

Table des matières

Remerciements	3
Notations	4
Introduction	5
1 Résultats préliminaires	9
1.1 Introduction	9
1.2 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont des $\mathfrak{X}C$ -groupes	9
1.2.1 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont des FC -groupes	10
1.2.2 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont des CC -groupes	13
1.2.3 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont $(PF)C$ -groupes .	16
1.3 MC -groupes	17
1.4 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont des M_rC -groupes	19
1.4.1 Groupes minimax réduits	19
1.4.2 M_rC -groupes	20
1.5 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont des $\mathfrak{X}L$ -groupes	23
1.5.1 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont des CL -groupes .	23
1.5.2 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont des FL -groupes .	24
2 Groupes ayant “beaucoup” de $(\mathfrak{X}L \cup \mathfrak{X}\mathcal{A})$-sous-groupes	26
2.1 Introduction	26

2.2	Non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupes minimaux	27
2.3	Groupes dont les sous-groupes propres de rang infini sont des $(FL \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupes	32
2.4	Groupes dont les sous-groupes propres de rang infini sont des $(CL \cup \check{C}\mathcal{A})$ -groupes	38
2.5	Groupes ayant peu de sous-groupes non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$	43
3	Non-MC-groupes minimaux	49
3.1	Introduction	49
3.2	Groupes ayant des sous-groupes propres d'indice fini et dont tous les sous-groupes propres sont des MC -groupes	50
3.3	Groupes non-parfaits dont tous les sous-groupes propres sont des MC -groupes	53
	Bibliographie	58

Remerciements

*Je remercie tout d'abord le Bon DIEU « **ALLAH** » notre Créateur de m'avoir donné la force et la patience pour accomplir ce travail.*

*Je voudrais remercier Monsieur "**Nadir Trabelsi**", Professeur à l'université de **Sétif**, qui a pris la direction de ce travail.*

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger ce travail et d'y apporter leur caution :

*Monsieur "", Professeur à l'université de **Sétif**, qui me fait le grand honneur d'accepter la présidence du jury.*

Monsieur "", Professeur à l'université de, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de participer à ce jury.

Monsieur "", Professeur à l'université de, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant également de participer à ce jury.

Enfin, mes remerciements vont à tous les membres de ma famille et à tous mes amis qui m'ont soutenu durant les moments difficiles.

Notations

Soient G un groupe, $x, y \in G$. On utilisera les notations suivantes :

- $x^y = y^{-1}xy$ et $x^G = \langle x \rangle^G = \langle x^g \mid g \in G \rangle$ la clôture normale de x dans G .
- $G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = G'$ le sous-groupe dérivé de G et $G^{(n)}$ le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme de la série dérivée de G .
- $\gamma_1(G) = G$, $\gamma_2(G) = G'$ et $\gamma_n(G)$ le $n^{\text{ème}}$ terme de la série centrale inférieure de G .
- $Z_0(G) = 1$, $Z_1(G) = Z(G)$ le centre de G et $Z_n(G)$ le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme de la série centrale supérieure de G .
- $C_G(x)$ le centralisateur de x dans G .
- $\mathcal{A}$ la classe des groupes abéliens.
- $\mathfrak{F}$ la classe des groupes finis.
- $\check{C}$ la classe des groupes de Černikov.
- $\mathfrak{P}$ la classe des groupes polycycliques.
- C_{p^∞} le groupe quasicyclique.

Si $\mathfrak{X}$ est une classe de groupes, alors :

- $L\mathfrak{X}$ est la classe de tous les groupes tels que chaque sous-ensemble fini est contenu dans un $\mathfrak{X}$ -groupe.
- $\acute{P}\mathfrak{X}$ est la classe de tous les groupes admettant une série ascendante dont chaque facteur est un $\mathfrak{X}$ -groupe.
- $\grave{P}\mathfrak{X}$ est la classe de tous les groupes admettant une série descendante dont chaque facteur est un $\mathfrak{X}$ -groupe.
- $R\mathfrak{X}$ est la classe des groupes G tel que $\cap \{N \mid N \triangleleft G \text{ et } G/N \in \mathfrak{X}\} = 1$.

Introduction

Soit $\mathfrak{X}$ une classe de groupes. Un groupe G est dit un $\mathfrak{X}C$ -groupe si le groupe quotient $G/C_G(x^G)$ est un $\mathfrak{X}$ -groupe pour chaque élément x dans G . Les classes de groupes $\mathfrak{X}C$ qui ont été étudiées sont FC (respectivement, CC , PC , $(PF)C$, MC et M_rC) que nous obtenons lorsque nous prenons pour $\mathfrak{X}$ la classe des groupes finis (respectivement, de Černikov, polycycliques, polycycliques-par-finis, résolubles-par-finis minimax et minimax réduits) (voir [40], [16], [23] et [25]). Également si $m \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, alors le sous-groupe G_m engendré par tous les éléments d'ordre m est appelé le m -layer de G . Nous disons qu'un groupe G est un $\mathfrak{X}L$ -groupe si tous ses layers appartiennent à $\mathfrak{X}$. Les classes de groupes $\mathfrak{X}L$ qui ont été étudiées sont FL (respectivement, CL , $(PF)L$ et AL) que nous obtenons lorsque nous prenons pour $\mathfrak{X}$ la classe des groupes $\mathfrak{F}$, (respectivement, $\check{C}$, $\mathfrak{P}\mathfrak{F}$ et $\mathcal{A}$) (voir [40] et [39]). Il est clair que la classe $\mathfrak{X}L$ est contenue dans la classe $\mathfrak{X}C$ dans les cas particuliers ci-dessus à titre d'exemple, si G est un $(PF)L$ -groupe non périodique, alors G est polycyclique-par-fini [39, Théorème 3] et tout AL -groupe est abélien [40, Théorème 4. 41].

Un groupe G est dit non- $\mathfrak{X}$ -groupe minimal si tous ses sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{X}$, alors que G lui-même n'est pas un $\mathfrak{X}$ -groupe. L'étude des groupes non- $\mathfrak{X}$ minimaux est très ancienne. À titre d'exemple, en 1903 Miller et Moreno ont étudié et caractérisé dans [28] les groupes finis non-abéliens dont tous les sous-groupes propres sont abéliens et ils ont montré que de tels groupes sont métabéliens et leurs ordres sont divisibles par au plus deux nombres premiers. Plus tard, en 1924 O. J. Schmidt dans [43] a classifié les groupes finis non-nilpotents dont tous les sous-groupes propres sont

nilpotents en démontrant que de tels groupes sont résolubles de longueur ≤ 3 et leurs ordres sont divisibles par deux nombres premiers distincts. V. Belyaev et N. Sesekin sont les premiers qui ont étudié les non- $\mathfrak{X}C$ -groupes minimaux. Ils ont caractérisé dans [4] les non- FC -groupes minimaux dans le cas où le groupe possède une image homomorphe non-triviale finie et dans [3] V. Belyaev a montré que si G est un groupe non-parfait non- FC -groupe minimal, alors G admet un sous-groupe propre d'indice fini. Beaucoup de résultats ont été obtenus sur les non- $\mathfrak{X}C$ -groupes minimaux pour différents choix de $\mathfrak{X}$. En 1988 J. Otal et J. M. Peña, ont étudié les non- CC -groupes minimaux, ils ont montré que, si G est un groupe ayant une image homomorphe non-triviale finie ou abélienne, alors G est un CC -groupe si, et seulement si, tout sous-groupe propre de G est un CC -groupe. C'est-à-dire les non- CC -groupes minimaux sont parfaits et $\mathcal{F}$ -parfaits. M. Bouchelaghem et N. Trabelsi, ont étudié les non- $(PF)C$ -groupes minimaux et les non- M_rC -groupes minimaux ayant une image homomorphe non-triviale finie ou abélienne, ils ont montré en 2013 que la propriété d'être un non- $(PF)C$ -groupe minimal (respectivement, non- M_rC -groupe minimal) et un non- FC -groupe minimal sont équivalentes dans un groupe possédant un sous-groupe propre d'indice fini et ils ont montré en 2015 (respectivement, 2017) le même résultat pour les groupes non-parfaits. Nous avons étudié les non- MC -groupes minimaux et nous avons démontré que tout non- MC -groupe minimal est parfait et $\mathcal{F}$ -parfait (Théorème 3.2.8 et Théorème 3.3.3). Les non- $\mathfrak{X}L$ -groupes minimaux ont été également étudiés. J. Otal et J. M. Peña sont les premiers qui ont étudié les non- $\mathfrak{X}L$ -groupes minimaux, ils ont montré dans [35] que si G est un groupe localement gradué, alors G est un CL -groupe si, et seulement si, tout sous-groupe propre de G est un CL -groupe et ils ont montré que la propriété d'être un non- $(FL \cup \mathfrak{F}\mathcal{A})$ -groupe minimal et un non- FC -groupe minimal non-parfait sont équivalentes dans un groupe localement gradué. Nous avons généralisé ce résultat sur la classe de groupes $(PF)L \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A}$ (Théorème 2.2.6).

On dit qu'un groupe G est de rang fini r , si tout sous-groupe de type fini est engendré par au plus r éléments où r est le plus petit entier vérifiant cette propriété. Si l'entier

r n'existe pas, alors G est dit de rang infini. Ces dernières années les groupes résolubles généralisés de rang infini dont tout sous-groupe propre de rang infini appartient à une classe de groupes $\mathfrak{X}$ ont été étudiés et il a été prouvé que tous les sous-groupes propres sont des $\mathfrak{X}$ -groupes. Si les non- $\mathfrak{X}$ -groupes minimaux sont de rang fini ou ne sont pas localement gradués, alors ces groupes eux-mêmes appartiennent à $\mathfrak{X}$. En particulier, dans [7] il est prouvé que si $\mathfrak{X}$ est une classe contenue dans la classe des groupes (résolubles-par-finis) minimax et si G est un groupe localement (résoluble-par-fini) de rang infini dont tout sous-groupe propre de rang infini est un $\mathfrak{X}C$ -groupe, alors tout sous-groupe propre de G est un $\mathfrak{X}C$ -groupe à condition que G n'ait pas d'images homomorphes simples de rang infini. Nous avons établi un résultat similaire pour la classe de groupes $\mathfrak{X}L \cup \mathfrak{X}\mathcal{A}$, où $\mathfrak{X}$ est soit la classe de groupes polycycliques-par-finis, soit de Chernikov (Théorème 2.3.4 et Théorème 2.4.6).

De nombreux articles traitent les groupes ayant peu de sous-groupes non- $\mathfrak{X}$, à savoir les groupes dans lequel l'ensemble de sous-groupes non- $\mathfrak{X}$ soit satisfait la condition minimale ou est l'union d'un nombre fini de classes de conjugaison. À titre d'exemple, dans [17] il est prouvé que tout groupe localement gradué n'ayant qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non- FC est soit un FC -groupe, soit de Černikov, soit un non- FC -groupe minimal parfait. Dans [35] J. Otal et J. M. Peña, ont montré que si G est un groupe localement gradué, alors G satisfait la condition minimale sur les sous-groupes non- $(FL \cup \mathfrak{F}\mathcal{A})$ si, et seulement si, G est soit un $(FL \cup \mathfrak{F}\mathcal{A})$ -groupe soit de Chernikov. Nous avons généralisé ce résultat sur la classe de groupes $(PF)L \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A}$ (Théorème 2.5.3).

Notre thèse se compose de trois chapitres que nous allons brièvement décrire.

Dans le premier chapitre, on présente quelques notions et théorèmes fondamentaux sur les classes des groupes $\mathfrak{X}C$ où $\mathfrak{X}$ est la classe des groupes $\mathfrak{F}$, $\check{C}$, $\mathfrak{P}\mathfrak{F}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_r$ et les classes des groupes $\mathfrak{X}L$ où $\mathfrak{X}$ est la classe des groupes $\mathfrak{F}$, $\check{C}$ et nous donnerons les résultats obtenus sur les non- $\mathfrak{X}C$ -groupes minimaux et les non- $\mathfrak{X}L$ -groupes minimaux (voir [40],

[16], [23], [25], [39], [4], [3], [8], [32], [2], [20], [19], [5], [6], [7], [35] et [45]).

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié les non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupes minimaux et les groupes localement (résoluble-par-fini) de rang infini dont tout sous-groupe propre de rang infini est un $\mathfrak{X}L$ -groupe où $\mathfrak{X}$ est la classe des groupes FL , $FL \cup \mathfrak{F}\mathcal{A}$, CL , $CL \cup \check{C}\mathcal{A}$ et $FL \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A}$. Nous avons également étudié les groupes ayant peu de sous-groupes non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$. Ces résultats ont été publiés dans [37].

