2(0, T; V \times V')}^2 + |\Lambda_2(\eta_2) - \Lambda_2(\eta_1)|_{\mathbb{L}^2(0, T; V \times V')}^2. \end{aligned}$$

(5.3.16)

Lemme 5.3.4. L'opérateur $\Lambda : \mathbb{L}^2(0, T; V \times V') \rightarrow \mathbb{L}^2(0, T; V \times V')$ possède un point fixe unique $(g^*, \eta^*) \in \mathbb{L}^2(0, T; V \times V')$, tel que

$$\Lambda(g^*, \eta^*) = (g^*, \eta^*). \quad (5.3.17)$$

Preuve : Soient (g_i, η_i) des fonctions dans $\mathbb{L}^2(0, T; V \times V')$ et on denote par (u_i, θ_i) les fonctions obtenus dans le lemme 5.3.2 et le lemme 5.3.3,

pour $(g, \eta) = (g_i, \eta_i)$ $i = 1, 2$. Soit $t \in [0, T]$.

On a

$$\Lambda_1(g) = v_{g\eta} \quad (5.3.18)$$

Donc

$$|g_1(t) - g_2(t)|_V^2 \leq |v_1(t) - v_2(t)|_V^2. \quad (5.3.19)$$

On utilise la relation (5.3.7), on trouve

$$\begin{aligned} & (\dot{v}_1(t) - \dot{v}_2(t), v_1(t) - v_2(t)) + (\mathcal{G}\varepsilon(v_1(t)) - \mathcal{G}\varepsilon(v_2(t)), \varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t))) + \\ & (\eta_1(t) - \eta_2(t), v_1(t) - v_2(t)) + j(g_1, v_1(t)) - j(g_1, v_2(t)) - j(g_2, v_1(t)) + j(g_2, v_2(t)) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

De la définition de la fonctionnelle j donné par (5.2.14), on a

$$\begin{aligned} j(g_1, v_2(t)) - j(g_1, v_1(t)) - j(g_2, v_2(t)) + j(g_2, v_1(t)) &= \int_{\Gamma_3} (\alpha |g_{1\nu}| - \alpha |g_{2\nu}|) \\ & (\mu |v_{1\tau} - v^*| - \mu |v_{2\tau} - v^*|) da \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

Donc, on utilise (2.1.4), (5.2.11), (5.2.12), pour obtenir

$$j(g_2, v_2(t)) - j(g_2, v_1(t)) - j(g_1, v_2(t)) + j(g_1, v_1(t)) \leq C |g_1 - g_2|_V |v_1 - v_2|_V. \quad (5.3.22)$$

Par intégration, on utilise (2.1.3), (5.2.2), les conditions initiales $v_1(0) = v_2(0) = v_0$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz, donc (5.3.20) devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + m_{\mathcal{G}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq \\ & \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'} |v_1(s) - v_2(s)|_V ds + C \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V |v_1(s) - v_2(s)|_V ds. \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

De plus, utilisant l'inégalité $2ab \leq \frac{C}{m_{\mathcal{G}}} a^2 + \frac{m_{\mathcal{G}}}{C} b^2$ et $2ab \leq \frac{1}{m_{\mathcal{G}}} a^2 + m_{\mathcal{G}} b^2$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + m_{\mathcal{G}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq \frac{1}{2m_{\mathcal{G}}} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \\ & + \frac{m_{\mathcal{G}}}{2} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + C \times \frac{C}{2m_{\mathcal{G}}} \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 ds + C \times \frac{m_{\mathcal{G}}}{2C} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds. \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

On trouve

$$|v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \leq C \left(\int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds \right). \quad (5.3.25)$$

Donc (5.3.19) devient

$$|g_1 - g_2|_V^2 \leq C \left(\int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_V^2 ds \right). \quad (5.3.26)$$

Et, on a

$$\begin{aligned} (\Lambda_2(\eta), w)_{V' \times V} &= (\mathcal{A}(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(w))_{\mathcal{H}} + \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s) \varepsilon(u(s)) ds, \varepsilon(w) \right)_{\mathcal{H}} \\ &\quad - (\theta(t) \mathcal{M}, \varepsilon(w))_{\mathcal{H}} + \phi(g, w) \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

De la définition de la fonctionnelle ϕ donnée par (5.2.15), on a

$$\phi(g_1, v_2(t)) - \phi(g_1, v_1(t)) - \phi(g_2, v_2(t)) + \phi(g_2, v_1(t)) = \int_{\Gamma_3} (\alpha |g_{1\nu}| - \alpha |g_{2\nu}|) (v_{1\nu} - v_{2\nu}) da \quad (5.3.28)$$

Donc, on utilise (2.1.4), (5.2.11), pour obtenir

$$\phi(g_1, v_2(t)) - \phi(g_1, v_1(t)) - \phi(g_2, v_2(t)) + \phi(g_2, v_1(t)) \leq C |g_1 - g_2|_V |v_1 - v_2|_V. \quad (5.3.29)$$

Donc

$$|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}^2 \leq C \left(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + |g_1(t) - g_2(t)|_V^2 \right) \quad (5.3.30)$$

De plus, par (5.3.23), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + m_{\mathcal{G}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds &\leq \\ \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'} |v_1(s) - v_2(s)|_V ds + C \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V |v_1(s) - v_2(s)|_V ds &\end{aligned} \quad (5.3.31)$$

Pour tout $t \in [0, T]$.

De plus, on utilise l'inégalité $2ab \leq \frac{2C}{m_{\mathcal{G}}} a^2 + \frac{m_{\mathcal{G}}}{2C} b^2$ et $2ab \leq \frac{2}{m_{\mathcal{G}}} a^2 + \frac{m_{\mathcal{G}}}{2} b^2$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + m_{\mathcal{G}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds &\leq \frac{1}{m_{\mathcal{G}}} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_V^2 ds + \\ + \frac{m_{\mathcal{G}}}{4} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + C \times \frac{C}{m_{\mathcal{G}}} \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 ds &+ C \times \frac{m_{\mathcal{G}}}{4C} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds. \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

Donc

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq C \left(\int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 ds \right). \quad (5.3.33)$$

Puisque $u_i = u_0 + \int_0^t v_i(s) ds$, on a

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds. \quad (5.3.34)$$

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds \leq C \left(\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds \right). \quad (5.3.35)$$

Mais

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \geq 0.$$

$$\int_0^t \int_0^s |u_1(r) - u_2(r)|_V^2 dr ds \geq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} |u_1 - u_2|_V^2 + \int_0^t |u_1 - u_2|_V^2 ds &\leq C \int_0^t (|v_1(s) - v_2(s)|_V^2 + |u_1(s) - u_2(s)|_V^2) ds + \\ &+ \int_0^t \int_0^s |u_1 - u_2|_V^2 dr ds \\ |u_1 - u_2|_V^2 + \int_0^t |u_1 - u_2|_V^2 ds &\leq C \int_0^t (|v_1(s) - v_2(s)|_V^2 + |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 + \\ &+ \int_0^s |u_1(r) - u_2(r)|_V^2 dr) ds \end{aligned}$$

D'après Gronwall, on a

$$|u_1 - u_2|_V^2 + \int_0^t |u_1 - u_2|_V^2 ds \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds. \quad (5.3.36)$$

Par (5.3.33), on obtient

$$|u_1 - u_2|_V^2 + \int_0^t |u_1 - u_2|_V^2 ds \leq C \left(\int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 ds \right). \quad (5.3.37)$$

Et, par (5.2.23), on trouve

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t) \right)_{E' \times E} + (K(\theta_1) - K(\theta_2), \theta_1(t) - \theta_2(t))_{E' \times E} \\ &= (R(v_1) - R(v_2), \theta_1(t) - \theta_2(t))_{E' \times E}. \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

Par intégration sur $[0, t]$, on utilise les conditions initiales $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$, K est coercive et R est de Lipschitz.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds \leq \\ & C \left(\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} ds \right). \end{aligned}$$

De plus, utilisons l'inégalité $2ab \leq \frac{1}{2}a^2 + 2b^2$, pour trouver

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds \leq \\ & \frac{C}{4} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V ds + C \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

On obtient

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds. \quad (5.3.39)$$

Par (5.3.33), on trouve

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 ds \right). \quad (5.3.40)$$

Donc (5.3.30), devient

$$|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}^2 \leq C \left(\int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds \right). \quad (5.3.41)$$

On utilise (5.3.16), pour trouver que

$$|\Lambda(g_1, \eta_1) - \Lambda(g_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0, T; V \times V')}^2 \leq C \int_0^t |(g_1, \eta_1) - (g_2, \eta_2)|_{V \times V'}^2 ds. \quad (5.3.42)$$