Concernant le troisième chapitre, nous avons étudié les groupes dont tous les sous-groupes propres sont des MC -groupes et nous avons montré que tout non- MC -groupe minimal est parfait et $\mathcal{F}$ -parfait.

Chapitre 1

Résultats préliminaires

1.1 Introduction

Ce premier chapitre est consacré à l'exposition de certaines notions et théorèmes fondamentaux de théorie des groupes. Il porte essentiellement sur les propriétés des $\mathfrak{X}C$ -groupes où $\mathfrak{X}$ est la classe des groupes $\mathfrak{F}$, $\check{C}$, $\mathfrak{PF}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_r$ désignant respectivement la classe des groupes finis, de Černikov, polycycliques-par-finis, (résolubles-par finis) minimax et minimax réduits respectivement et les propriétés des $\mathfrak{X}L$ -groupes où $\mathfrak{X}$ est la classe des groupes $\mathfrak{F}$ et $\check{C}$. De plus, nous donnerons les résultats obtenus sur les non- $\mathfrak{X}C$ -groupes minimaux et les non- $\mathfrak{X}L$ -groupes minimaux. En particulier les résultats qui sont utilisés dans cette thèse.

1.2 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont des $\mathfrak{X}C$ -groupes

Soit $\mathfrak{X}$ une classe de groupes. Un groupe G est dit un $\mathfrak{X}C$ -groupe si le groupe quotient $G/C_G(x^G)$ est un $\mathfrak{X}$ -groupe pour chaque élément x dans G . Il s'ensuit que G est dit un non- $\mathfrak{X}C$ -groupe minimal si G n'est pas un $\mathfrak{X}C$ -groupe mais tous ses sous-groupes propres sont des $\mathfrak{X}C$ -groupes. Dans cette section on va donner les résultats qui ont été obtenus sur

les $\mathfrak{X}C$ -groupes et les non- $\mathfrak{X}C$ -groupes minimaux localement gradués où $\mathfrak{X}$ est la classe des groupes finis, de Černikov et polycycliques-par-finis.

1.2.1 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont des FC -groupes

Dans ce qui suit, nous avons identifié certaines propriétés des FC -groupes les plus connues. Pour ce faire, on commence par donner la définition d'un FC -élément.

Définition 1.2.1.1. *Un élément g d'un groupe G est appelé un FC -élément s'il n'admet qu'un nombre fini de conjugués dans G , c'est-à-dire, $\text{card}(\{g^x : x \in G\})$ est fini. En d'autres termes, g est un FC -élément si $C_G(g)$ est d'indice fini dans G .*

Théorème 1.2.1.2 (Baer). *Dans un groupe G les FC -éléments forment un sous-groupe caractéristique dans G .*

Définition 1.2.1.3. *Soit G un groupe.*

(i) le sous-groupe de tous les FC -éléments de G est appelé le FC -centre de G , il contient le centre de G . On le note $FC(G)$.

(ii) G est appelé un FC -groupe s'il est égal à son FC -centre, c'est-à-dire, toute classe de conjugaison dans G est finie.

Soit G un groupe. Rappelons que le résiduel fini de G , noté G^* est l'intersection de tous les sous-groupes normaux d'indice fini ; c'est-à-dire $G^* = \bigcap_N \{N \mid N \triangleleft G \text{ et } G/N \in \mathfrak{F}\}$. Si G^* est d'indice fini dans G , alors G^* n'admet aucun sous-groupe propre d'indice fini. D'autre part G est dit “ résiduellement fini ” si son résiduel fini est trivial ; c'est-à-dire si $G^* = 1$.

Théorème 1.2.1.4 (Baer). *Si G est un FC -groupe, alors $G/Z(G)$ est périodique et résiduellement fini.*

Le Lemme suivant est essentiel dans l'étude des FC -groupes.

Lemme 1.2.1.5 (Dietzmann's). *Dans tout groupe G , un ensemble normal et fini dont les éléments sont d'ordre fini, engendre un sous-groupe normal et fini. (Un ensemble X est dit normal dans un groupe G s'il contient tous les conjugués de ses éléments, c'est-à-dire si $x \in X$, alors $x^g \in X$ pour tout $g \in G$).*

Corollaire 1.2.1.6. *Si G est un FC-groupe périodique et de type fini, alors G est fini, c'est-à-dire Les FC-groupes périodiques sont localement finis.*

Remarque. *Dans le Corollaire précédent, il n'est pas nécessaire de supposer G périodique, il suffit de supposer que G est engendré par des éléments d'ordre fini.*

Théorème 1.2.1.7 (B. H. Neumann). *Soit G un groupe :*

- (1) *G est un FC-groupe périodique si, et seulement si, tout sous-ensemble fini de G est contenu dans un sous-groupe normal fini.*
- (2) *Si G est de type fini, alors G est un FC-groupe si, et seulement si, G est central-par-fini. En particulier, si G est un FC-groupe, alors G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes si, et seulement si, G est de type fini.*
- (3) *Si G est un FC-groupe, alors G' est périodique. De plus l'ensemble des éléments d'ordre fini forme un sous-groupe de G contenant G' .*
- (4) *Si G est un FC-groupe vérifiant la condition maximale sur les sous-groupes normaux, alors il est central-par-fini. Par conséquent G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes.*
- (5) *Si G est un FC-groupe vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes normaux, alors il est central-par-fini et de Černikov.*

D'après (3) du Théorème précédent et puisque le groupe des automorphismes d'un groupe fini-par-cyclique est fini, on peut déduire la conséquence suivante.

Corollaire 1.2.1.8 (Polovickiĭ). *Un groupe G est un FC-groupe si, et seulement si, x^G est fini-par-cyclique pour tout x de G .*

La classe des FC -groupes n'est pas stable par extension mais satisfait une certaine forme d'extensibilité faible, qui peut être énoncée comme suit.

Corollaire 1.2.1.9. *Soit N un sous-groupe normal fini d'un groupe G tel que G/N soit un FC -groupe, alors G est un FC -groupe.*

Maintenant, nous allons donner les résultats qui ont été obtenus sur les non- FC -groupes minimaux localement gradués. En 1975 V. Belyaev et N. Sesekin ont trouvé la structure des non- FC -groupes minimaux possédant un sous-groupe propre d'indice fini.

Théorème 1.2.1.10. *Soit G un groupe et supposons que G^* , le résiduel fini de G , soit un sous-groupe propre de G . Alors G est un non- FC -groupe minimal si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) *Il existe un élément x dans G , un nombre premier p , et un entier positif n tels que $G = \langle G^*, x \rangle$, $x^{p^n} \in G^*$ et $x^p \in Z(G)$.*
- (ii) *G^* est un q -groupe abélien divisible de rang fini pour un certain nombre premier q .*
- (iii) *Si N est un sous-groupe propre G -admissible de G^* , alors N est fini et $G^* = G'$.*

Exemple. Soit $X = \langle x \rangle \rtimes A$ un 2-groupe localement diedral tel que $A \simeq C_2^\infty$, $x^2 = 1$ et $a^x = a^{-1}$ pour tout $a \in A$. D'après [40, Théorème 6.11 (i)], $\langle x \rangle$ n'est pas sous-normal dans X et X est hypercentral. Soit H un sous-groupe propre de X . Si $H \leq A$, alors H est abélien, il est FC -groupe nilpotent. On suppose que $H \not\leq A$; comme $|X : A| = 2$, on a $HA = X$. Comme $H/A \cap H \simeq AH/A$, donc $H/A \cap H$ est cyclique d'ordre 2 et comme $A \cap H \neq A$, on a $A \cap H$ est fini car A est quasicyclique, d'où H est fini. On en déduit que H est un FC -groupe nilpotent. En conséquence tout sous-groupe propre de X est un FC -groupe nilpotent. Maintenant supposons que x^X soit propre dans X , donc il est nilpotent, il s'ensuit que $\langle x \rangle$ est sous-normal dans x^X , donc $\langle x \rangle$ est sous-normal dans X , c'est une contradiction. D'où $x^X = X$ et X est non- FC -groupe minimal.

En 1980 V. Belyaev a montré le résultat suivant :

Théorème 1.2.1.11. *Si G est un non-FC-groupe minimal non-parfait, alors G admet un sous-groupe propre d'indice fini.*

Dans la même année B. Bruno et R. E. Phillips ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.2.1.12. *Soit G un non-FC-groupe minimal, alors G est dénombrable. De plus si G est localement gradué, alors il est localement fini.*

En 1989 Kuzucuoglu et Phillips ont trouvé un résultat sur les non-FC-groupes minimaux localement gradués parfaits :

Théorème 1.2.1.13. *Les non-FC-groupes minimaux localement gradués parfaits sont des p -groupes pour un certain nombre premier p .*

1.2.2 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont des CC-groupes

Un groupe G est dit de “ Černikov ”, s’il est une extension finie d’un produit direct d’un nombre fini de groupes quasicycliques ; c’est-à-dire G est de Černikov s’il admet un sous-groupe $A \triangleleft G$ tel que A soit abélien vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes et G/A soit fini. Dans cette sous-section, on présente quelques propriétés sur les CC-groupes. Ces groupes ont été étudiés pour la première fois par Polovickii en 1964. On commence par donner la définition d’un CC-élément.

Définition 1.2.2.1. *Un élément g d’un groupe G est appelé un CC-élément si le groupe quotient $G/C_G(g^G)$ est de Černikov.*

Définition 1.2.2.2. *Soit G un groupe :*

- (i) *l’ensemble de tous les CC-éléments de G est appelé CC-centre de G , il contient le centre de G . On le note $CC(G)$.*
- (ii) *G est appelé un CC-groupe s’il est égal à son CC-centre.*

Le théorème suivant est une définition équivalente à la définition précédente :

Théorème 1.2.2.3 [40]. *Soit G un groupe. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un CC -groupe.
- (ii) $[G, x]$ est de Černikov et $G/C_G([G, x])$ est périodique, pour tout élément x dans G .
- (iii) x^G est Černikov-par-cyclique et $G/C_G(x^G)$ est périodique, pour chaque élément x dans G .

Dans [32], Otal et Penã ont montré les résultats suivants :

Lemme 1.2.2.4. *Soit G un CC -groupe :*

- (1) *Si G est de type fini, alors il est central-par-fini.*
- (2) *Si G est abélien-par-fini, alors il est central-par-Černikov.*
- (3) *Si G est localement nilpotent, alors il est hypercentral.*
- (4) *Si G est $\mathcal{F}$ -parfait, alors il est nilpotent de classe ≤ 2 . De plus si G est périodique, alors il est abélien.*

Corollaire 1.2.2.5. *Si G est un CC -groupe périodique et de type fini, alors G est fini, c'est-à-dire les CC -groupes périodiques sont localement finis.*

Remarque. *Dans le Corollaire précédent, il n'est pas nécessaire de supposer G périodique, il suffit de supposer que G est engendré par des éléments d'ordre fini.*

Rappelons qu'un groupe est dit localement normal et Černikov si chaque sous-ensemble fini est contenu dans un sous-groupe normal de Černikov.

Théorème 1.2.2.6 (Polovickiĭ). *Si G est un CC -groupe, alors G' est localement normal et Černikov. De plus l'ensemble des éléments d'ordre fini forme un sous-groupe de G contenant G' .*

La classe des CC -groupes n'est pas stable par extension mais satisfait une certaine

forme d'extensibilité faible, qui peut être énoncée comme suit.

Corollaire 1.2.2.7 [24, Lemma 2]. *Soit N un sous-groupe normal fini d'un groupe G tel que G/N soit un CC -groupe, alors G est un CC -groupe.*

En 1992 F. M. R. Dixon a montré les deux résultats suivants :

Lemme 1.2.2.8 [12, Lemma 1]. *Soit G un CC -groupe, alors G admet un sous-groupe N normal dans G tels que N soit abélien divisible périodique et G/N soit un FC -groupe.*

Lemme 1.2.2.9 [12, Lemma 2]. *Soient G un CC -groupe périodique et N un sous-groupe abélien normal dans G tel que G/N soit abélien divisible, alors G est abélien. De plus si N est divisible, alors il est divisible.*

J. Otal et J. M. Penã [32], B. Hartley, J. Otal et J. M. Penã [20] ont étudié les groupes localement gradués dont tous les sous-groupes propres sont des CC -groupes. Ils ont obtenus les résultats suivants :

Théorème 1.2.2.10. [32] *Soit G un groupe possédant une image homomorphe non triviale finie ou abélienne. Alors G est un CC -groupe si, et seulement si, tout sous-groupe propre de G est un CC -groupe.*

Corollaire 1.2.2.11 [32]. *Soit G un non- CC -groupe minimal, alors il est parfait, n'admet aucun sous-groupe propre d'indice fini. De plus si G est localement gradué, alors il est localement fini et dénombrable.*

Théorème 1.2.2.12 [20]. *Un non- CC -groupe minimal localement gradué est un p -groupe pour un certain nombre premier p .*

En 1997 A. Arikan et A. O. Asar, ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.2.2.13 [2]. *Soit G un non- CC -groupe minimal localement gradué, alors G admet un quotient G/K qui est un non- FC -groupe minimal.*

1.2.3 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont $(PF)C$ -groupes

En 1990 S. Franciosi, F. De Giovanni et M. J. Tomkinson sont les premiers qui ont étudié la classe des $(PF)C$ -groupes. Pour définir cette classe, rappelons qu'un groupe G est dit " polycyclique ", s'il admet une série finie de sous-groupes dont chaque quotient est cyclique. Rappelons aussi qu'un groupe est dit " polycyclique-par-fini ", s'il est une extension finie d'un sous-groupe polycyclique.

Définition 1.2.3.1. *Un groupe G est un $(PF)C$ -groupe si pour chaque élément x dans G , le groupe quotient $G/C_G(x^G)$ est polycyclique-par-fini.*

S. Franciosi, F. De Giovanni et M. J. Tomkinson ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.2.3.2. *Soit G un groupe. G est un $(PF)C$ -groupe si, et seulement si, x^G est polycyclique-par-fini, pour tout x de G . Par conséquent, tout $(PF)C$ -groupe de type fini est polycyclique-par-fini.*

En 2009 F. Russo et N. Trabelsi ont montré les deux résultats suivants :

Lemme 1.2.3.3 [42, Lemme 3.1]. *Soit N un sous-groupe normal d'un groupe G tel que N soit polycyclique-par-fini et G/N soit un $(PF)C$ -groupe, alors G est un $(PF)C$ -groupe.*

Lemme 1.2.3.4 [42, Lemme 3.2]. *Soit G un $(PF)C$ -groupe et soit H un sous-groupe de G . Si H n'admet aucun sous-groupe propre d'indice fini, alors il est contenu dans $Z(G)$.*

M. Bouchelaghem et N. Trabelsi, ont étudié les groupes localement gradués dont tous les sous-groupes propres sont des $(PF)C$ -groupes. Ils ont obtenus les résultats suivants :

Théorème 1.2.3.5 [5, Corollaire 2.14]. *Soit G un groupe et supposons que G^* , le résiduel fini de G , soit un sous-groupe propre de G . Alors G est un non- $(PF)C$ -groupe minimal si, et seulement si, il est un non- FC -groupe minimal.*

Théorème 1.2.3.6 [6, Théorème 1.1]. *Soit G un groupe non-parfait, alors G est non-(PF)C-groupe minimal si, et seulement si, il est un non-FC-groupe minimal.*

1.3 MC-groupes

En 2000 L. A. Kurdachenko et J. Otal sont les premiers qui ont étudié la classe des MC-groupes. Pour rappeler les propriétés de cette classe, on donne la définition des groupes minimax, ainsi que quelques propriétés sur ces groupes.

Définition 1.3.1. *Un groupe G est dit minimax, s'il admet une série finie*

$$\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

dont tout quotient G_{i+1}/G_i satisfait la condition maximale ou minimale sur les sous-groupes pour tout $0 \leq i \leq n-1$.

On sait que les groupes localement (résolubles-par-finis) satisfaisant la condition maximale sur les sous-groupes sont polycycliques-par-finis (voir [41]) et il est également bien connu que tous les groupes localement finis satisfaisant la condition minimale sur les sous-groupes sont des groupes de Černikov (voir [21, Chapitre 5]). D'après ce qui précède on peut déduire la définition suivante :

Définition 1.3.2. *Un groupe G est dit résoluble-par-fini minimax, s'il admet une série finie*

$$\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

dont tout quotient G_{i+1}/G_i est polycyclique-par-fini ou de Černikov pour tout $0 \leq i \leq n-1$.

La classe des groupes résolubles-par-finis minimax admet les propriétés suivantes :

Proposition 1.3.3. *Soient G un groupe, $H \leq G$, $N, L \triangleleft G$:*

- (i) Si G est résoluble-par-fini minimax, alors H est résoluble-par-fini minimax.
- (ii) Si G est résoluble-par-fini minimax, alors G/N est résoluble-par-fini minimax.
- (iii) Si N et G/N sont résolubles-par-finis minimax, alors G est résoluble-par-fini minimax.
- (iv) Si G/N et G/L sont résolubles-par-finis minimax, alors $G/N \cap L$ est résoluble-par-fini minimax.

Théorème 1.3.4 [40, théorème 10.33]. Soit G un groupe résoluble minimax et soit R le sous-groupe engendré par tous les sous-groupes quasicycliques de G . Alors R est le produit direct d'un nombre fini de sous-groupes quasicycliques. De plus R est le résiduel fini de G .

Je donne maintenant la définition d'un MC -élément :

Définition 1.3.5. Un élément x d'un groupe G est dit un MC -élément, si $G/C_G(x^G)$ est résoluble-par-fini minimax.

La définition d'un MC -centre est la suivante :

Définition 1.3.6. Soit G un groupe, l'ensemble de tous les MC -éléments de G est appelé le MC -centre de G , il est noté $MC(G)$.

Définition 1.3.7. Un groupe G est dit un MC -groupe, si chaque élément de G est un MC -élément. Autrement dit, G est un MC -groupe si, et seulement si, $G = MC(G)$.

Dans [25], Kurdachenko et Otal ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.3.8. Soit G un MC -groupe, alors x^G est résoluble-par-fini minimax pour tout x de G .

D'après le théorème précédent, on peut déduire la conséquence suivante :

Corollaire 1.3.9. Si G est un MC -groupe de type fini, alors G est résoluble-par-fini minimax.

Toujours dans [25], on a les conséquences suivantes :

Corollaire 1.3.10. *Soit G un MC-groupe, alors G possède une série ascendente de sous-groupes telle que les quotients soient des groupes abéliens minimax ou finis. Par conséquent, tout MC-groupe est hyper-(fini ou abélien minimax).*

Corollaire 1.3.11. *Si G est un MC-groupe et M un sous-groupe maximal de G , alors M est d'indice fini dans G .*

1.4 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont des M_rC -groupes

Soit G un groupe, on définit $D(G)$ est le sous-groupe de G engendré par tous les sous-groupes divisibles de Černikov et normaux dans G . Il est facile de voir que $D(G)$ est le plus grand sous-groupe abélien divisible périodique et normal dans G . Dans cette section on va donner les résultats qui ont été obtenus sur les M_rC -groupes et les non- M_rC -groupes minimaux.

1.4.1 Groupes minimax réduits

Dans ce qui suit, nous avons identifié quelques propriétés des groupes minimax réduits les plus connues. Pour ce faire, on commence par donner la définition d'un groupe minimax réduit.

Définition 1.4.1.1. *Soit G un groupe. G est dit minimax réduit s'il est résoluble-par-fini minimax et $D(G) = 1$.*

Théorème 1.4.1.2 [38, Corollaire du Théorème 1]. *Les groupes minimax réduits sont résiduellement finis et donc ils n'ont aucun sous-groupe $\mathcal{F}$ -parfait non-trivial.*

La classe des groupes minimax réduits admet les propriétés suivantes :

Proposition 1.4.1.3. Soient G un groupe, $M, N \trianglelefteq G$ et $H \leq G$:

- (i) Si G est minimax réduit, alors H est minimax réduit.
- (ii) Si N et G/N sont minimax réduits, alors G est minimax réduit.
- (iii) Si G/N et G/M sont minimax réduits, alors $G/N \cap M$ est minimax réduit.

Remarque. la classe de groupes minimax réduits n'est pas stable par passage aux quotients.

Exemple. Soit $\mathbb{Q}_\pi = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \text{ est un } \pi \text{ nombre positif} \right\}$ où π est un ensemble fini de nombres premiers. On a $\mathbb{Q}_\pi$ est un groupe abélien minimax sans-torsion, il est minimax réduit. Maintenant comme $\mathbb{Q}_\pi$ est abélien minimax, alors $\mathbb{Q}_\pi$ admet un sous-groupe de type fini A où $\mathbb{Q}_\pi/A$ vérifie la condition minimale sur les sous-groupes, donc $\mathbb{Q}_\pi/A$ est le produit direct d'un nombre fini de groupes quasicycliques, ce qui donne $D(\mathbb{Q}_\pi/A) = \mathbb{Q}_\pi/A$, d'où $\mathbb{Q}_\pi/A$ n'est pas minimax réduit. On déduit que le quotient d'un groupe minimax réduit n'est pas forcément minimax réduit.

Dans [25], Kurdachenko et Otal ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.4.1.4. Soit G un groupe minimax réduit et supposons que $Q \leq \text{Aut}(G)$. Si Q est hyper-(abélien ou fini), alors Q est un groupe minimax réduit.

1.4.2 M_rC -groupes

Dans cette sous-section, on présente quelques propriétés sur les M_rC -groupes. Ces groupes ont été étudiés pour la première fois par L. A. Kurdachenko et J. Otal en 2001. On commence par donner la définition d'un M_rC -élément.

Définition 1.4.2.1. Un élément x d'un groupe G est dit un M_rC -élément, si $G/C_G(x^G)$ est minimax réduit.

Je donne maintenant la définition d'un M_rC -centre :

Définition 1.4.2.2. Soit G un groupe. Le M_rC -centre de G est l'ensemble de tous les M_rC -éléments de G , il est noté $M_rC(G)$.

La définition d'un M_rC -groupe est la suivante :

Définition 1.4.2.3. Un groupe G est dit un M_rC -groupe si chaque élément de G est un M_rC -élément, c'est-à-dire $G = M_rC(G)$.

En 2001, Kurdachenko et Otal ont étudié les M_rC -groupes et ont trouvé les résultats suivants :

Théorème 1.4.2.4. Soit G un M_rC -groupe, alors x^G est minimax réduit, pour tout x de G .

En 2013 M. Bouchelaghem et N. Trabelsi ont montré le résultat suivant :

Lemme 1.4.2.5. Soit G un groupe, alors G est un M_rC -groupe si, et seulement si, x^G est minimax réduit, pour tout $x \in G$.

Remarque. Les $(PF)C$ -groupes sont des M_rC -groupes.

Théorème 1.4.2.6 [25]. Si G est un M_rC -groupe, alors $G/Z(G)$ est résiduellement fini.

Corollaire 1.4.2.7. Si G est un MC -groupe, alors $G/D(G)$ est un M_rC -groupe.

La classe des groupes M_rC n'est pas stable par extension mais satisfait une certaine forme d'extensibilité faible, qui peut être énoncée comme suit.

Lemme 1.4.2.8 [5]. Soit H un sous-groupe normal et minimax réduit d'un groupe G . Si G/H est un M_rC -groupe, alors G est un M_rC -groupe.

Soit G un groupe. Notons $F(G)$ le sous-groupe engendré par tous les sous-groupes n'admettant aucun sous-groupe propre d'indice fini.

Lemme 1.4.2.9 [25]. Soit G un groupe.

(i) Si G est un M_rC -groupe, alors $F(G) \leq Z(G)$.

(ii) Si G est un MC -groupe, alors $D(G) \leq Z(F(G))$ et $F(G)/D(G)$ est un groupe abélien divisible sans-torsion.

Lemme 1.4.2.10 [25]. Soit G un M_rC -groupe et soit H un sous-groupe normal dans G tel que G/H n'admet aucun sous-groupe propre d'indice fini. Alors $Z(H) \leq Z(G)$.

Soit G un groupe, l'intersection de tous les sous-groupes maximaux de G est appelée le sous-groupe de Frattini de G , on le note $Frat(G)$. Si G n'admet pas de sous-groupes maximaux, alors $G = Frat(G)$.

Corollaire 1.4.2.11 [25]. Soit G un groupe tel que $G = Frat(G)$. Si G est un MC -groupe (respectivement, un M_rC -groupe), alors G est nilpotent radicable de classe de nilpotence ≤ 2 (respectivement, abélien divisible).

Lemme 1.4.2.12 [25]. Soit G un groupe tel que $G/Frat(G)$ soit périodique :

(i) Si G est un MC -groupe, alors il est un CC -groupe.

(ii) Si G est un M_rC -groupe, alors il est un FC -groupe.

Maintenant, on va donner les résultats qui ont été obtenus sur les non- M_rC -groupes minimaux possédant une image homomorphe non-triviale finie ou abélienne. En 2013 M. Bouchelaghem et N. Trabelsi ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.4.2.13 [5]. Soit G un groupe tel que G^* , le résiduel fini de G , est un sous-groupe propre dans G , alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est un non- M_rC -groupe minimal ;

(ii) G est un non- $(PF)C$ -groupe minimal ;

(iii) G est un non- FC -groupe minimal.