Par récurrence, avec Λ^p la composée $p^{\text{ième}}$ de l'opérateur Λ , on a

$$|\Lambda^p(g_1, \eta_1) - \Lambda^p(g_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0, T; V \times V')}^2 \leq \frac{(Ct)^p}{p!} |(g_1, \eta_1) - (g_2, \eta_2)|_{\mathbb{L}^2(0, T; V \times V')}^2. \quad (5.3.43)$$

On sait que $\left(\frac{(Ct)^p}{p!}\right)$ converge vers 0, donc pour p assez grand $\frac{(Ct)^p}{p!} < 1$. C'est-à-dire que l'opérateur Λ^p est une contraction sur l'espace de Banach $\mathbb{L}^2(0, T; V \times V')$. Alors, il existe un unique $(g^*, \eta^*) \in \mathbb{L}^2(0, T; V \times V')$ tel que

$$\Lambda(g^*, \eta^*) = (g^*, \eta^*). \quad (5.3.44)$$

Soit l'opérateur $\mathcal{L} : C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3)) \rightarrow C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$, défini par

$$\mathcal{L}\omega(t) = -kv^* \int_0^t \sigma_\nu(s) ds, \forall t \in [0, T]. \quad (5.3.45)$$

Lemme 5.3.5. L'opérateur $\mathcal{L} : C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3)) \rightarrow C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$ possède un point fixe unique $\omega^* \in C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$, tel que

$$\mathcal{L}\omega^* = \omega^*.$$

Preuve : Soient $\omega_1, \omega_2 \in C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$, on dénote par $(u_i, \sigma_i, \theta_i)$ $i = 1, 2$ les solutions associées du problème PV alors

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}\omega_1(t) - \mathcal{L}\omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2 &\leq kv^* \int_0^t |\sigma_{1\nu}(s) - \sigma_{2\nu}(s)|^2 ds, \\ &\leq kv^* \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|^2 ds, \end{aligned}$$

En utilisant (5.1.1), on obtient

$$|\mathcal{L}\omega_1(t) - \mathcal{L}\omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \left(|u_1(s) - u_2(s)|_V^2 + \int_0^s |u_1(\tau) - u_2(\tau)|_V^2 d\tau + |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \right) ds. \quad (5.3.46)$$

D'après (5.3.36), on a

$$|u_1 - u_2|_V^2 + \int_0^t |u_1 - u_2|_V^2 ds \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds. \quad (5.3.47)$$

A partir de (5.3.39)

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds. \quad (5.3.48)$$

$$|u_1 - u_2|_V^2 + \int_0^t |u_1 - u_2|_V^2 ds + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \quad (5.3.49)$$

Donc

$$|u_1 - u_2|_V^2 + \int_0^t |u_1 - u_2|_V^2 ds + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + |\omega_1(t) - \omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2 \right)$$

D'après (5.3.36), on a

$$|u_1 - u_2|_V^2 + \int_0^t |u_1 - u_2|_V^2 ds + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \leq C |\omega_1(t) - \omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2 \quad (5.3.50)$$

Donc, (5.3.46) devient

$$|\mathcal{L}\omega_1(t) - \mathcal{L}\omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t |\omega_1(s) - \omega_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)} ds$$

Par récurrence, avec $\mathcal{L}^p$ la composée $p^{\text{ième}}$ de l'opérateur $\mathcal{L}$, on a

$$|\mathcal{L}^p \omega_1(t) - \mathcal{L}^p \omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)} \leq \frac{(Ct)^p}{p!} |\omega_1(t) - \omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}$$

On sait que $\left(\frac{(Ct)^p}{p!}\right)$ converge vers 0, donc pour p assez grand $\frac{(Ct)^p}{p!} < 1$. C'est-à-dire que l'opérateur $\mathcal{L}^p$ est une contraction sur l'espace de Banach $C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$. Alors, il existe un unique $\omega^* \in C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$ tel que

$$\mathcal{L}\omega^* = \omega^*.$$

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du théorème 5.3.1.

Existence. Soit $(g^*, \eta^*) \in \mathbb{L}^2(0, T; V \times V')$ le point fixe, $\omega^* \in C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$ le point fixe, et soit (u^*, θ^*) la solution de $PV_3^{g\eta}, P_{\theta g\eta}$ pour $(g^*, \eta^*) = (g, \eta)$ pour $u^* = u_{g^*\eta^*}$ et $\theta^* = \theta_{g^*\eta^*}$. Nous concluons par (5.2.22) et (5.2.23) que (u^*, θ^*) possédant la régularité donnée par (5.3.1).

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ et $\mathcal{L}$ définis par (5.3.16), (5.3.45) et l'unicité de la solution des problèmes $PV_3^{g\eta}$ et $P_{\theta g\eta}$ ce qui achève la démonstration.

Chapitre 6

Problème

thermo-élasto-viscoplastique avec endommagement et usure

Dans ce chapitre, nous considérons un problème modélisé par des conditions aux limites de contact avec frottement des matériaux thermo-élasto-viscoplastiques avec endommagement dans un processus dynamique. Le contact bilatéral avec frottement sur une base rigide et mobile avec usure. Le problème se formule comme un système formé par des inéquations d'évolution non linéaires de premier ordre, une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement et une équation variationnelle parabolique par rapport au champ de température.

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution du problème mathématique. Après avoir donné les hypothèses sur les données, on établit la formulation variationnelle de ce problème. Les preuves sont basées sur les résultats classiques des inéquations d'évolution non linéaires de premier ordre, les équations et inéquations variationnelles paraboliques et des arguments du point fixe.

6.1 Formulation du problème

Problème $\mathcal{P}_4$: Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ de température $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$, un champ d'endommagement $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et l'usure $\omega : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)) \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(s))), \varepsilon(u(s)), \theta(s)) ds, \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega \text{ p.p. } t \in [0, T], \quad (6.1.1)$$

$$\rho \ddot{u} = \text{Div } \sigma + f_0, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (6.1.2)$$

$$\dot{\theta} - K_0 \Delta \theta = \psi(\sigma, \varepsilon(\dot{u}), \theta) + q, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (6.1.3)$$

$$\dot{\beta} - K_1 \Delta \beta + \partial \varphi_K(\beta) \ni S(\varepsilon(u), \beta), \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (6.1.4)$$

$$u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (6.1.5)$$

$$\sigma \nu = h, \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (6.1.6)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu = -\alpha |\dot{u}_\nu|, & |\sigma_\tau| = -\mu \sigma_\nu, \\ \sigma_\tau = -\lambda (\dot{u}_\tau - v^*), & \lambda \geq 0, \dot{\omega} = -k v^* \sigma_\nu, \quad k > 0. \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (6.1.7)$$

$$k_0 \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + B \theta = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T], \quad (6.1.8)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T], \quad (6.1.9)$$

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (6.1.10)$$

L'équation (6.1.1) représente la loi de comportement thermo-élasto-viscoplastique, le processus est dynamique, (6.1.2) est l'équation de mouvement où f_0 est la densité des forces volumiques qui agissent sur le corps déformable Ω , et ρ désigne la masse volumique, (6.1.3) représente la conservation de l'énergie où ψ est une fonction constitutive non linéaire. L'inclusion (6.1.4) décrit l'évolution du champ d'endommagement. Les égalités (6.1.5) et (6.1.6) sont les conditions aux limites déplacement-traction. L'équation (6.1.7) représente la condition de contact avec frottement et usure sur la surface de contact Γ_3 . (6.1.8) et (6.1.9) représentent respectivement une condition à la limite de Fourier pour la température et une condition à la limite de Neumann homogène pour le domaine de l'endommagement sur Γ . Enfin, les fonctions $u_0, v_0, \theta_0, \beta_0$ et ω_0 dans (6.1.10) sont les données initiales.