En 2016 M. Bouchelaghem et N. Trabelsi ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.4.2.14 [7]. Soit G un non- M_rC -groupe minimal, alors G est non-parfait

si, et seulement si, G admet un sous-groupe propre d'indice fini.

D'après le Théorème précédent on peut déduire la conséquence suivante :

Corollaire 1.4.2.15 [7]. *Soit G un groupe non-parfait, alors G est un non- M_rC -groupe minimal si, et seulement si, G est un non- FC -groupe minimal.*

1.5 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont des $\mathfrak{X}L$ -groupes

Soient G un groupe et $m \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$; le sous-groupe G_m engendré par tous les éléments d'ordre m est appelé le m -layer de G . On dit que G est un $\mathfrak{X}L$ -groupe si tous les layers appartiennent à $\mathfrak{X}$ où $\mathfrak{X}$ est une classe de groupes. Il s'ensuit que G est dit un non- $\mathfrak{X}L$ -groupe minimal si G n'est pas un $\mathfrak{X}L$ -groupe mais tous ses sous-groupes propres sont des $\mathfrak{X}L$ -groupes. Dans cette section on va donner les résultats qui ont été obtenus sur les $\mathfrak{X}L$ -groupes et les non- $\mathfrak{X}L$ -groupes minimaux localement gradués où $\mathfrak{X}$ est la classe des groupes finis ou de Černikov.

1.5.1 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont des CL -groupes

Dans cette sous-section on va donner les résultats qui ont été obtenus sur les CL -groupes et les non- CL -groupes minimaux. Pour ce faire, on commence par donner la définition d'un CL -groupe.

Définition 1.5.1.1. *Un groupe G est dit un CL -groupe, si pour tout entier m strictement positif le sous-groupe $\langle x \in G \mid o(x) = m \rangle$ est de Černikov.*

Le Théorème suivant est une définition équivalente à la définition précédente.

Théorème 1.5.1.2. *Un groupe G est un CL -groupe si, et seulement si, G est un CC -groupe périodique et chaque sous-groupe de Sylow de G est de Černikov.*

D'après le Théorème précédent on peut déduire la conséquence suivante.

Corollaire 1.5.1.3. *Tout CL -groupe est dénombrable.*

La classe des CL -groupes n'est pas stable par extension mais satisfait une certaine forme d'extensibilité faible, qui peut être énoncée comme suit.

Corollaire 1.5.1.4. *Soient G un CC -groupe et N un sous-groupe normal propre de G tel que G/N soit de Černikov. Alors G est un CL -groupe si, et seulement si, N est un CL -groupe.*

Théorème 1.5.1.5 [15, Corollaire 2.21]. *Soit G un groupe tel que $G/Z(G)$ est un CL -groupe, alors G est un CL -groupe.*

En 1989 J. Otal et J. M. Penã, ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.5.1.6. (i) *Soit G un groupe localement gradué, alors G est un CL -groupe si, et seulement si, tout sous-groupe propre de G est un CL -groupe.*

(ii) *Soit G un groupe localement gradué, alors G est dans la classe $CL \cup \check{C}\mathcal{A}$ si, et seulement si, tout sous-groupe propre de G est dans la classe $CL \cup \check{C}\mathcal{A}$.*

D'après le Théorème précédent on peut déduire la conséquence suivante.

Corollaire 1.5.1.7. *Tout non- CL -groupe minimal est un non- CC -groupe minimal de type fini.*

1.5.2 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont des FL -groupes

Dans ce qui suit, nous avons identifié quelques propriétés sur les FL -groupes et les non- FL -groupes minimaux les plus connues. Pour ce faire, on commence par donner la

définition d'un FL -groupe.

Définition 1.5.2.1. *Un groupe G est dit un FL -groupe, si pour tout entier m strictement positif le sous-groupe $\langle x \in G \mid o(x) = m \rangle$ est fini.*

Le Théorème suivant est une définition équivalente à la définition précédente.

Théorème 1.5.2.2. *Un groupe G est un FL -groupe si, et seulement si, G est un FC -groupe périodique et chaque sous-groupe de Sylow de G est central-par-fini de Černikov.*

La classe des FL -groupes n'est pas stable par extension mais satisfait une certaine forme d'extensibilité faible, qui peut être énoncée comme suit.

Corollaire 1.5.2.3. *Soient G un FC -groupe et N un sous-groupe normal propre de G tel que G/N soit de Černikov. Alors G est un FL -groupe si, et seulement si, N est un FL -groupe.*

Théorème 1.5.2.4 [15, Corollaire 2.21]. *Soit G un groupe tel que $G/Z(G)$ est un FL -groupe, alors G est un FL -groupe.*

En 1989 J. Otal et J. M. Penã, ont étudié les groupes localement gradués dont tous les sous-groupes propres sont des FL -groupes. Ils ont obtenu les résultats suivants :

Théorème 1.5.2.5. (i) *Soit G un groupe localement gradué, alors G est un non- FL -groupe minimal si, et seulement si, G est un non- FC -groupe minimal non-parfait .*

(ii) *Soit G un groupe localement gradué, alors G est un non- $(FL \cup \mathfrak{FA})$ -groupe minimal si, et seulement si, G est un non- FC -groupe minimal non-parfait.*

Théorème 1.5.2.6. *Soit G un groupe localement gradué, alors G satisfait la condition minimale sur les non- FL sous-groupes si, et seulement si, G est un FL -groupe ou G est de Černikov.*

(ii) *Soit G un groupe localement gradué, alors G satisfait la condition minimale sur les non- $FL \cup \mathfrak{FA}$ sous-groupes si, et seulement si, G est un $FL \cup \mathfrak{FA}$ -groupe ou de Černikov.*

Chapitre 2

Groupes ayant “beaucoup” de $(\mathfrak{X}L \cup \mathfrak{X}\mathcal{A})$ -sous-groupes

2.1 Introduction

Soit $\mathfrak{X}$ une classe de groupes. Un groupe G est dit un $\mathfrak{X}L$ -groupe si $\langle x \in G \mid o(x) = m \rangle$ est un $\mathfrak{X}$ -groupe pour tout $m \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Il s’ensuit que G est dit un non- $\mathfrak{X}L$ -groupe minimal si G n’est pas un $\mathfrak{X}L$ -groupe mais tous ses sous-groupes propres sont des $\mathfrak{X}L$ -groupes. Les non- FL -groupes minimaux ont été étudiés dans [35] et dans [45]. Dans [35] J. Otal et J. M. Peña, ont caractérisé les non- $(FL \cup \mathfrak{F}\mathcal{A})$ (respectivement, non- FL)-groupes minimaux dans la classe des groupes localement gradués. Ils ont montré qu’un groupe est un non- $(FL \cup \mathfrak{F}\mathcal{A})$ (respectivement, non- FL)-groupe minimal localement gradué si, et seulement si, il est un non- FC -groupe minimal non-parfait. Dans ce chapitre on va généraliser ce résultat. Nous montrons qu’un groupe est un non- $((PF)L \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ (respectivement, non- $(PF)L$)-groupe minimal localement gradué si, et seulement si, il est un non- FC -groupe minimal non-parfait. D’après [39, Théorème 3] chaque $(PF)L$ -groupe non-périodique est polycyclique-par-fini, par conséquent il est de rang fini, donc un $(PF)L$ -groupe de rang infini est périodique et par suite il est un FL -groupe. Dans la troisième section, nous montrons qu’un groupe de rang infini dont tout sous-groupe

propre de rang infini est dans la classe $(FL \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ (respectivement, FL) est lui-même dans la classe $(FL \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ (respectivement, FL) à condition qu'il soit localement (résoluble-par-fini) et n'admet aucune image homomorphe simple de rang infini. Dans [35], il est prouvé qu'un groupe localement gradué vérifie la condition minimale sur les sous-groupes non- $(FL \cup \mathfrak{F}\mathcal{A})$ (respectivement, non- FL) si, et seulement si, il est un $(FL \cup \mathfrak{F}\mathcal{A})$ (respectivement, FL)-groupe ou de Černikov. On va généraliser ce résultat en démontrant qu'un groupe localement gradué vérifie la condition minimale sur les sous-groupes non- $((PF)L \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ (respectivement, non- $(PF)L$) si, et seulement si, il est un $((PF)L \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ (respectivement, $(PF)L$)-groupe ou de Černikov.

2.2 Non- $((PF)L \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ -groupes minimaux

Dans cette section on va caractériser les non- $(PF)L$ -groupes minimaux et les non- $((PF)L \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ -groupes minimaux dans la classe des groupes localement gradués. Dans ce qui suit, nous allons utiliser plusieurs fois les résultats suivants, la première est une partie de la Proposition 1 et du Théorème 2 dans [14].

Lemme 2.2.1. *Soit G un groupe infini simple localement (résoluble-par-fini) et dénombrable. Alors G admet un sous-groupe propre localement résoluble R tel que pour chaque élément $g \in G$, il existe un entier positif n vérifiant $g^n \in R$. De plus, si le radical de Hirsch-Plotkin de R est non-trivial, alors G est localement fini.*

Lemme 2.2.2. (1) *Si G est un $(PF)L$ -groupe non-périodique, alors il est polycyclique-par-fini [39, Théorème 3].*

(2) *Soit G un groupe abélien divisible. Si G n'est pas un p -groupe pour un certain nombre premier p , alors il existe deux sous-groupes N et M de G tels que $G = NM$ et G/N , G/M sont quasicycliques [5, Lemme 2.9].*

Dans le Théorème suivant, nous allons comparer les non- $(PF)L$ -groupes minimaux, les non- $((PF)L \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ -groupes minimaux et les non- $(PF)C$ -groupes minimaux.

Théorème 2.2.3. *Soit G un groupe.*

(i) *Si G est un non- $(PF)L$ -groupe minimal, alors il est un non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe minimal ;*

(ii) *Si G est un non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe minimal, alors il est un non- $(PF)C$ -groupe minimal.*

Démonstration. (i) Supposons que G soit un non- $(PF)L$ -groupe minimal ; pour montrer que G est un non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe minimal il suffit de montrer que G n'est pas $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe. Par l'absurde, on suppose que G soit un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe, donc si G est périodique, alors G est un FC -groupe et un non- FL -groupe minimal, c'est une contradiction par [45, Théorème 2.3]. Par conséquent, G n'est pas périodique. Si G admet un sous-groupe propre K d'indice fini, alors K n'est pas périodique, ce qui donne K et donc G est polycyclique-par-fini par le Lemme 2.2.2. Une contradiction qui montre que G n'admet aucun sous-groupe propre d'indice fini, il s'ensuit que G est un $(PF)C$ -groupe $\mathcal{F}$ -parfait et par suite il est abélien divisible et n'est pas périodique. Il est connu qu'il existe deux sous-groupes propres M et N de G tels que $G = MN$ et G/M , G/N sont quasicycliques par le Lemme 2.2.2, ce qui implique que M et N sont des $(PF)L$ -groupes non-périodiques, d'où M et N sont polycycliques par le Lemme 2.2.2 et donc $G \in \mathfrak{P}$. C'est une contradiction qui montre que G n'est pas $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe.

(ii) Supposons que G soit un non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe minimal, donc chaque sous-groupe propre est un $(PF)C$ -groupe et par suite il suffit de montrer que G n'est pas un $(PF)C$ -groupe. Par l'absurde, on suppose que G soit un $(PF)C$ -groupe. Il est clair que G n'est pas abélien, ça implique que G admet un sous-groupe propre K d'indice fini. Supposons que G soit périodique, ce qui donne G est un FC -groupe et soit K un FL -groupe ou K' est fini. Si K est un FL -groupe, alors nous obtenons la contradiction que G est un FL -groupe par le Corollaire 1.5.2.3. Par conséquent, K' est fini. Comme G/K' est un FC -groupe abélien-par-fini, G'/K' est fini ce qui donne la contradiction que G' est fini. Par suite G n'est pas périodique, d'où K n'est pas périodique. Si K est un $(PF)L$ -groupe, alors il est polycyclique-par-fini par le Lemme 2.2.2 et donc G est aussi

polycyclique-par-fini, une contradiction qui donne que K' est polycyclique-par-fini. Soit E un sous-groupe de type fini de G tel que $G = KE = KE^G$. Comme G est un $(PF)C$ -groupe, E^G est polycyclique-par-fini par le Théorème 1.2.3.2 et puisque $G' \leq K'E^G$, alors G' est polycyclique-par-fini, c'est une contradiction qui montre que G n'est pas un $(PF)C$ -groupe. ■

D'après le Théorème précédent on peut déduire la conséquence suivante :

Corollaire 2.2.4. *Soit G un non- $((PF)L \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ -groupe minimal, alors G est localement gradué si, et seulement si, G n'est pas de type fini.*

D'après A. Y. Ol'shanski [30, Section 27] (voir aussi l'introduction de [26]), il existe un groupe parfait G dont le centre $Z(G)$ est un groupe abélien libre de rang infini et $G/Z(G)$ est un groupe simple dont tous les sous-groupes propres sont cycliques d'ordre premier. Cet exemple montre qu'un non- $((PF)L \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ (respectivement, non- $(PF)C$)-groupe minimal n'est pas forcément un non- $(PF)L$ -groupe minimal. En effet, il est clair que $Z(G)$ n'est pas un $(PF)L$ -groupe car il n'est pas périodique et de rang infini, donc G admet un sous-groupe propre qui n'est pas un $(PF)L$ -groupe, il s'ensuit que G n'est pas un non- $(PF)L$ -groupe minimal. Soit H un sous-groupe propre de G , alors $HZ(G)$ est aussi propre dans G car G est parfait, donc $HZ(G)/Z(G) \simeq H/H \cap Z(G)$ est cyclique. On sait que $H \cap Z(G) \leq Z(H)$, ça implique que $H/Z(H) \simeq (H/H \cap Z(G))/(Z(H)/H \cap Z(G))$ est cyclique et par suite H est abélien, donc tout sous-groupe propre de G est abélien. Supposons que G est un $(PF)C$ -groupe, donc $G/Z(G)$ est un $(PF)C$ -groupe car la classe des groupes $(PF)C$ est stable par passage aux quotients. Il est facile de voir que tout $(PF)C$ -groupe simple est fini, donc $G/Z(G)$ est fini. On sait que tout groupe fini dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents est résoluble, ce qui donne $G/Z(G)$ est résoluble et par suite $G/Z(G)$ est trivial car il est parfait c'est une contradiction qui montre que G n'est pas un $(PF)C$ -groupe. Par conséquent, G est un non- $((PF)L \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ (respectivement, non- $(PF)C$)-groupe minimal.

Rappelons qu'une classe de groupes $\mathfrak{X}$ est dit dénombrablement reconnaissable si

un groupe G est un $\mathfrak{X}$ -groupe lorsque tous les sous-groupes dénombrables sont des $\mathfrak{X}$ -groupes. Il est bien connu que la classe $\mathfrak{S}$ des groupes résolubles et la classe $\mathcal{N}$ des groupes nilpotents sont dénombrablement reconnaissables.

Les non- $((PF)L \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ -groupes minimaux localement gradués et les non- $(PF)L$ -groupes minimaux localement gradués sont exactement les non- FC -groupes minimaux non-parfaits. Pour démontrer ce résultat, nous avons besoin du Lemme suivant.

Lemme 2.2.5. *Si G n'est pas un $(PF)C$ -groupe, alors il contient un sous-groupe dénombrable qui n'est pas un $(PF)C$ -groupe. Par conséquent, la classe des groupes $(PF)C$ est dénombrablement reconnaissable et tout non- $(PF)C$ -groupe minimal est dénombrable.*

Démonstration. Supposons que G n'est pas un $(PF)C$ -groupe et soit x un élément de G tel que x^G ne soit pas polycyclique-par-fini. Il est clair qu'on peut supposer que G n'est pas de type fini et que chaque sous-groupe de type fini de G est un $(PF)C$ -groupe, ça implique que G est localement (polycyclique-par-fini) par le Théorème 1.2.3.2, donc x^G ne vérifie pas la condition maximale sur les sous-groupes. Il s'ensuit qu'il existe une chaîne infinie strictement ascendante de sous-groupes de x^G .

$$H_0 \subsetneq H_1 \subsetneq \cdots \subsetneq H_n \subsetneq \cdots$$

Soit $1 \neq h_0 = x^{g_{01}}x^{g_{02}} \cdots x^{g_{0t_0}} \in H_0$ et pour tout $n > 0$ soit $h_n = x^{g_{n1}}x^{g_{n2}} \cdots x^{g_{nt_n}} \in H_n \setminus H_{n-1}$ et soit $K = \langle \{x, g_{n1}, \dots, g_{nt_n} \mid n \geq 0\} \rangle$, d'où K est un sous-groupe dénombrable de G et

$$\langle h_0 \rangle \subsetneq \langle h_0, h_1 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle h_1, \dots, h_n \rangle \subsetneq \cdots$$

est une chaîne infinie strictement ascendante de sous-groupes de x^K . On déduit que x^K ne vérifie pas la condition maximale sur les sous-groupes, donc K n'est pas un $(PF)C$ -groupe. ■

Maintenant, on peut démontrer notre résultat principal de cette section.

Théorème 2.2.6. *Un groupe G est un non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe minimal localement gradué si, et seulement si, il est un non- FC -groupe minimal non-parfait.*

Démonstration. Supposons que G soit un groupe localement gradué non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe minimal. Si G est de type fini, alors il admet un sous-groupe propre H de type fini et d'indice fini dans G ce qui donne par le Théorème 1.2.3.2 H et donc G est polycyclique-par-fini. Une contradiction qui montre que G est de type infini, d'où G est localement (résoluble-par-fini). Par l'absurde on suppose que G soit parfait, comme G est un non- $(PF)C$ -groupe minimal par le Théorème 2.2.3, il est $\mathcal{F}$ -parfait par [6, Théorème 1.1]. Par suite toute image homomorphe non-triviale de G satisfait l'hypothèse de G . Supposons que G soit simple, comme tout non- FC -groupe minimal localement gradué parfait est localement nilpotent [27], G ne peut pas être périodique. D'après le Lemme 2.2.1 et le Lemme 2.2.5, il existe un sous-groupe propre non périodique et localement résoluble R de G tel que le radical de Hirsch-Plotkin de R est trivial et pour chaque élément g de G il existe un entier positif n vérifie $g^n \in R$. D'autre part, R est soit un $\mathfrak{PF}$ -groupe ou $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe et comme R est localement résoluble, il est résoluble, il s'ensuit que R est trivial, ce qui donne la contradiction que G est périodique. Par conséquent, G n'est pas simple. Soit H un sous-groupe normal propre de G , si H est un FL -groupe et comme les layers sont des sous-groupes caractéristiques, alors pour tout entier strictement positif m , H_m est un sous-groupe fini et normal dans G , donc H_m est central dans G car G est $\mathcal{F}$ -parfait ce qui donne que H est abélien. Par suite dans tous les cas H est un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe, on en déduit que $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ où $H_i \triangleleft G$ et $H_i \in (\mathfrak{PF})\mathcal{A}$, d'où $G = G' = \bigcup_{i=1}^{\infty} H'_i$ où $H'_i \triangleleft G$ et $H'_i \in \mathfrak{PF}$. Il s'ensuit que pour chaque élément x de G il existe un entier positif i tel que $x^G \leq H'_i \in \mathfrak{PF}$, ce qui donne la contradiction que G est un $(PF)C$ -groupe par le Théorème 1.2.3.2 et donc G est non-parfait. Par conséquent, G est un non- FC -groupe minimal par [6, Théorème 1.1]. Maintenant, soit G un non- FC -groupe minimal non-parfait. Alors G est de Černikov par [4], comme il est bien connu que les groupes abéliens de Černikov sont des FL -groupes, on déduit par

le Corollaire 1.5.2.3 que G est un non- FL -groupe minimal. Par conséquent, G est un non- $(PF)L$ -groupe minimal localement gradué car il est périodique. ■

Comme les non- FC -groupes minimaux non-parfaits sont périodiques, on peut déduire les conséquences suivantes.

Corollaire 2.2.7. *(i) Soit G un groupe localement gradué, alors les propriétés suivantes sont équivalentes : :*

- (1) G est un non- FL -groupe minimal ;
- (2) G est un non- $(FL \cup \mathfrak{F}\mathcal{A})$ -groupe minimal ;
- (3) G est un non- $(PF)L$ -groupe minimal ;
- (4) G est un non- $((PF)L \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ -groupe minimal.

(ii) Tout non- $((PF)L \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ -groupe minimal non-périodique est de type fini.

2.3 Groupes dont les sous-groupes propres de rang infini sont des $(FL \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ -groupes

Rappelons qu'un groupe G est dit de rang fini s'il existe un entier strictement positif r tel que tout sous-groupe de type fini est engendré par au plus r éléments où r est le plus petit entier vérifiant cette propriété. Si l'entier r n'existe pas, alors G est dit de rang infini. D'après le Lemme 2.2.2, tout $(PF)L$ -groupe de rang infini est un FL -groupe, nous allons étudier dans cette section les groupes de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(FL \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ (respectivement, FL)-groupes. Dans [35, Théorème 2] les non- $(FL \cup \mathfrak{F}\mathcal{A})$ -groupes minimaux sont caractérisés, nous allons également caractériser les groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(FL \cup \mathfrak{F}\mathcal{A})$ -groupes. Pour ce faire on montre les Lemmes suivants :

Lemme 2.3.1. *Un groupe G est un non- $(FL \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$ -groupe minimal localement gradué si, et seulement si, il est un non- FC -groupe minimal non-parfait.*

Démonstration. Soit G un non- $(FL \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe minimal localement gradué. Supposons que G est dans la classe $(PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A}$, donc il est un $(PF)L$ -groupe. Par suite si G est périodique, alors il est un FL -groupe et s'il n'est pas périodique, alors il est $\mathfrak{PF}$ -groupe. Dans les deux cas, nous avons une contradiction qui montre que G est un non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe minimal. On déduit par le Théorème 2.2.6 que G est un non- FC -groupe minimal non-parfait. L'inverse est clair par le Théorème 2.2.6. ■

Lemme 2.3.2. *Soit G un groupe de rang infini dont tout sous-groupe propre de rang infini est un $(FL \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ (respectivement, un FL)-groupe. Si G/G' est de rang infini, alors G est un $(FL \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ (respectivement, FL)-groupe.*

Démonstration. On suppose que G/G' est de rang infini et soit H un sous-groupe de rang fini de G . Comme $(HG'/G') \simeq (H/H \cap G')$, alors HG' est propre dans G . Si HG' est de rang infini, HG' et donc H sont des $(FL \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ (respectivement, FL)-groupes et si HG' est de rang fini, alors le groupe $G/G'H$ est abélien de rang infini, donc il contient un sous-groupe propre de rang infini, soit N/HG' . On en déduit que N est de rang infini, donc N et par suite H sont des $(FL \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ (respectivement, FL)-groupes. Par conséquent tous les sous-groupes propres de G sont des $(FL \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ (respectivement, FL)-groupes. Comme les non- $(FL \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupes minimaux (respectivement, les non- FL -groupes minimaux) sont de rang fini d'après le Lemme 2.3.1 (respectivement, Corollaire 2.2.7), on déduit que G est un $(FL \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe (respectivement, FL -groupe). ■

Lemme 2.3.3. *Soit G un groupe de rang infini possédant une image homomorphe non-triviale finie ou abélienne.*

- (i) *Si tout sous-groupe propre de rang infini de G est soit un FL -groupe ou un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe, alors G est soit un FL -groupe ou G' est polycyclique-par-fini.*
- (ii) *Si tout sous-groupe propre de rang infini de G est soit un FL -groupe ou un $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ -groupe, alors G est soit un FL -groupe ou G' est fini.*
- (iii) *Si tout sous-groupe propre de rang infini de G est un FL -groupe, alors G est un*

FL-groupe.

Démonstration. (i) Il est clair que tout sous-groupe propre de rang infini de G est un $(PF)C$ -groupe par le Lemme 1.2.3.3 et d'après [6, Théorème 1.2] G est un $(PF)C$ -groupe. On peut supposer que G n'est pas abélien, donc il contient un sous-groupe propre K d'indice fini. Soit E un sous-groupe de type fini de G tel que $G = KE = KE^G$. D'autre part, $G' \leq K'E^G$ et E^G est polycyclique-par-fini par le Théorème 1.2.3.2. D'après le Lemme 2.3.2, on peut supposer que G' est de rang infini ce qui donne K' est de rang infini et par suite K est un FL -groupe. Il s'ensuit que G est périodique, donc G est un FC -groupe et par le Corollaire 1.5.2.3, G est un FL -groupe.

(ii) D'après (i) G est soit un FL -groupe ou G' est polycyclique-par-fini. Supposons que G ne soit pas un FL -groupe, ça implique que G' est polycyclique-par-fini et donc G/G' est de rang infini. On déduit que tout sous-groupe propre de G est dans la classe $FL \cup \mathfrak{FA}$. Par conséquent, G est dans la classe $\mathfrak{FA}$ par [35, Théorème 2].