6.2 Formulation variationnelle

Nous donnons maintenant des hypothèses sur les données du problème

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \exists M_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que } : |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)| \leq M_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, p. p. x \in \Omega, \\ (b) : \exists m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que } : |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2| \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, p. p. x \in \Omega, \\ (c) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (d) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (6.2.1)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \exists L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que} \\ |\mathcal{B}(x, \varepsilon_1, \alpha_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2, \alpha_2)| \leq L_{\mathcal{B}} (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, p. p. x \in \Omega, \\ (b) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{B}(x, \varepsilon, \alpha) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, \\ (c) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{B}(x, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (6.2.2)$$

L'opérateur de viscoplasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \exists L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ |\mathcal{G}(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \theta_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \theta_2)| \leq L_{\mathcal{G}} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\theta_1 - \theta_2|) \\ \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, p. p. x \in \Omega, \\ (b) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon, \theta) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } \theta \in \mathbb{R}, \\ (c) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (6.2.3)$$

La fonction constitutive non linéaire $\psi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \exists L_\psi > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\psi(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \theta_1) - \psi(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \theta_2)| \leq L_\psi (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\theta_1 - \theta_2|) \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in S^d, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d, \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, p.p. x \in \Omega, \\ (b) : \text{L'application } x \rightarrow \psi(x, \sigma, \varepsilon, \theta) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in S^d \text{ et } \theta \in \mathbb{R}, \\ (c) : \text{L'application } x \rightarrow \psi(x, 0, 0, 0) \in \mathbb{L}^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (6.2.4)$$

La fonction source d'endommagement $S : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \exists M_S > 0 \text{ telle que} \\ \quad |S(x, \varepsilon_1, \alpha_1) - S(x, \varepsilon_2, \alpha_2)| \leq M_S (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, p.p. x \in \Omega, \\ (b) : \text{L'application } x \rightarrow S(x, \varepsilon, \alpha) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, \\ (c) : \text{L'application } x \rightarrow S(x, 0, 0) \in \mathbb{L}^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (6.2.5)$$

La masse volumique ρ satisfait

$$\rho \in \mathbb{L}^\infty(\Omega) \text{ il existe } \rho^* > 0 \text{ telle que } \rho(x) \geq \rho^*, p.p. x \in \Omega. \quad (6.2.6)$$

Les forces volumiques, les tractions surfaciques, la source de chaleur externe et les fonctions α et μ ont la régularité

$$f_0 \in \mathbb{L}^2(0, T; H), \quad h \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d), \quad q \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad (6.2.7)$$

$$\alpha \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma_3) \quad \alpha(x) \geq \alpha^* > 0, \quad p.p. \text{ sur } \Gamma_3, \quad (6.2.8)$$

$$\mu \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) > 0, \quad p.p. \text{ sur } \Gamma_3. \quad (6.2.9)$$

L'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles K est défini par

$$K = \{ \beta \in H^1(\Omega) / 0 \leq \beta \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega \}.$$

Les données initiales satisfont les conditions suivantes

$$u_0 \in V, \quad \theta_0 \in \mathbb{L}^2(\Omega), \quad \beta_0 \in K, \quad \omega_0 \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma_3), \quad (6.2.10)$$

$$B > 0, \quad k_i > 0, \quad i = 0, 1. \quad (6.2.11)$$

Le théorème de représentation de Riesz entraîne l'existence d'un élément $f(t) \in V'$ tel que

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \int_{\Omega} f_0(t) v dx + \int_{\Gamma_2} h(t) v da \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T] \quad (6.2.12)$$

On note que la condition (6.2.7) implique que

$$f \in \mathbb{L}^2(0, T; V'). \quad (6.2.13)$$

Nous introduisons les formes bilinéaires suivantes

$$a_0 : \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_0(\zeta, \xi) = k_0 \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \xi dx + B \int_{\Gamma} \zeta \xi, \quad \forall \zeta, \xi \in \mathbb{L}^2(\Omega), \quad (6.2.14)$$

$$a_1 : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_1(\zeta, \xi) = k_1 \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \xi dx, \quad \forall \zeta, \xi \in H^1(\Omega). \quad (6.2.15)$$

Nous considérons la fonctionnelle d'usure $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} \alpha |u_\nu| (\mu |v_\tau - v^*|) da. \quad (6.2.16)$$

Finalement, on définit $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, par

$$\phi(u, v) = \int_{\Gamma_3} \alpha |u_\nu| v_\nu da, \quad \forall v \in V. \quad (6.2.17)$$

On note par la suite $H = \mathbb{L}^2(\Omega)^d$ et on considère sur H le produit scalaire $((.,.))$ défini par

$$((u, v)) = (\rho u, v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}, \quad \forall u, v \in H.$$

Soit $\|\cdot\|_H$ une norme associée définie par

$$\|v\|_H = (\rho v, v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}^{\frac{1}{2}} \forall v \in H.$$

De l'hypothèse (6.2.6) il vient que $\|\cdot\|_H$ et $|\cdot|_H$ sont des normes équivalentes sur H . De plus l'inclusion de la trace de $(V, |\cdot|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. Nous notons par V' l'espace dual de V . En identifiant H avec son propre dual, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$V \subset H = H' \subset V'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ pour la dualité entre V' et V , et on a

$$(u, v)_{V' \times V} = ((u, v)), \forall u \in H, \forall v \in V.$$

On note également par $|\cdot|_{V'}$ la norme du dual sur l'espace V' .

On définit l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ par

$$(Av, w)_{V' \times V} = (\mathcal{A}(\varepsilon(v(t))), \varepsilon(w))_{\mathcal{H}}, \forall v, w \in V. \quad (6.2.18)$$

En utilisant les formules de Green (2.1.1), il résulte que si $(u, \sigma, \theta, \beta, \omega)$ sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (6.1.1)–(6.1.10), alors on a la formulation variationnelle suivante

Problème $\mathcal{PV}_4$: Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ de température $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ d'endommagement $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et l'usure $\omega : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)) \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(s))), \varepsilon(u(s)), \theta(s)) ds, \text{ dans } \Omega \text{ p.p.t} \in [0, T], \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

$$\begin{aligned} &\langle \ddot{u}(t), w - \dot{u}(t) \rangle_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(w - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}, w) - j(\dot{u}, \dot{u}(t)) \\ &+ \phi(\dot{u}, w) - \phi(\dot{u}, \dot{u}(t)) \geq (f(t), w - \dot{u}(t)), \quad \forall u, w \in V \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

$$\begin{aligned} &(\dot{\theta}(t), w) + a_0(\theta(t), w) = \langle \psi(\sigma(t), \varepsilon(\dot{u}(t))), \theta(t), w \rangle_{V' \times V} \\ &+ (q(t), w)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall w \in V, \text{ p.p.t} \in [0, T], \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

$$\begin{aligned} &(\dot{\beta}(t), \zeta - \beta(t))_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + a_1(\beta(t), \zeta - \beta(t)) \geq \\ &(S(\varepsilon(u(t)), \beta), \zeta - \beta(t))_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in K, \text{ p.p.t} \in [0, T], \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

$$\dot{\omega} = -kv^* \sigma_\nu, \quad k > 0 \quad (6.2.23)$$

$$u(0) = u_0, v(0) = v_0, \theta(0) = \theta_0, \beta(0) = \beta_0, \omega(0) = \omega_0, \text{ dans } \Omega. \quad (6.2.24)$$

Notre résultat principal d'existence et d'unicité est présenté dans la section suivante

6.3 Existence et unicité de la solution

L'existence d'une solution unique du problème variationnel $\mathcal{P}V_4$ est donnée par le théorème suivant

Théorème 6.3.1. Supposons que (6.2.1) – (6.2.11) sont vérifiées. Alors, le Problème $\mathcal{P}V_4$ admet une unique solution $(u, \theta, \beta, \omega)$ qui satisfait

$$u \in C^1(0, T; H) \cap W^{1,2}(0, T; V) \cap W^{2,2}(0, T; V') \quad (6.3.1)$$

$$\theta \in W^{1,2}(0, T; (H^1(\Omega))') \cap \mathbb{L}^2(0, T; H^1(\Omega)) \quad (6.3.2)$$

$$\beta \in W^{1,2}(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)) \cap \mathbb{L}^2(0, T; H^1(\Omega)) \quad (6.3.3)$$

$$\omega \in C^1(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3)) \quad (6.3.4)$$

Remarque 6.3.1. Un "quintuplet" des fonctions $(u, \sigma, \theta, \beta, \omega)$ qui satisfont (6.1.1), (6.1.3), (6.1.4) et (6.2.19) – (6.2.23) est appelé solution faible du problème de contact $\mathcal{P}V_4$. Nous concluons par le théorème 6.3.1 que, sous les hypothèses (6.2.1) – (6.2.11), il existe une unique

solution faible du Problème $\mathcal{PV}_4$. Pour préciser la régularité de la solution faible, notons que les relations constitutives (6.1.1), (6.1.3) et (6.1.4) et les hypothèses (6.2.1) – (6.2.18) et la régularité (6.3.1), montrent que $\sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H})$. Nous prenons $z = \dot{u}(t) \pm z$ où $z \in C_0^\infty(\Omega)^d$ dans (6.2.20), on trouve

$$\text{Div } \sigma(t) + f_0(t) = \rho \ddot{u}, \quad p.p \text{ dans } \Omega, \forall t \in [0, T],$$

Il s'ensuit maintenant des régularités (6.2.6) et (6.2.7) que $\text{Div } \sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)^d)$ ce qui montre que

$$\sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}_1), \text{Div } \sigma \in \mathbb{L}^2(0, T; V'). \quad (6.3.5)$$

Nous concluons que la solution faible $(u, \sigma, \theta, \beta, \omega)$ du problème de contact thermo-élasto- viscoplastique $\mathcal{PV}_4$ possède la régularité (6.3.1) – (6.3.5).

Démonstration du théorème 6.3.1. L'objectif principal dans ce paragraphe, est d'établir la démonstration du théorème d'existence et d'unicité pour le problème variationnel $\mathcal{PV}_4$. Pour ceci, nous supposons dans ce qui suit que (6.2.1) – (6.2.11) sont satisfaites et, partout ci-dessous, nous dénotons par C une constante positive indépendante du temps et dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre. La démonstration se fait en plusieurs étapes. Elle est basée sur les arguments des inéquations d'évolution non linéaires de premier ordre, les équations et inéquations variationnelles paraboliques et des arguments du point fixe.

Dans la première étape, pour $g \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$ et $\eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$, on considère le problème intermédiaire suivant

Problème $\mathcal{PV}_4^{g\eta}$: Trouver un champ de déplacement $u_{g\eta} : [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$\begin{cases} u_{g\eta}(t) \in V & (\ddot{u}_{g\eta}(t), w - \dot{u}_{g\eta}(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_{g\eta}(t)), \varepsilon(w - \dot{u}_{g\eta}(t)))_{\mathcal{H}} + \\ & (\eta, w - \dot{u}_{g\eta}(t))_{V' \times V} + j(g, w) - j(g, \dot{u}_{g\eta}(t)) \geq (f(t), w - \dot{u}_{g\eta}(t)), \quad \forall w \in V. \end{cases} \quad (6.3.6)$$

$$\dot{u}_{g\eta}(0) = v(0) = v_0. \quad (6.3.7)$$

On définit $f_\eta(t) \in V'$ pour tout $t \in [0, T]$ par

$$(f_\eta(t), w)_{V' \times V} = (f(t) - \eta(t), w)_{V' \times V}, \forall w \in V. \quad (6.3.8)$$

D'après l'hypothèse (6.2.13) alors

$$f_\eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V'). \quad (6.3.9)$$

On pose maintenant $u_{g\eta} : [0, T] \rightarrow V$ une fonction définie par

$$u_{g\eta}(t) = \int_0^t v_{g\eta}(s) ds + u_0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.3.10)$$

On obtient l'inéquation variationnelle suivante

Problème $QV_4^{g\eta}$: Trouver un champ de déplacement $v_{g\eta} : [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$\begin{aligned} & (\dot{v}_{g\eta}(t), w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V} + (Av_{g\eta}(t), w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V} + j(g, w) - j(g, v_{g\eta}(t)) \geq \\ & (f_\eta(t), w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V}, \quad \forall w(t) \in V, \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

$$v_{g\eta}(0) = v_0. \quad (6.3.12)$$

Lemme 6.3.1. Pour tout $g \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$ et $\eta(t) \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$, le problème $QV_4^{g\eta}$ admet une solution unique avec la régularité

$$v_{g\eta} \in C(0, T; H) \cap \mathbb{L}^2(0, T; V) \text{ et } \dot{v}_{g\eta} \in \mathbb{L}^2(0, T; V'). \quad (6.3.13)$$

Preuve. En utilisant l'injection continue de V dans $\mathbb{L}^2(\Gamma_3)^d$ alors j est continue et convexe. On définit la suite

$$j_\varepsilon(g, v) = \int_{\Gamma_3} \alpha |g_\nu| \left(\mu \sqrt{|v_\tau - v^*|^2 + \varepsilon^2} \right) da, \quad \forall v \in V.$$

Sa dérivée de *Fréchet* est donnée par

$$j'_\varepsilon(g, v).w = \int_{\Gamma_3} \alpha \mu |g_\nu| \frac{(v_\tau - v^*, w_\tau)}{\sqrt{|v_\tau - v^*|^2 + \varepsilon^2}} da, \quad \forall v \in V, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Donc j_ε est de classe C^1 . Des calculs algébriques directs montrent que pour tout $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$, et pour tous réels x et y , $n \geq 1$

$$\sqrt{(\alpha x + \beta y)^2 + \frac{1}{n}} \leq \alpha \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \beta \sqrt{y^2 + \frac{1}{n}}.$$

D'où j_ε est convexe $\forall \varepsilon > 0$. On a

$$\exists C > 0, \forall v \in V, |j'_\varepsilon(g, v)|_{V'} \leq C |g|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}. \quad (6.3.14)$$

D'après (6.2.1)(b) et la monotonie de j'_ε , $A + j'_\varepsilon$ est un opérateur monotone. L'hypothèse (6.2.1)(a) implique que $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur de Lipschitz donc continu. D'où l'application $t \rightarrow A(u + tv)$ est continue et alors A est un opérateur hémicontinu. Puisque j'_ε est continu alors $A + j'_\varepsilon$ est un opérateur hémicontinu. Maintenant, d'après (6.2.1)(b) et la monotonie de j'_ε , nous trouvons

$$((A + j'_\varepsilon)u - (A + j'_\varepsilon)v, u - v)_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} |u - v|_V^2, \quad \forall u, v \in V. \quad (6.3.15)$$

Alors $A + j'_\varepsilon$ est un opérateur monotone.

Nous choisissons $v = 0_V$ dans (6.3.15) et en utilisant l'inégalité $2\alpha\beta \leq m_{\mathcal{A}}\alpha^2 + \frac{1}{m_{\mathcal{A}}}\beta^2$, on obtient $\forall u, v \in V$

$$((A + j'_\varepsilon)u, u)_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} |u|_V^2 - |A0_V|_{V'}^2, \quad |u|_V \geq \frac{1}{2} m_{\mathcal{A}} |u|_V^2 - \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} |A0_V|_{V'}^2.$$

Donc la condition (2.4.3) (a) est vérifiée pour $\omega = \frac{1}{2} m_{\mathcal{A}}$, $\lambda = \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} |A0_V|_{V'}^2 \in \mathbb{R}$.

Ensuite, en utilisant (6.2.1)(a) et (6.3.14) on obtient

$$|(A + j'_\varepsilon)u - (A + j'_\varepsilon)v|_{V'} \leq L_{\mathcal{A}} |u - v|_V + C.$$

Choissant $v = 0_V$ on trouve

$$|(A + j'_\varepsilon)u|_{V'} \leq C(|u|_V + 1), \quad \forall u \in V.$$

Alors la condition (2.4.3) (b) est vérifiée.

Enfin, nous rappelons que par (6.2.10) et (6.3.9) il résulte alors du théorème 2.4.3 qu'il existe $v_{g\eta}^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0, T; V) \cap C(0, T; H)$, $\dot{v}_{g\eta}^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$, tel que

$$\begin{cases} \dot{v}_{g\eta}^\varepsilon(t) + Av_{g\eta}^\varepsilon(t) + j'_\varepsilon(g, v_{g\eta}^\varepsilon) = f_\eta(t) \text{ dans } V', p.p. t \in [0, T], \\ v_{g\eta}^\varepsilon(0) = v_0. \end{cases} \quad (6.3.16)$$

Alors $v_{g\eta}^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; V')$ et on a

$$\begin{cases} (\dot{v}_{g\eta}^\varepsilon(t), w - v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} + (Av_{g\eta}^\varepsilon(t), w - v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} + j_\varepsilon(g, w) - j_\varepsilon(g, v_{g\eta}^\varepsilon(t)) \\ \geq (f_\eta(t), w - v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V}, \quad \forall w \in V, \quad p.p.t \in [0, T] \end{cases} \quad (6.3.17)$$

De (6.3.16), on obtient

$$\begin{aligned} & (\dot{v}_{g\eta}^\varepsilon(t), v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} + (Av_{g\eta}^\varepsilon(t), v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} + j'_\varepsilon(g, v_{g\eta}^\varepsilon(t)) = \\ & (f_\eta(t), v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V}, \quad p.p.t \in [0, T]. \end{aligned}$$

En utilisant (6.2.1), la monotonie de j'_ε et (6.3.16) il vient que

$$\exists C > 0. \quad \forall t \in [0, T] : |v_{g\eta}^\varepsilon(t)|_H \leq C. \quad \int_0^T |v_{g\eta}^\varepsilon(t)|_V^2 \leq C. \quad \int_0^T |\dot{v}_{g\eta}^\varepsilon(t)|_{V'}^2 \leq C.$$

Donc il existe une sous-suite $(v_{g\eta})$ telle que

$$\begin{aligned} v_{g\eta}^\varepsilon & \rightharpoonup v_{g\eta} \text{ dans } \mathbb{L}^2(0, T; V) \text{ et dans } \mathbb{L}^\infty(0, T; H), \\ \dot{v}_{g\eta}^\varepsilon & \rightharpoonup \dot{v}_{g\eta} \text{ faiblement étoile dans } \mathbb{L}^2(0, T; V'). \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

Il vient que

$$v_{g\eta}^\varepsilon \in C(0, T; H) \text{ et } v_{g\eta}^\varepsilon(t) \rightharpoonup v_{g\eta}(t) \text{ dans } H, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.3.19)$$