(iii) Supposons que G n'est pas un FL -groupe. Par (i) G' est polycyclique-par-fini et d'après le Lemme 2.3.2 G/G' est de rang fini, donc G est de rang fini. Une contradiction qui montre que G est un FL -groupe. ■

Maintenant, on peut démontrer notre résultat principal de cette section.

Théorème 2.3.4. *Soit G un groupe localement (résoluble-par-fini) de rang infini qui n'admet aucune image homomorphe simple de rang infini.*

- (i) *Si tout sous-groupe propre de rang infini de G est soit un FL -groupe ou un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe, alors G est soit un FL -groupe ou G' est polycyclique-par-fini.*
- (ii) *Si tout sous-groupe propre de rang infini de G est soit un FL -groupe ou un $\mathfrak{FA}$ -groupe, alors G est soit un FL -groupe ou G' est fini.*
- (iii) *Si tout sous-groupe propre de rang infini de G est un FL -groupe, alors G est un FL -groupe.*

Démonstration. (i) D'après le Lemme 2.3.3, on peut supposer que G est parfait et $\mathcal{F}$ -

parfait. Soit N est un sous-groupe normal de rang fini de G et d'après [11, Lemme 2.3], G admet un sous-groupe H propre et de rang infini. Si $G = HN$, alors $G/N \simeq H/H \cap N$ est soit un FL -groupe ou un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe, il s'ensuit que G/N est trivial car G est parfait et $\mathcal{F}$ -parfait, c'est une contradiction qui montre que NH est un sous-groupe propre de rang infini, donc N est soit un FL -groupe ou $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe. Si N est un FL -groupe, alors les layers sont centraux dans G car G est $\mathcal{F}$ -parfait, d'où N est abélien. Il s'ensuit que tout sous-groupe normal de G de rang fini est un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe. On suppose que tout sous-groupe normal propre de G est de rang fini, ce qui implique que G n'admet aucune image homomorphe simple, donc $G = \bigcup_{i \in I} N_i$ où chaque N_i est un sous-groupe normal propre. D'où $G = G' = \bigcup_{i \in I} N'_i$, pour chaque élément x de G il existe $i \in I$ tel que $x^G \leq N'_i$, il s'ensuit que x^G est polycyclique-par-fini, ce qui donne la contradiction que G est un $(PF)C$ -groupe. Par conséquent, G admet un sous-groupe normal propre de rang infini, soit N . Supposons que G/N soit de rang fini, donc il est (localement résoluble)-par-fini par [9] et comme G est $\mathcal{F}$ -parfait, G est localement résoluble, ce qui donne G/N est hypercentral-par-résoluble d'après [40, Lemme 10.39] c'est une contradiction car G/N est parfait. Par suite G/N est de rang infini et donc si H est un sous-groupe de rang fini de G , alors HN est un sous-groupe propre de G de rang infini, donc HN et par suite H est soit un FL -groupe ou $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe. Par conséquent, G est soit un FL -groupe ou un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe par le Lemme 2.3.1.

(ii) Par (i) G est soit un FL -groupe ou un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe. Supposons que G ne soit pas un FL -groupe, il s'ensuit que G est un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe. Comme G est de rang infini, on en déduit qu'il est non-parfait. D'après le Lemme 2.3.3, G est fini-par-abélien.

(iii) D'après (i) G est soit un FL -groupe soit un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe. Si G est un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe, alors il est non-parfait. Par conséquent, G est un FL -groupe par le Lemme 2.3.3.

■

Dans [18, Corollaire A2], il est prouvé que si G est un groupe localement (résoluble-par-fini) de rang infini tel que le sous-groupe dérivé de chaque sous-groupe propre de

rang infini est minimax, alors G' est minimax. En combinant ce résultat et le Théorème 2.3.4, nous obtenons la conséquence suivante.

Corollaire 2.3.5. *Soit G un groupe localement (résoluble-par-fini) de rang infini dont tout sous-groupe propre de rang infini est un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe. Alors G est un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe.*

Démonstration. D'après [18, Corollaire A2] on déduit que G' est minimax, et donc G n'admet aucune image homomorphe simple de rang infini ce qui donne que G est soit un FL -groupe soit un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe par le Théorème 2.3.4. Supposons que G ne soit pas un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe, d'où il est un FC -groupe. Comme G n'est pas abélien, il contient un sous-groupe propre H d'indice fini, il s'ensuit que H' est un $\mathfrak{PF}$ -groupe et G/H' est un FC -groupe abélien-par-fini, donc G/H' est fini-par-abélien, ce qui donne que G' est un $\mathfrak{PF}$ -groupe. Une contradiction qui montre que G est un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe. ■

D'après [10, Corollaire 2.14], on peut déduire que si G est un groupe localement (résoluble-par-fini) de rang infini dont tout sous-groupe propre de rang infini est un FC -groupe (localement résoluble)-par-fini, alors G n'admet aucune image homomorphe simple de rang infini. En combinant ce fait et le Théorème 2.3.4, nous obtenons la conséquence suivante.

Corollaire 2.3.6. *Soit G un groupe localement (résoluble-par-fini) de rang infini dont tout sous-groupe propre de rang infini est (localement résoluble)-par-fini.*

- (i) *Si tout sous-groupe propre de rang infini de G est soit un FL -groupe soit un $\mathfrak{FA}$ -groupe, alors G est soit un FL -groupe soit $G \in \mathfrak{FA}$.*
- (ii) *Si tout sous-groupe propre de rang infini de G est un FL -groupe, alors G est un FL -groupe.*

On va établir un résultat similaire pour la classe des groupes $(FL \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ mais avec l'hypothèse supplémentaire que le groupe soit dénombrable.

Corollaire 2.3.7. *Soit G un groupe localement (résoluble-par-fini) de rang infini et dénombrable dont tout sous-groupe propre de rang infini est (localement résoluble)-par-fini et soit un FL -groupe ou un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe. Alors G est un FL -groupe ou un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe.*

Démonstration. Supposons que G admet une image homomorphe simple $\overline{G}$ de rang infini. Si $\overline{G}$ est périodique, alors tout sous-groupe propre de $\overline{G}$ de rang infini est un FC -groupe (localement résoluble)-par-fini et donc $\overline{G}$ n'est pas simple par la remarque ci-dessus, c'est une contradiction qui montre que $\overline{G}$ ne peut pas être localement fini. Il s'ensuit par le Lemme 2.2.1 qu'il existe un sous-groupe propre localement résoluble et non périodique $\overline{R}$ de $\overline{G}$ tel que pour chaque élément $\overline{g}$ dans $\overline{G}$ il existe un entier strictement positif n vérifiant $\overline{g}^n$ est un élément dans $\overline{R}$ et le radical de Hirsch-Plotkin de $\overline{R}$ est trivial. Supposons que $\overline{R}$ soit de rang fini, donc il est hypercentral-par-résoluble d'après [40, Lemme 10.39] et par suite il est trivial, ce qui donne la contradiction que $\overline{G}$ est périodique. On en déduit que $\overline{R}$ est de rang infini, ça implique que $\overline{R}$ est un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe, donc $\overline{R}$ est résoluble et par suite il est trivial. Une contradiction qui montre que G n'admet aucune image homomorphe simple de rang infini. Par conséquent, G est soit un FL -groupe ou un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe par le Théorème 2.2.4. ■

Rappelons que la classe des groupes fortement localement gradués est une classe de groupes résolubles généralisés qui peut être définie comme suit.

Soit $\mathfrak{D}$ la classe de groupes périodiques localement gradués, et soit $\overline{\mathfrak{D}}$ la fermeture de $\mathfrak{D}$ par les opérateurs $\acute{P}$, $\grave{P}$, R et L . Il est facile de montrer que chaque $\overline{\mathfrak{D}}$ -groupe est localement gradué et que la classe $\overline{\mathfrak{D}}$ est stable par passage aux sous-groupes. De plus, dans [9] Černikov a prouvé que chaque $\overline{\mathfrak{D}}$ -groupe de rang fini est une extension finie d'un sous-groupe localement résoluble. Évidemment, tous les groupes résiduellement finis appartiennent à $\overline{\mathfrak{D}}$, et donc la considération de tout groupe libre non abélien montre que la classe $\overline{\mathfrak{D}}$ n'est pas stable par passage aux quotients. Nous dirons qu'un groupe G est fortement localement gradué si chaque section de G est un $\overline{\mathfrak{D}}$ -groupe. Ainsi, la classe

de groupes fortement localement gradués forme une grande classe de groupes résolubles généralisés fermée par rapport aux sous-groupes et aux images homomorphes, en particulier elle contient tous les groupes localement (résolubles-par-finis).

Lemme 2.3.8. *Soit G un groupe fortement localement gradué de rang infini. Si tout sous-groupe propre de rang infini de G est localement (résoluble-par-fini), alors G est localement (résoluble-par-fini).*

Démonstration. D'abord, on suppose que G soit de type fini, donc G contient un sous-groupe propre H d'indice fini, ça implique que H est de type fini et de rang infini, donc il est résoluble-par-fini et par suite G est aussi résoluble-par-fini. Maintenant, supposons que G ne soit pas de type fini, donc tout sous-groupe de type fini est propre dans G . Soit H un sous-groupe de type fini dans G , si H est de rang infini, alors il est résoluble-par-fini. D'autre part, dans [9] Černikov à montré que chaque $\overline{\mathfrak{D}}$ -groupe de rang fini est une extension finie d'un sous-groupe localement résoluble, il s'ensuit que si H est de rang fini, alors il est résoluble-par-fini. Par conséquent, G est localement (résoluble-par-fini). ■

Remarque. *D'après le Lemme précédent, le Théorème 2.3.4, le Corollaire 2.3.5, le Corollaire 2.3.6 et le Corollaire 2.3.7 restent vrais si on suppose que G est fortement localement gradué.*

2.4 Groupes dont les sous-groupes propres de rang infini sont des $(CL \cup \check{C}\mathcal{A})$ -groupes

Dans cette section on va caractériser les groupes de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont des $(CL \cup \check{C}\mathcal{A})$ (respectivement, CL)-groupes dans la classe des groupes localement (résolubles-par-finis).

Lemme 2.4.1. *Soit G un groupe de rang infini dont tout sous-groupe propre de rang infini est un $(CL \cup \check{C}\mathcal{A})$ -groupe (respectivement CL -groupe). Si G/G' est de rang infini,*

alors G est un $(CL \cup \check{\mathcal{A}})$ -groupe (respectivement CL -groupe).

Démonstration. On suppose que G/G' est de rang infini et soit H un sous-groupe de rang fini de G . Comme $(HG'/G') \simeq (H/H \cap G')$, alors HG' est propre dans G . Si HG' est un sous-groupe de rang infini, alors HG' et donc H sont des $(CL \cup \check{\mathcal{A}})$ (respectivement, CL)-groupes et si HG' est de rang fini, alors le groupe $G/G'H$ est abélien de rang infini, donc il contient un sous-groupe propre de rang infini, soit N/HG' . On en déduit que N est de rang infini, donc N et par suite H sont des $(CL \cup \check{\mathcal{A}})$ (respectivement, CL)-groupes. Par conséquent tous les sous-groupes propres de G sont des $(CL \cup \check{\mathcal{A}})$ (respectivement, CL)-groupes. Il est clair que G est localement gradué et d'après [35, Théorème 1], G est un $(CL \cup \check{\mathcal{A}})$ -groupe (respectivement CL -groupe). ■

Pour démontrer le Lemme suivant, on utilise les résultats suivants.