Par intégration de (6.3.17), on obtient $\forall w \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$

$$\begin{cases} \int_0^T (\dot{v}_{g\eta}^\varepsilon(t), w)_{V' \times V} + \int_0^T (Av_{g\eta}^\varepsilon(t), w)_{V' \times V} dt + \int_0^T j_\varepsilon(g, w) dt \geq (f_\eta(t), w - v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} + \\ \int_0^T (\dot{v}_{g\eta}^\varepsilon(t), v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt + \int_0^T (Av_{g\eta}^\varepsilon(t), v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt + \int_0^T j_\varepsilon(g, v_{g\eta}^\varepsilon(t)) dt \geq (f_\eta(t), w - v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} \\ + \frac{1}{2} |v_{g\eta}^\varepsilon(T)|_H^2 - \frac{1}{2} |v_{g\eta}^\varepsilon(0)|_H^2 + \int_0^T (Av_{g\eta}^\varepsilon(t), v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt + \int_0^T j_\varepsilon(g, v_{g\eta}^\varepsilon(t)) dt. \end{cases} \quad (6.3.20)$$

De (6.3.18), (6.3.19) et la semi-continuité inférieure on a $\forall w \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T (\dot{v}_{g\eta}(t), w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V} dt + \int_0^T (Av_{g\eta}(t), w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V} dt + \int_0^T j(g, w) dt \\ - \int_0^T j(g, v_{g\eta}(t)) dt \geq \int_0^T (f_\eta(t), w - v_{g\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt. \end{array} \right.$$

Ce qui implique

$$\left\{ \begin{array}{l} (\dot{v}_{g\eta}(t), w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V} + (Av_{g\eta}(t), w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V} + j(g, w) - j(g, v_{g\eta}(t)) \\ \geq (f_\eta(t), w - v_{g\eta}(t))_{V' \times V}, \forall w \in V, p.p. t \in [0, T]. \end{array} \right.$$

Donc le problème $QV_4^{g\eta}$ admet au moins une solution $v_{g\eta} \in C(0, T; H) \cap \mathbb{L}^2(0, T; V)$ et $\dot{v}_{g\eta} \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$.

Pour l'unicité, on pose $v_{g\eta}^1, v_{g\eta}^2$ deux solutions de $QV_4^{g\eta}$. On utilise (6.3.11) on obtient pour tout $t \in [0, T]$

$$(\dot{v}_{g\eta}^2(t) - \dot{v}_{g\eta}^1(t), v_{g\eta}^2(t) - v_{g\eta}^1(t))_{V' \times V} + (Av_{g\eta}^2(t) - Av_{g\eta}^1(t), v_{g\eta}^2(t) - v_{g\eta}^1(t))_{V' \times V} \leq 0.$$

On intègre l'inéquation précédente et en utilisant (6.2.1) et (6.2.18) on obtient

$$\frac{1}{2} |v_{g\eta}^2(t) - v_{g\eta}^1(t)|_V^2 + m_A \int_0^t |v_{g\eta}^2(s) - v_{g\eta}^1(s)|_V^2 ds \leq 0, \forall t \in [0, T].$$

Ce qui implique

$$v_{g\eta}^1 = v_{g\eta}^2.$$

Dans l'étude du problème $\mathcal{P}V_4^{g\eta}$, on a le résultat suivant

Lemme 6.3.2. Le problème $\mathcal{P}V_4^{g\eta}$ possède une solution unique

$$u_{g\eta} \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1(0, T; H) \cap W^{2,2}(0, T; V').$$

Preuve. La preuve du lemme 6.3.2 est une conséquence du lemme 6.3.1 et la relation (6.3.10).

Considérons maintenant l'opérateur $\Lambda_\eta(g) : \mathbb{L}^2(0, T; V) \rightarrow \mathbb{L}^2(0, T; V)$, défini par

$$\Lambda_\eta(g) = v_{g\eta}. \quad (6.3.21)$$

On a le lemme suivant

Lemme 6.3.3. l'opérateur Λ_η a un point fixe unique $g_\eta^* \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$

Preuve. Soient $g_1, g_2 \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$ et soit $\eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$.

On utilise la relation (6.3.11), on trouve

$$\begin{aligned} & (\dot{v}_1(t) - \dot{v}_2(t), v_1(t) - v_2(t)) + (\mathcal{A}\varepsilon(v_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2(t)), \varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t))) + \\ & + j(g_1, v_1(t)) - j(g_1, v_2(t)) - j(g_2, v_1(t)) + j(g_2, v_2(t)) \leq 0. \end{aligned} \quad (6.3.22)$$

De la définition de la fonctionnelle j donnée par (6.2.16), on a

$$\begin{aligned} j(g_1, v_2(t)) - j(g_1, v_1(t)) - j(g_2, v_2(t)) + j(g_2, v_1(t)) &= \int_{\Gamma_3} (\alpha |g_{1\nu}| - \alpha |g_{2\nu}|) \\ & (\mu |v_{1\tau} - v^*| - \mu |v_{2\tau} - v^*|) da. \end{aligned} \quad (6.3.23)$$

On utilise (6.2.8), (6.2.9) et (2.1.4) pour trouver

$$j(g_1, v_2(t)) - j(g_1, v_1(t)) - j(g_2, v_2(t)) + j(g_2, v_1(t)) \leq C |g_1 - g_2|_V |v_1 - v_2|_V. \quad (6.3.24)$$

Par intégration, on utilise les conditions initiales $v_2(0) = v_1(0) = v_0$, la relation (6.2.1) et (6.3.24) donc (6.3.22) devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |v_2(t) - v_1(t)|_V^2 + m_A \int_0^t |v_2(s) - v_1(s)|_V^2 ds \leq \\ & C \int_0^t |g_2(s) - g_1(s)|_V |v_2(s) - v_1(s)|_V ds. \end{aligned} \quad (6.3.25)$$

De plus, utilisons l'inégalité $2ab \leq \frac{C}{m_A} a^2 + \frac{m_A}{C} b^2$, pour trouver

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |v_2(t) - v_1(t)|_V^2 + \frac{m_A}{2} \int_0^t |v_2(s) - v_1(s)|_V^2 ds \leq \\ & C \times \frac{C}{2m_A} \int_0^t |g_2(s) - g_1(s)|_V ds + C \times \frac{m_A}{2C} \int_0^t |v_2(s) - v_1(s)|_V ds. \end{aligned} \quad (6.3.26)$$

Donc (6.3.26) devient

$$|v_2(t) - v_1(t)|_V^2 \leq C \int_0^t |g_2(s) - g_1(s)|_V^2 ds. \quad (6.3.27)$$

On conclut de (6.3.27) que l'opérateur Λ_η est une contraction dans l'espace de Banach $\mathbb{L}^2(0, T; V)$. Alors, il existe un point fixe unique $g_\eta^* \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$ tel que

$$\Lambda_\eta(g^*) = g_\eta^*. \quad (6.3.28)$$

Dans la deuxième étape, pour $\chi \in C(0, T; (H^1(\Omega))')$ donné, nous utilisons le déplacement $u_{g^*\eta}$ obtenu.

On considère le problème PV_χ suivant

Problème PV_χ : Trouver le champ de température $\theta_\chi : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ tel que

$$\left(\dot{\theta}_\chi(t), w \right)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} + a_0(\theta_\chi(t), w) = (\chi(t) + q(t), w)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}, \quad (6.3.29)$$

$$\theta_\chi(0) = \theta_0 \text{ dans } \Omega. \quad (6.3.30)$$

Nous avons le résultat suivant

Lemma 6.3.4. Pour tout $\chi \in C(0, T; (H^1(\Omega))')$, il existe une solution unique θ_χ du problème PV_χ satisfait (6.3.2).

Preuve. On applique l'inégalité de Friedrichs–Poincaré, on peut trouver une constante, $B' > 0$ tel que

$$\int_\Omega |\nabla \zeta|^2 dx + \frac{B}{k_0} \int_\Gamma |\zeta|^2 d\gamma \geq B' \int_\Omega |\zeta|^2 dx, \quad \forall \zeta \in \mathbb{L}^2(\Omega).$$

Ainsi, on obtient que

$$a_0(\zeta, \zeta) \geq c_0 |\zeta|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall \zeta \in \mathbb{L}^2(\Omega), \quad (6.3.31)$$

avec $c_0 = k_0 \min(1, B')/2$, ce qui implique que a_0 est $\mathbb{L}^2$ -elliptique. Par application des arguments de l'analyse fonctionnelle classique qui concerne les équations paraboliques, le problème PV_χ admet une solution unique θ_χ qui satisfait (6.3.2).

Dans la troisième étape, soit $\phi \in C(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$. On considère le problème PV_ϕ suivant

Problème PV_ϕ : Trouver le champ d'endommagement $\beta_\phi : [0, T] \rightarrow K$ tel que

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\beta}_\phi(t), \zeta - \beta_\phi(t) \right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + a_1(\beta_\phi(t), \zeta - \beta_\phi(t)) \geq \\ & (\phi, \zeta - \beta_\phi(t))_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in K, p.p.t \in [0, T], \end{aligned} \quad (6.3.32)$$

$$\beta_\phi(0) = \beta_0. \quad (6.3.33)$$

On applique le théorème 2.4.4 sur le problème PV_ϕ .