Lemme 2.4.2 [13]. *Soit G un groupe localement (résoluble-par-fini) et supposons que chaque sous-groupe propre de G est de (rang fini)-par-(nilpotent de classe $\leq c$). Alors G est de (rang fini)-par-(nilpotent de classe $\leq c$).*

Lemme 2.4.3 [33]. *Soit G un groupe localement gradué. Alors G est Černikov-par-(nilpotent de classe $\leq c$) si, et seulement si, chaque sous-groupe propre de G est Černikov-par-(nilpotent de classe $\leq c$).*

Lemme 2.4.4. *Soit G un groupe localement (résoluble-par-fini) de rang infini dont tout sous-groupe propre de rang infini est soit un CL -groupe ou Černikov-par-abélien. Si G n'est pas Černikov-par-abélien, alors G est localement fini.*

Démonstration. Pour montrer que G est localement fini il suffit de montrer que G est périodique. Par l'absurde on suppose que G ne soit pas périodique. D'après [11, Théorème A], G' est localement fini, donc G admet un sous-groupe de torsion, soit T , ça implique que G/T est un groupe non-trivial abélien et sans torsion. Si G/T est $\mathcal{F}$ -parfait, alors G/T est divisible, par [5, Lemme 2.9] il existe deux sous-groupes propres M et N de G

contenant T tels que $G = MN$ et G/M , G/N sont quasicycliques. Par suite il existe un sous-groupe propre M de G tel que $T \leq M$ et G/M est de Černikov, d'où M est de rang infini et n'est pas périodique. On en déduit que M' est de Černikov et comme $T \leq M$, T' est de Černikov. D'autre part, on a chaque CL -sous-groupe de G est contenu dans T , donc chaque CL -sous-groupe de G est Černikov-par-abélien, ça implique que chaque sous-groupe propre de G de rang infini est Černikov-par-abélien, donc G' est de rang fini par le Lemme 2.4.2. Il s'ensuit que tout sous-groupe propre de G est Černikov-par-abélien par [7, Lemme 3.7], d'où G est Černikov-par-abélien par le Lemme 2.4.3. Une contradiction qui montre que G est localement fini. ■

Lemme 2.4.5. *Soit G un groupe de rang infini possédant une image homomorphe non-triviale finie ou abélienne.*

(i) *Si tout sous-groupe propre de rang infini de G est soit un CL -groupe ou Černikov-par-abélien, alors G est soit un CL -groupe ou Černikov-par-abélien.*

(ii) *Si tout sous-groupe propre de rang infini de G est un CL -groupe, alors G est un CL -groupe.*

Démonstration. (i) Soit N un sous-groupe normal propre de G tel que G/N soit fini, donc N est de rang infini et par suite N est dans la classe $CL \cup \check{\mathcal{C}}\mathcal{A}$. Si N est un CL -groupe, alors G est périodique, donc tout sous-groupe propre de rang infini est un CC -groupe, d'après [7, Corollaire 6.6], G est un CC -groupe et par le Corollaire 1.5.1.4 G est un CL -groupe. Maintenant, si N est Černikov-par-abélien il est facile de voir que G est résoluble-par-fini. Supposons que G ne soit pas Černikov-par-abélien, donc d'après le Lemme 2.4.4 G est localement fini et par [7, Corollaire 6.6] G est un CC -groupe. Soit H un sous groupe de rang fini de G et soit P un p -sous-groupe de Sylow de H , donc P est un p -groupe localement fini et de rang fini, il s'ensuit que P est de Černikov par [9] et H est un CL -groupe. Par suite tout sous-groupe propre de G est soit un CL -groupe ou Černikov-par-abélien et par [35, Théorème 1] G est un CL -groupe. Considérons maintenant le cas où G est non-parfait et supposons que G n'est pas un CL -groupe et n'est pas Černikov-

par-abélien. D'après ce qui précède G n'admet aucun sous-groupe propre d'indice fini. Donc G/G' est un groupe abélien divisible et par le Lemme 2.4.1, G/G' est de rang fini, ça implique que G' est de rang infini. Soit H un sous-groupe de type fini de G . Supposons que $G = HG'$, donc $G/G' \simeq H/H \cap G'$, d'où G/G' est un groupe abélien divisible et de type fini, il s'ensuit que G/G' est trivial. Une contradiction qui montre que HG' est un sous-groupe propre de G de rang infini, donc HG' et par suite H est soit un CL -groupe ou Černikov-par-abélien, ce qui donne H est résoluble-par-fini. D'après le Lemme 2.4.4, G est localement fini et par [7, Corollaire 6.6] G est un CC -groupe, donc G est abélien. Une contradiction qui montre que G est soit un CL -groupe ou Černikov-par-abélien.

(ii) On suppose que G ne soit pas un CL -groupe, d'après (i) G est Černikov-par-abélien et par le Lemme 2.4.1 G/G' est de rang fini, donc G est de rang fini. Une contradiction qui montre que G est un CL -groupe. ■

Maintenant, on peut montrer le résultat principal de cette section.

Théorème 2.4.6. *Soit G un groupe localement (résoluble-par-fini) de rang infini tel que G n'admet aucune image homomorphe simple de rang infini.*

(i) *Si tout sous-groupe propre de rang infini de G est soit un CL -groupe ou Černikov-par-abélien, alors G est soit un CL -groupe ou Černikov-par-abélien.*

(ii) *Si tout sous-groupe propre de rang infini de G est un CL -groupe, alors G est un CL -groupe.*

Démonstration. (i) Supposons que G ne soit pas Černikov-par-abélien donc d'après le Lemme 2.4.4 G est localement fini et par le Lemme 2.4.5, on peut supposer que G est parfait et $\mathcal{F}$ -parfait. Soit N un sous-groupe normal de G de rang fini et d'après [11, Lemme 2.3], G admet un sous-groupe H propre et de rang infini. Si $G = HN$, alors $G/N \simeq H/H \cap N$ est soit un CL -groupe ou Černikov-par-abélien et donc G/N est trivial car G est parfait et $\mathcal{F}$ -parfait. Une contradiction qui montre que HN est propre et par suite N est soit un CL -groupe ou Černikov-par-abélien. Si N est un CL -groupe, alors pour tout entier strictement positif m , $G/C_G(N_m)$ est de Černikov où $N_m = \langle x \in N \mid o(x) = m \rangle$,

il s'ensuit que N_m est central dans G , donc N est abélien, ce qui donne tout sous-groupe normal de G de rang fini est Černikov-par-abélien. Si tout sous-groupe normal propre de G est de rang fini, alors G n'admet aucune image homomorphe simple donc $G = \bigcup_{i \in I} N_i$ où chaque N_i est un sous-groupe normal propre. D'où $G = G' = \bigcup_{i \in I} N'_i$, pour chaque élément x de G il existe $i \in I$ tel que $x^G \leq N'_i$, ça implique que x^G est de Černikov et comme G est périodique, G est un CC -groupe, il s'ensuit que G est abélien c'est une contradiction qui montre que G admet un sous-groupe normal propre de rang infini, soit N . Si G/N est de rang fini, alors il est (localement résoluble)-par-fini par [9] et comme G est $\mathcal{F}$ -parfait, G est localement résoluble, ce qui donne G/N est hypercentral-par-résoluble d'après [40, Lemme 10.39] c'est une contradiction car G/N est parfait, d'où G/N est de rang infini. Si H est un sous-groupe de rang fini de G , alors HN est un sous-groupe propre de rang infini, donc HN et par suite H est soit un CL -groupe ou Černikov-par-abélien. Par conséquent, G est un CL -groupe par [35, Théorème 1].

(ii) Par (i) G est soit un CL -groupe ou Černikov-par-abélien, si G' est de Černikov, alors G/G' est de rang infini donc d'après le Lemme 2.4.1, G est un CL -groupe. ■

D'après [11, Théorème A] et [7, Corollaire 6.6], on peut déduire la conséquence suivante :

Corollaire 2.4.7. *Soit G un groupe localement (résoluble-par-fini) de rang infini. Si tout sous-groupe propre de G de rang infini est un CC -groupe, alors G est soit un CC -groupe ou localement fini.*

Lemme 2.4.8. *Soit G un groupe localement (résoluble-par-fini) de rang infini. Si tout sous-groupe propre de G de rang infini est un CC -groupe (localement résoluble)-par-fini, alors G n'admet aucune image homomorphe simple de rang infini.*

Démonstration. puisque tout groupe localement (résoluble-par-fini) de rang fini est une extension finie d'un groupe localement résoluble par [9], alors tout sous-groupe propre de G est (localement résoluble)-par-fini. Supposons que G admet une image homomorphe simple de rang infini G/K , d'après le Corollaire précédent G est localement fini car tout

CC -groupe simple est fini, ça implique que G/K est isomorphe soit à $PSL(2, F)$ ou à $Sz(F)$ pour un certain corps infini localement fini F par [22]. D'autre part, chacun de ces deux derniers groupes contient un sous-groupe propre de rang infini qui n'est pas CC -groupe d'après [34]. Une contradiction qui montre que G n'admet aucune image homomorphe simple de rang infini. ■

Corollaire 2.4.9. *Soit G un groupe localement (résoluble-par-fini) de rang infini.*

(i) *Si tout sous-groupe propre de rang infini de G est (localement résoluble)-par-fini soit un CL -groupe ou Černikov-par-abélien, alors G est soit un CL -groupe ou Černikov-par-abélien.*

(ii) *Si tout sous-groupe propre de rang infini est un CL -groupe (localement résoluble)-par-fini, alors G est un CL -groupe.*

Démonstration. (i) On suppose que G ne soit pas Černikov-par-abélien, donc d'après le Lemme 2.4.4, G est localement fini, ça implique que tout sous-groupe propre de rang infini est un CC -groupe et par le Lemme 2.4.8 G n'admet aucune image homomorphe simple de rang infini. Par conséquent, G est un CL -groupe par le Théorème 2.4.6.

(ii) D'après (i) G est soit un CL -groupe ou Černikov-par-abélien. Si $G \in \check{C}\mathcal{A}$, alors G est non-parfait, donc G est un CL -groupe par le Lemme 2.4.5. ■

Remarque. *D'après le Lemme 2.3.8, dans le Théorème 2.4.6, le Lemme 2.4.8 et le Corollaire 2.4.9 on peut supposer que G est fortement localement gradué.*

2.5 Groupes ayant peu de sous-groupes non- $((PF)L \cup (\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A})$

Soit $\mathfrak{X}$ une classe de groupes. Rappelons qu'un groupe G admet un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non- $\mathfrak{X}$, si on pose $\mathcal{H} = \{H \leq G \mid H \notin \mathfrak{X}\}$, alors il existe $H_1, \dots, H_r \in \mathcal{H}$ non-conjugués deux à deux tels que pour tout $H \in \mathcal{H}$, il

existe $1 \leq i \leq r$ et il existe $x \in G : H = H_i^x$. Dans cette section, on va étudier les groupes localement gradués vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ (respectivement, non- $(PF)L$), et les groupes n'ayant qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ (respectivement, non- $(PF)L$). Le résultat principal de cette section est une conséquence immédiate du Lemme suivant.

Lemme 2.5.1. *Soit G un groupe localement gradué dont tout sous-groupe propre est soit dans la classe $(PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ ou de Černikov. Alors G est soit un $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe ou de Černikov.*

Démonstration. (i) D'abord, on suppose que G soit périodique, ça implique que chaque sous-groupe propre de G est soit un $(FL \cup \mathfrak{F}\mathcal{A})$ -groupe ou de Černikov. Si

$$H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \dots \supsetneq H_n \supsetneq \dots$$

est une chaîne infinie strictement descendante de sous-groupes non- $(FL \cup \mathfrak{F}\mathcal{A})$ de G , alors chaque H_i est de Černikov et donc notre chaîne est finie, il s'ensuit que G vérifie la condition minimale sur les sous-groupes non- $(FL \cup \mathfrak{F}\mathcal{A})$. Par conséquent, G est soit un $(FL \cup \mathfrak{F}\mathcal{A})$ -groupe ou de Černikov par [35, Théorème 2].