Lemme 6.3.5. Pour tout $\phi \in C(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$, il existe une solution unique β_ϕ du problème PV_ϕ tel que

$$\beta_\phi \in W^{1,2}(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)) \cap \mathbb{L}^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (6.3.34)$$

Preuve. L'inclusion fonctionnelle de $(H^1(\Omega); |\cdot|_{H^1(\Omega)})$ dans $(\mathbb{L}^2(\Omega); |\cdot|_{\mathbb{L}^2(\Omega)})$ est continue et de rang dense. On peut écrire le triplet de Gelfand

$$H^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'.$$

On a

$$(\beta, \xi)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\beta, \xi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \beta \in \mathbb{L}^2(\Omega), \xi \in H^1(\Omega).$$

De plus, K est un convexe fermé non vide dans $H^1(\Omega)$, a_1 définie par (6.2.15) est une forme bilinéaire, et $\beta_\phi \in K$.

Il est facile de voir que le lemme 6.3.5 est une conséquence du théorème 2.4.4

En tenant compte des résultats ci-dessus et des propriétés des opérateurs $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$ et les fonctions ψ et S , nous pouvons considérer l'opérateur Λ tel que

$$\Lambda : C(0, T; V' \times (H^1(\Omega))' \times \mathbb{L}^2(\Omega)) \rightarrow C(0, T; V' \times (H^1(\Omega))' \times \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad (6.3.35)$$

$$\Lambda(\eta, \chi, \phi)(t) = (\Lambda_1(\eta)(t), \Lambda_2(\chi)(t), \Lambda_3(\phi)(t)),$$

$$\begin{aligned} & (\Lambda_1(\eta), w)_{V' \times V} = (\mathcal{B}(\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\phi(t)), w) + \\ & + \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma_\eta(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}_\eta(s))), \varepsilon(u_\eta(s)), \theta_\chi(s)) ds, w \right) + \phi(\dot{u}_\eta, w) \quad \forall w \in V, \end{aligned} \quad (6.3.36)$$

$$(\Lambda_2(\chi), w)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\psi(\sigma_\eta(t), \varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \theta_\chi(t)), w) \quad \forall w \in H^1(\Omega), \quad (6.3.37)$$

$$\Lambda_3(\phi)(t) = S(\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\phi). \quad (6.3.38)$$

Nous avons le résultat suivant

Lemme 6.3.6. Soit (6.3.3) vérifiée. Alors pour $(\eta, \chi, \phi) \in C(0, T; V' \times (H^1(\Omega))' \times \mathbb{L}^2(\Omega))$. L'opérateur $\Lambda(\eta, \chi, \phi) : [0, T] \rightarrow V' \times (H^1(\Omega))' \times \mathbb{L}^2(\Omega)$ a un élément unique

$(\eta^*, \chi^*, \phi^*) \in C(0, T; V' \times (H^1(\Omega))' \times \mathbb{L}^2(\Omega))$ tel que $\Lambda(\eta^*, \chi^*, \phi^*) = (\eta^*, \chi^*, \phi^*)$

Preuve. Soient $(\eta_1, \chi_1, \phi_1), (\eta_2, \chi_2, \phi_2) \in C(0, T; V' \times (H^1(\Omega))' \times \mathbb{L}^2(\Omega))$ et $t \in [0, T]$. Nous utilisant la notation $u_{\eta i} = u_i, \dot{u}_{\eta i} = v_{\eta i} = v_i, \beta_{\phi i} = \beta_i, \theta_{\chi i} = \theta_i$ et $\sigma_{\eta i} = \sigma_i$, pour $i = 1, 2$. En utilisant (6.3.36) et les relations (6.2.2) et (6.2.3), on obtient

$$\begin{aligned} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}^2 &\leq C(|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + \\ &\int_0^t (|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 + |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 + |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 + |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{H^1(\Omega)}^2) ds + \\ &\phi(v_1, v_2(t)) - \phi(v_1, v_1(t)) - \phi(v_2, v_2(t)) + \phi(v_2, v_1(t)). \end{aligned} \quad (6.3.39)$$

De la définition de la fonctionnelle ϕ donnée par (6.2.17), on a

$$\phi(v_1, v_2(t)) - \phi(v_1, v_1(t)) - \phi(v_2, v_2(t)) + \phi(v_2, v_1(t)) = \int_{\Gamma_3} (\alpha |v_{1\nu}|_V - \alpha |v_{2\nu}|_V) (v_{2\nu} - v_{1\nu}) da. \quad (6.3.40)$$

On utilise (6.2.8) et (2.1.4) pour trouver

$$\phi(v_1, v_2(t)) - \phi(v_1, v_1(t)) - \phi(v_2, v_2(t)) + \phi(v_2, v_1(t)) \leq C |v_1(t) - v_2(t)|_V^2. \quad (6.3.41)$$

Puisque

$$u_i(t) = \int_0^t v_i(s) ds + u_0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.3.42)$$

On a

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds. \quad (6.3.43)$$

En appliquant (6.3.41), (6.3.43), la relation (6.3.39) devient

$$\begin{aligned}
 |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}^2 &\leq C(|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + \int_0^t (|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 \\
 &+ |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 + |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 + |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{H^1(\Omega)}^2) ds.
 \end{aligned} \tag{6.3.44}$$

Sachant que

$$\sigma_i(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}_i(t))) + \eta_i(t), \quad \forall t \in [0, T], \tag{6.3.45}$$

de (6.1.1), et en utilisant les relations (6.2.1), (6.2.3), on obtient

$$|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C(|v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + |\eta_1 - \eta_2|_{V'}^2). \tag{6.3.46}$$

De (6.3.11), il résulte

$$\begin{aligned}
 &(\dot{v}_1(t) - \dot{v}_2(t), v_1(t) - v_2(t)) + (\mathcal{A}\varepsilon(v_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2(t)), \varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t))) + \\
 &+ (\eta_1(s) - \eta_2(s), v_1(t) - v_2(t)) \leq j(v_1, v_2(t)) - j(v_1, v_1(t)) - j(v_2, v_2(t)) + j(v_2, v_1(t)).
 \end{aligned} \tag{6.3.47}$$

De la définition de la fonctionnelle j donnée par (6.2.16), on a

$$j(v_1, v_2(t)) - j(v_1, v_1(t)) - j(v_2, v_2(t)) + j(v_2, v_1(t)) = \int_{\Gamma_3} (\alpha |v_{1\nu}| - \alpha |v_{2\nu}|) (\mu |v_{1\tau}| - \mu |v_{2\tau}|) da. \tag{6.3.48}$$

On utilise (6.2.8), (6.2.9) et (2.1.4) pour trouver

$$j(v_1, v_2(t)) - j(v_1, v_1(t)) - j(v_2, v_2(t)) + j(v_2, v_1(t)) \leq C |v_1 - v_2|_V^2. \tag{6.3.49}$$

Ainsi, par intégration, en utilisant (2.1.3), (6.2.1), (6.3.49), la relation de Cauchy-Schwartz et les conditions initiales $v_1(0) = v_2(0) = v_0$, (6.3.47) devient

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + m_{\mathcal{A}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds &\leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + \\
 &+ \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'} |v_1(s) - v_2(s)|_V ds.
 \end{aligned}$$

De plus, utilisant l'inégalité $2ab \leq m_{\mathcal{A}}a^2 + \frac{1}{m_{\mathcal{A}}}b^2$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds &\leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + \\ &+ \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds, \end{aligned}$$

cette inégalité, combinée avec l'inégalité de Gronwall, donne

$$|v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds. \quad (6.3.50)$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds &\leq C \int_0^t \int_0^s |\eta_1(r) - \eta_2(r)|_{V'}^2 dr ds \\ &\leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|^2 ds. \end{aligned} \quad (6.3.51)$$

En outre, par (6.3.43) et (6.3.51), on trouve

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|^2 ds. \quad (6.3.52)$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds &\leq C \int_0^t \int_0^s |\eta_1(r) - \eta_2(r)|_{V'}^2 dr ds \\ &\leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|^2 ds. \end{aligned} \quad (6.3.53)$$

Pour la température, si nous prenons la substitution $\chi = \chi_1$, $\chi = \chi_2$ dans (6.3.29) et soustrayant les deux équations obtenues, on en déduit en choisissant $w = \theta_1 - \theta_2$ comme une fonction de test

$$\begin{aligned} |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{H^1(\Omega)}^2 + C_0 \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{H^1(\Omega)}^2 ds &\leq \\ \int_0^t |\chi_1(s) - \chi_2(s)|_{(H^1(\Omega))'} |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{H^1(\Omega)} ds, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Appliquant l'inégalité $2ab \leq 2C_0a^2 + \frac{1}{2C_0}b^2$

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{H^1(\Omega)}^2 + C_0 \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{H^1(\Omega)}^2 ds \leq \frac{1}{4C_0} \int_0^t |\chi_1(s) - \chi_2(s)|_{(H^1(\Omega))'}^2 ds + C_0 \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{H^1(\Omega)}^2 ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Nous obtenons

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t |\chi_1(s) - \chi_2(s)|_{(H^1(\Omega))'}^2 ds. \quad (6.3.54)$$

Pour le champ d'endommagement, à partir de (6.3.32), on déduit que

$$\left(\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2, \beta_1 - \beta_2 \right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + a_1(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \leq (\phi_1 - \phi_2, \beta_1 - \beta_2)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad p.p.t \in [0, T].$$

Intégrant l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\beta_1(0) = \beta_2(0) = \beta_0$ et l'inégalité $a_1(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \geq 0$ pour trouver

$$\frac{1}{2} |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t (\phi_1(s) - \phi_2(s), \beta_1(s) - \beta_2(s))_{\mathbb{L}^2(\Omega)} ds, \quad (6.3.55)$$

ce qui implique

$$\frac{1}{2} |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t |\phi_1(s) - \phi_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} ds,$$

On applique l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_0^t |\phi_1(s) - \phi_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds \right)$$

cette inégalité, combinée avec l'inégalité de Gronwall, donne

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t |\phi_1(s) - \phi_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.3.56)$$

A partir de (6.3.46), (6.3.50), (6.3.51), (6.3.53), (6.3.54), (6.3.56), la relation (6.3.44) devient

$$|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}^2 \leq C \left(\int_0^t |\phi_1(s) - \phi_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t |\chi_1(s) - \chi_2(s)|_{(H^1(\Omega))'}^2 ds + \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds \right) \quad (6.3.57)$$

On utilise (6.2.4), (6.3.37), on obtient

$$|\chi_1(t) - \chi_2(t)|_{(H^1(\Omega))'}^2 \leq L_\psi \left(|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}_1}^2 + |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{H^1(\Omega)}^2 \right). \quad (6.3.58)$$

A partir de (6.3.46), (6.3.50), (6.3.54) et (6.3.57) on trouve

$$|\chi_1(t) - \chi_2(t)|_{(H^1(\Omega))'}^2 \leq C \left(\int_0^t |\phi_1(s) - \phi_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t |\chi_1(s) - \chi_2(s)|_{(H^1(\Omega))'}^2 ds + \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds \right) \quad (6.3.59)$$

On utilise (6.2.5), (6.3.38), on obtient

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \leq C(|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2) \quad (6.3.60)$$

à partir de (6.3.52) et (6.3.56), on obtient

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_0^t |\phi_1(s) - \phi_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds \right) \quad (6.3.61)$$

Il suit maintenant des inégalités précédentes, les estimations (6.3.57), (6.3.59) et (6.3.61), nous remplaçons (6.3.35), pour obtenir

$$|\Lambda(\eta_1, \chi_1, \phi_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \chi_2, \phi_2)(t)|_{V' \times (H^1(\Omega))' \times \mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \int_0^t |(\eta_1, \chi_1, \phi_1)(s) - (\eta_2, \chi_2, \phi_2)(s)| ds.$$

Ainsi, pour m suffisamment grand, Λ^m est une contraction sur

$C(0, T; V' \times (H^1(\Omega))' \times \mathbb{L}^2(\Omega))$ alors Λ a un unique point fixe dans cet espace de Banach.

Soit l'opérateur $\mathcal{L} : C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3)) \rightarrow C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$, défini par

$$\mathcal{L}\omega(t) = -kv^* \int_0^t \sigma_\nu(s) ds, \forall t \in [0, T]. \quad (6.3.62)$$

Lemme 6.3.7. L'opérateur $\mathcal{L} : C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3)) \rightarrow C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$ possède un point fixe unique $\omega^* \in C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$, tel que

$$\mathcal{L}\omega^* = \omega^*.$$

Preuve : Soient $\omega_1, \omega_2 \in C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$, on dénote par $(u_i, \sigma_i, \beta_i, \theta_i)$ $i = 1, 2$. les solutions associées du problème PV alors

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}\omega_1(t) - \mathcal{L}\omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2 &\leq kv^* \int_0^t |\sigma_{1\nu}(s) - \sigma_{2\nu}(s)|^2 ds, \\ &\leq kv^* \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|^2 ds, \end{aligned} \quad (6.3.63)$$

A partir de (6.1.1) et en utilisant les relations (6.2.1) – (6.2.3), on obtient

$$\begin{aligned} |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}_1}^2 &\leq C(|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + \\ &\int_0^t (|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 + |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 + |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 + |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{H^1(\Omega)}^2) ds \end{aligned} \quad (6.3.64)$$

A partir de (6.3.54) et (6.3.58), et en utilisant Cronwall, on trouve

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t (|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 + |v_1(s) - v_2(s)|_V^2) ds \quad (6.3.65)$$

A partir de (6.3.56) et (6.3.60), et en utilisant Cronwall, on trouve

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.3.66)$$

Donc, (6.3.64) devient

$$\begin{aligned} |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}_1}^2 &\leq C \left(\int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 + \right. \\ &\left. \int_0^t (|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}_1}^2 + |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 + |u_1(s) - u_2(s)|_V^2) ds \right). \end{aligned} \quad (6.3.67)$$

D'après Gronwall, on trouve

$$|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C \left(\int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \right) \quad (6.3.68)$$

On a

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds. \quad (6.3.69)$$

A partir de (6.3.69), on a

$$\int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds.$$

Donc

$$\int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \leq C \left(\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + |\omega_1(t) - \omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2 \right) \quad (6.3.70)$$

D'après Gronwall, on a

$$\int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \leq C |\omega_1(t) - \omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2$$

Donc, (6.3.68) devient

$$|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C \int_0^t |\omega_1(s) - \omega_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2 ds. \quad (6.3.71)$$

Donc, (6.3.63) devient

$$|\mathcal{L}\omega_1(t) - \mathcal{L}\omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t |\omega_1(s) - \omega_2(s)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)} ds$$

Par récurrence, avec $\mathcal{L}^p$ la composée $p^{\text{ième}}$ de l'opérateur $\mathcal{L}$, on a

$$|\mathcal{L}^p \omega_1(t) - \mathcal{L}^p \omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)} \leq \frac{(Ct)^p}{p!} |\omega_1(t) - \omega_2(t)|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}$$

On sait que $\left(\frac{(Ct)^p}{p!}\right)$ converge vers 0, donc pour p assez grand $\frac{(Ct)^p}{p!} < 1$. C'est-à-dire que l'opérateur $\mathcal{L}^p$ est une contraction sur l'espace de Banach $C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$. Alors, il existe un unique $\omega^* \in C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$ tel que

$$\mathcal{L}\omega^* = \omega^*.$$

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour prouver le théorème 6.3.1

Existence

Soit $(\eta^*, \chi^*, \phi^*) \in C(0, T; V' \times (H^1(\Omega))' \times \mathbb{L}^2(\Omega))$ le point fixe de Λ défini par (6.3.35) – (6.3.38) et soit $g^* = g_{\eta^*}^*$ le point fixe de Λ_{η^*} obtenu par le lemme 6.3.2, et soit

$\omega^* \in C(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_3))$ le point fixe de $\mathcal{L}$ obtenu par le lemme 6.3.7. On note par (v, σ) l'unique solution du problème $PV_4^{g^*\eta^*}$ et on définit

$$u(t) = \int_0^t v(s) ds + u_0, \quad \forall t \in [0, T],$$

et, soit $\theta = \theta_{\chi^*}$ et $\beta = \beta_{\phi^*}$ les solutions des problèmes PV_{χ^*} , PV_{ϕ^*} obtenues dans les lemmes 6.3.4 et 6.3.5 respectivement, Comme $\Lambda_1(\eta^*) = \eta^*$, $\Lambda_2(\chi^*) = \chi^*$ et $\Lambda_3(\phi^*) = \phi^*$, les définitions (6.3.36) – (6.3.38) montrent que (6.2.19) – (6.2.23) sont satisfaites. Ensuite, à partir des lemmes 6.3.2, 6.3.4 et 6.3.5, les conditions de régularité (6.3.1) – (6.3.4) sont vérifiées.

Unicité

La partie unicité du théorème 6.3.1 est une conséquence de l'unicité du point fixe des opérateurs Λ_η , Λ et $\mathcal{L}$ définis par (6.3.21), (6.3.35) – (6.3.38), (6.3.62) et l'unicité de la solution des problèmes $PV_4^{g\eta}$, PV_χ et PV_ϕ ce qui achève la démonstration.

Conclusion

Les résultats obtenus dans ce travail nous laissent entrevoir plusieurs pistes de recherche. De nombreuses questions peuvent être posées. Tout d'abord au sujet du modèle considéré et des résultats obtenus.

Peut-on étendre ces résultats à des situations plus générales ? Si l'existence globale des solutions fortes des EDP n'est pas facile, l'amélioration de ces résultats reste toujours possible et peuvent être des problèmes ouverts et très importants à aborder. Nous avons présenté dans cette thèse une certaine contribution à l'étude de quelques problèmes aux limites en mécanique de contact. A cet effet nous avons considéré des différentes lois de comportement telles que : thermo-élasto-viscoplastiques, thermo-viscoélastiques et électro-viscoélastiques. Nous avons étudié des problèmes de contact avec frottement dans un processus dynamique ou quasistatique avec des conditions aux limites, pour lesquelles nous couplons à la fois l'endommagement du matériau et l'usure ou l'endommagement et l'effet thermique ou électrique. Pour chacun de ces problèmes, nous avons donné la formulation variationnelle. L'existence et l'unicité de la solution faible pour les problèmes ont été établies en utilisant des arguments de la théorie des égalités et des inégalités variationnelles, la théorie des opérateurs fortement monotones et de Lipschitz et celle de point fixe.

Bibliographie

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] C. Anca, *Inéquations variationnelles et problèmes de contact avec frottement*, Preprint nr.10/2011.
- [3] K. T. Andrews, A. Klarbring, M. Shillor and S. Wright, *A Dynamic Thermoviscoelastic Contact Problem with Friction and Wear*, Int. J. Eng. Sci, Vol 35, No 14, 1291-1309. (1997).
- [4] K. T. Andrews, K. L. Kuttler and M. Shillor(1997), *On the dynamic behavior of a thermoviscoelastic body in frictional contact with a rigid obstacle*, Euro. J. Appl. Math. 8, 417-436.
- [5] J. F. Archard (1953), *Contact and rubbing of flat surfaces*, J. Appl. Phys. 24(8),981-988.
- [6] A. Azeb Ahmed, S. Boutechebak, *Analysis of a dynamic electro-elastic-viscoplastic contact problem*, Wulfenia Journal Klagenfurt Austria, Vol 20, No. 3 ; pp. 43-63 ; Mars 2013.
- [7] A. Azeb Ahmed, S. Boutechebak, *Analysis of a dynamic thermo-elsto-viscoplastic contact problem* *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2013, No. 71,1-17 ; December 2013.
- [8] A. Bachmar, S. Boutechebak, T. Serrar, *Variational Analysis of a dynamic electro-visco-elastic problem with friction*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2019, 12(1), 1–11
- [9] A. Bachmar, T. Serrar, *Analysis of electro-visco-elastic contact problem with friction*, J. Maths. ComputerSci16(2016),529-540.

- [10] M. Barboteu, J.R. Fernandez, Y. Ouafik, *Numerical analysis of a frictionless viscoelastic piezoelectric contact problem*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. (in press).
- [11] R.C. Batra , J.S. Yang, *Saint Venant's principle in linear piezoelectricity*, Journal of Elasticity, 38(1995), 209-218.
- [12] E. Bonetti , G. Bonfanti, *Existence and Uniqueness of the Solution to 3D Thermoviscoelastic System*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2003, No. 50, pp. 1-15.
- [13] S. Boutechebak, A. Azeb Ahmed, *Analysis of a dynamic frictional contact Problem for thermo-elasto-Viscoplastic materials with damage*, Gen. Math. Notes, Vol. 19, No. 1, November 2013, pp.60-77.
- [14] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, Paris (1987).
- [15] H. Brézis, *Equations et Inéquations Non Linéaires dans les Espaces en Dualité*, Annale de l'Institut Fourier, Tome 18, n 1, (1968), p. 115-175.
- [16] L. Chouchane, *Etude variationnelle de quelques problèmes en elassto-visco-plasticité*, Thèse de doctorat, Université de Sétif, (2008).
- [17] A. Djabi, A. Merouani, A. Aissaoui, *A frictional contact problem with wear involving elastic-viscoplastic materials with damage and thermal effects*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2015, No. 27, 1–18.
- [18] A. Djabi, A. Merouani, *A fixed point method for a class of nonlinear evolution systems modeling a mechanical phenomenon*, Int.J.Open problems Compt. Math., Vol. 8, No. 1(2015), p 1-13.
- [19] A. Djabi, A. Merouani, *Bilateral contact problem with friction and wear for an electro elastic-viscoplastic materials with damage*, Taiwanese J. Math. Vol.19, No.4, pp. 1161-1182, August 2015.
- [20] G. Duvaut , J. L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod (1976).
- [21] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, 2002.
- [22] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage in concrete : The unilateral phenomenon*, Nucl. Eng. Des. 156, pp. 323-335, 1995.

- [23] M. Frémond , B. Nedjar, *Damage, Gradient of Damage and Principle of Virtual Work*, Int. J. Solids Structures, 33 (8),1083-1103. (1996).
- [24] M. Frémond, K.L. Kuttler, B. Nedjar, M. Shillor ; *One-dimensional models of damage*, Adv. Math. Sci. Appl., 8(2), pp. 541-570, 1998.
- [25] P. Germain, *Cours de Mécanique des Milieux Continus*, Masson et Cie, Paris, (1973).
- [26] R. J. Gu and M. Shillor(2001), *Thermal and wear analysis of an elastic beam in sliding contact*, Int. J. Solids Structures 38(14), 2323-2333.
- [27] W. Han, M. Sofonea, K. Kazmi, *Analysis and numerical solution of a frictionless contact problem for electro-elastic-visco-plastic materials*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) 3915-3926.
- [28] I. R. Ionescu and M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, (1994).
- [29] K. L. Kuttler and M. Shillor (2002), *Dynamic contact with normal compliance wear and discontinuous friction coefficient*, SIAM J.Math. Anal. 34(1),1-27.
- [30] G. Leszek, A. Ochala, M. Shillor, *Quasistatic thermoviscoelastic problem with normal compliance, multivalued friction and wear diffusion. Nonlinear Analysis : R. W. A* (27), 183-202. (2016).
- [31] A. B. Merouani, F. Messelmi, *Dynamic Evolution of Damage in Elastic-Thermo-Viscoplastic Materials*. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010(2010), No. 129, pp. 1-15.
- [32] F. Messelmi, B. Merouani, *Quasi-Static Evolution of Damage in Thermo-Viscoplastic Materials*, Analele Universitatii Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XVII (2010), Issue No. 2, 133-148.
- [33] F. Messelmi, B. Merouani , M. Meflah, *Nonlinear Thermoelasticity Problem*, Analele Universitatii Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XV (2008), 207-217.
- [34] R. D Mindlin, *Polarisation gradient in elastic dielectrics*, Int. J. Solids Structures 4 (1968), 637-663.
- [35] J. Necas, I. Hlavacek, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, 1981.

- [36] E. Rabinowiz (1995), *Friction and Wear of Materials*, (2nd ed.) Wiley, N. Y.
- [37] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, *Analysis of Quasistatic Viscoelastic Problem with Friction and Damage*, Adv. Math. Sci. App. 10,2002, 173-189.
- [38] J. Rojek and J. J. Telega, *Contact problems with friction, Adhesion and wear in Orthopaedic Biomechanics. I : General developments*, J. Theor. Appl. Mech. 39 (2001), 655-677.
- [39] M. Shillor, M. Sofonea ,J. J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics 655, Springer, Berlin, (2004).
- [40] M. Selmani, *Frictional contact problem with wear for Electro-Viscoelastic Materials with long Memory*. Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin 20(2013), 461-479.
- [41] M. Selmani, L. Selmani, *Analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic material. Nonlinear Analysis : Modelling and Control*, 2012, Vol. 17, No. 1, 99-117.
- [42] M. Selmani, L. Selmani, *Frictional contact problem for elastic-viscoplastic materials with thermal effect*, Appl. Math. Mech. -Engl. Ed., 34(6), 761–776 (2013).
- [43] M. Sofonea, *Functional Methods in Thermo-Elasto-Visco-Plasticity*, Ph. D. Thesis, Univ of Buccharest, (1988) (in Romanian).
- [44] M. Sofonea, El. H. Essoufi, *A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Mathematical Modelling and Analysis 9, 2004, 229-242.
- [45] M. Sofonea, E.H. Essoufi, *Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body*, Adv. Math. Sci. Appl.14 (1)(2004) 25–40.
- [46] N.Stromberg, *Continuum Thermodynamics of Contact, Friction and Wear*, Thesis No, 491, Departement of Mechanical Engineering, Linkoping Institute of Technology, Linkoping, Sweden, (1995).
- [47] N.Stromberg, L. Johansson, A.Klarbing, *Dervation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear*, Int.J.Solids Structures, 33(1996),1817-1836.
- [48] P. Suquet, *Plasticité et homogénéisation*, Ph.D. thesis, Université Pierre etMarie Curie, Paris 6, 1982.

- [49] R. A. Toupin, *A dynamical theory of elastic dielectrics*. Int. J. Engrg. Sci. 1 (1963).