(ii) Considérons maintenant le cas où G ne soit pas périodique. Si G est de type fini, alors il admet un sous-groupe propre H de type fini et non pas périodique tel que $|G : H|$ soit fini, ce qui donne H et donc G est polycyclique-par-fini. Par conséquent, on peut supposer que G est localement (résoluble-par-fini). D'abord, on suppose que G est de rang infini, ça implique que tout sous-groupe propre de rang infini est un $(FL \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe. Par le Lemme 2.3.3, on peut supposer que G est parfait et $\mathcal{F}$ -parfait, il s'ensuit que G n'est pas un $(PF)C$ -groupe. D'où par le Lemme 2.2.5, il existe un sous-groupe dénombrable K de G qui n'est pas un $(PF)C$ -groupe. Soit a un élément d'ordre infini de G , donc $\langle K, a \rangle$ est un sous-groupe de G qui est ni dans la classe $(PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ ni de Černikov ce qui donne

$G = \langle K, a \rangle$ est dénombrable. Supposons que $\overline{G}$ est une image homomorphe simple de G de rang infini, d'après le Lemme 2.2.1, il existe un sous-groupe propre localement résoluble $\overline{R}$ de $\overline{G}$ tel que pour tout élément $\bar{g}$ de $\overline{G}$, il existe un entier strictement positif n vérifiant $\bar{g}^n$ est un élément de $\overline{R}$. Si $\overline{G}$ est périodique, alors par (i) $\overline{G}$ est soit un FC -groupe ou de Černikov, c'est une contradiction car G est parfait et $\mathcal{F}$ -parfait. Par conséquent, $\overline{G}$ n'est pas périodique et donc $\overline{R}$ est non-périodique et le radical de Hirsch-Plotkin de $\overline{R}$ est trivial par le Lemme 2.2.1, il s'ensuit que $\overline{R}$ est $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe, donc $\overline{R}$ est résoluble et par suite il est trivial ce qui donne la contradiction que $\overline{G}$ est périodique. Par conséquent, G n'admet aucune image homomorphe simple de rang infini et par le Théorème 2.3.4, G est $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe. Maintenant, on suppose que G soit de rang fini, donc d'après [9] et [40, Lemme 10.39], G est soit non-parfait ou non- $\mathcal{F}$ -parfait. Supposons que G n'est pas dans la classe $(PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A}$, alors d'après le Théorème 2.2.6, G admet un sous-groupe propre H qui n'est pas un $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe, ça implique que H est de Černikov et donc on peut supposer que H est un non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe minimal. On en déduit par le Théorème 2.2.6 que H est non-parfait non- FC -groupe minimal. Par conséquent, d'après [4] il existe un élément x de H et un entier strictement positif n tel que $H = H' \langle x \rangle$, x^{p^n} est un élément de H' et H' est un q -groupe abélien divisible qui n'admet aucun sous-groupe propre infini H -admissible pour certains nombres premiers p et q . Il est clair que chaque sous-groupe propre de G contient H est de Černikov. D'autre part, si HG' est un sous-groupe propre de G , alors HG' et G/HG' sont de Černikov, ce qui donne la contradiction que G est de Černikov. Par conséquent, $G = G'H = G' \langle x \rangle$. On en déduit que si G est non-parfait, alors il est non- $\mathcal{F}$ -parfait. L'inverse est aussi vrai ; car si N est un sous-groupe normal propre d'indice fini dans G , alors comme avant $G = NH = NH' \langle x \rangle$. Si $G = NH'$, alors $H'/H' \cap N$ est fini. Comme H n'est pas un FC -groupe, $H' \cap N$ est infini et donc $H' \cap N$ est un sous-groupe infini H -admissible de H' , il s'ensuit que $H' = H' \cap N$ et par suite $H' \leq N$ ce qui donne la contradiction que $G = N$. Par conséquent, NH' est propre dans G et donc G est non-parfait car $G' \leq NH'$. Ainsi dans les deux cas, nous avons que $G = G' \langle x \rangle$, $x \notin G'$ et $x^m \in G'$ pour un certain entier

positif m . Soit M un sous-groupe propre d'indice fini dans G' , ce qui implique que M_G est un sous-groupe propre normal et d'indice fini dans G , d'où $G = M_G H = M_G H' \langle x \rangle$ ce qui donne $G' = M_G H'$. On en déduit que

$$|G' : M_G| = |M_G H' : M_G| = |H' : H' \cap M_G| < \infty.$$

Comme H' est divisible, on déduit que $H' = H' \cap M_G \leq M_G$. D'où $G = M_G \langle x \rangle$ ce qui donne la contradiction que $G' = M_G$. Par conséquent, G' est $\mathcal{F}$ -parfait et donc il est abélien divisible car G' est un $(\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A}$ -groupe. Comme G' n'est pas périodique, il admet un élément g d'ordre infini, ça implique que $G = \langle g, H \rangle = g^G H$. Par conséquent, $G' = g^G H \cap G' = (H \cap G') g^G$ car $g^G \leq G'$. Posons $o(x) = k$, $g^G = g^{\langle x \rangle} = \langle g, g^x, \dots, g^{x^{k-1}} \rangle$ est un groupe abélien de type fini, il s'ensuit que $G'/H \cap G' \simeq g^G / g^G \cap (H \cap G')$ est divisible, donc il est trivial car tout groupe abélien divisible et de type fini est trivial. Il en résulte que $G' = H \cap G' \leq H$ ce qui donne la contradiction que $G = H$. Par conséquent, G est un $(\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A}$ -groupe. ■

Le lemme précédent possède la conséquence suivante.

Corollaire 2.5.2. *Si G est un groupe localement gradué dont tout sous-groupe propre est soit un $(PF)L$ -groupe ou de Černikov. Alors G est soit un $(PF)L$ -groupe ou de Černikov.*

Démonstration. Par l'absurde, on suppose que G n'est ni un $(PF)L$ -groupe ni de Černikov, donc G est un $(\mathfrak{P}\mathfrak{F})\mathcal{A}$ -groupe d'après le Lemme précédent. Si G est périodique, alors il est un FC -groupe et tout sous-groupe propre de G est un CL -groupe. Par le Théorème 1.5.1.6, G est un CL -groupe et d'après le Théorème 1.5.2.2, G est un FL -groupe. Une contradiction qui montre que G n'est pas périodique. Il est clair que G ne soit pas de type fini et puisque G est un $(PF)C$ -groupe, alors il est localement (polycyclique-par-fini). Supposons que G est de rang infini et comme tout $(PF)L$ -groupe non périodique est une extension finie d'un sous-groupe polycyclique, alors tout sous-groupe propre de

rang infini est un FL -groupe. Il est facile de voir que tout $(PF)C$ -groupe simple est fini, donc G n'admet aucune image homomorphe simple de rang infini. Par conséquent, G est un FL -groupe par le Théorème 2.3.4 c'est une contradiction qui montre que G est de rang fini. Supposons que G admet un sous-groupe propre H d'indice fini dans G , ça implique que H est polycyclique-par-fini car G n'est pas périodique, ce qui donne la contradiction que G est polycyclique-par-fini. Par suite G n'admet aucun sous-groupe propre d'indice fini, donc G est un groupe abélien divisible et non périodique. Il est connu qu'il existe deux sous-groupes propres M et N de G tels que $G = MN$ et $G/M, G/N$ sont quasicycliques par [5, Lemme 2.9], ce qui implique que M et N sont des $(PF)L$ -groupes non-périodiques, d'où M et N sont polycycliques par le Lemme 2.2.2 et donc $G \in \mathfrak{P}$. C'est une contradiction qui montre que G est un $\mathfrak{PF}$ -groupe. ■

Théorème 2.5.3. *Soit G un groupe localement gradué.*

- (i) *Si G satisfait la condition minimale sur les sous-groupes non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$, alors G est soit un $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe ou de Černikov.*
- (ii) *Si G ne possède qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$, alors G est soit un $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe ou de Černikov.*

Démonstration. (i) Par l'absurde, on suppose que G n'est ni un $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe ni de Černikov. Il est facile de voir que si K est un groupe et $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux classes de groupes tel que $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, alors K satisfait la condition minimale sur les sous-groupes non- $\mathcal{X}$ implique que K satisfait la condition minimale sur les sous-groupes non- $\mathcal{Y}$, il s'ensuit que G satisfait la condition minimale sur les sous-groupes non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A} \cup \mathfrak{C})$. Par suite G contient un sous-groupe H qui est un non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A} \cup \mathfrak{C})$ -groupe minimal, c'est une contradiction par le Lemme 2.5.1.

(ii) Dans [17, Proposition 3.3], il est prouvé que si $\mathfrak{X}$ est une classe de groupes stable par passage aux sous-groupes et si K est un groupe localement gradué ayant un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non- $\mathfrak{X}$, alors K est localement $(\mathfrak{X}$ -par-fini). Donc tout sous-groupe de type fini est $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})\mathfrak{F}$, il s'ensuit que tout sous-groupe

de type fini est une extension fini d'un sous-groupe polycyclique. Par suite G satisfait localement la condition maximale sur les sous-groupes. Maintenant, le Lemme 4.6.3 de [1] il dit que si K est un groupe qui satisfait localement la condition maximale sur les sous-groupes et si H est un sous-groupe de K tel que $H^x \leq H$ pour un certain élément x de K , alors $H^x = H$. On déduit que G satisfait la condition minimale sur les sous-groupes non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$. Par conséquent, G est soit un $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$ -groupe ou de Černikov par (i). ■

Le théorème précédent possède la conséquence suivante.

Corollaire 2.5.4. *Soit G un groupe localement gradué.*

(i) *Si G satisfait la condition minimale sur les sous-groupes non- $(PF)L$, alors G est soit un $(PF)L$ -groupe ou de Černikov.*

(ii) *Si G n'admet qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes non- $(PF)L$, alors G est soit un $(PF)L$ -groupe ou de Černikov.*

Démonstration. (i) Par l'absurde, on suppose que G n'est ni un $(PF)L$ -groupe ni de Černikov. Il est clair que G satisfait la condition minimale sur les sous-groupes non- $((PF)L \cup (\mathfrak{PF})\mathcal{A})$, ça implique que G est un $(\mathfrak{PF})\mathcal{A}$ -groupe par le Théorème 2.5.3. Comme G n'est pas de Černikov, il ne peut pas être un non- $(PF)L$ -groupe minimal d'après le Théorème 2.2.6, donc G contient un sous-groupe propre H n'appartient pas à la classe $(PF)L$ et H est minimal par rapport à ces conditions, il s'ensuit que H est un non- $(PF)L$ -groupe minimal, donc il est un non- FC -groupe minimal non-parfait par le Théorème 2.2.6, c'est une contradiction avec le fait que G' est un $(\mathfrak{PF})$ -groupe.

(ii) D'après [17, Proposition 3.3], G satisfait localement la condition maximale sur les sous-groupes et par un résultat de Zaitsev [1, Lemme 3.4], on déduit que G satisfait la condition minimale sur les sous-groupes non- $(PF)L$. Par conséquent, G est soit un $(PF)L$ -groupe ou de Černikov par (i). ■

Chapitre 3

Non- MC -groupes minimaux

3.1 Introduction

Soit $\mathfrak{X}$ une classe de groupes. Un groupe G est dit un $\mathfrak{X}C$ -groupe si le groupe quotient $G/C_G(x^G)$ est un $\mathfrak{X}$ -groupe pour chaque élément x dans G . Lorsque $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$ la propriété $\mathfrak{F}C$ est la propriété familière d'être un FC -groupe. D'autres classes de $\mathfrak{X}C$ -groupes qui ont été étudiées sont CC (respectivement, PC , $(PF)C$, MC et M_rC)-groupes que nous obtenons lorsque nous prenons pour $\mathfrak{X}$ la classe des groupes de Černikov (respectivement, polycycliques, polycycliques-par-finis, (résolubles-par-finis) minimax et minimax réduits) (voir [40], [16], [23] et [25]). On dit également qu'un groupe G est un non- $\mathfrak{X}C$ -groupe minimal si G n'est pas un $\mathfrak{X}C$ -groupe mais tous ses sous-groupes propres sont des $\mathfrak{X}C$ -groupes. V. Belyaev et N. Sesekin sont les premiers qui ont étudié les non- $\mathfrak{X}C$ -groupes minimaux. Ils ont caractérisé dans [4] les non- FC -groupes minimaux dans le cas où le groupe possède une image homomorphe non-triviale finie. Plusieurs chercheurs ont étudié ce problème et ils ont trouvé quelques résultats. Les non- CC -groupes minimaux ont été étudiés dans [32] et [2]. Dans [32] J. Otal et J. M. Penã, ont montré que si G est un non- CC -groupe minimal, alors il est parfait et $\mathcal{F}$ -parfait. De plus si G est localement gradué, alors il est localement fini et dénombrable. Dans ce chapitre on va généraliser ce résultat, nous montrons que tout non- MC -groupe minimal est parfait et n'admet aucun

sous-groupe propre d'indice fini.

3.2 Groupes ayant des sous-groupes propres d'indice fini et dont tous les sous groupes propres sont des MC -groupes

Dans cette section on va caractériser les groupes possédant un sous-groupe propre d'indice fini et dont tous les sous-groupes propres sont des MC -groupes. Nous montrons que si G est un groupe admettant une image homomorphe non-triviale finie, alors G est un MC -groupe si, et seulement si, tout sous-groupe propre de G est un MC -groupe. Pour ce faire, on va donner quelques résultats qui seront utilisés dans la démonstration du Théorème 3.2.8.

Lemme 3.2.1 [5, Proposition 2.10]. *Soit G un groupe tel que G^* , le résiduel fini de G est un sous-groupe propre dans G et G/G^* est fini. Si tout sous-groupe propre de G est un MC -groupe, alors G est un MC -groupe.*

Lemme 3.2.2 [5, Lemme 2.3]. *Soit G un non- MC -groupe minimal. Alors il existe un nombre premier p tel que si H est un sous-groupe normal d'indice fini dans G , alors G/H est un groupe cyclique d'ordre une puissance de p .*

Lemme 3.2.3 [5, Lemme 2.2]. *Soit H un MC -sous-groupe d'indice fini d'un groupe G . Alors H est contenu dans le MC -centre de G .*

Lemme 3.2.4 [5, Lemme 2.8]. *Soient p un nombre premier et G un groupe tel que chaque image homomorphe finie de G est un p -groupe. Si G est un M_rC -groupe, alors il est un FC -groupe.*

Lemme 3.2.5 [25, Corollaire 7]. *Soit G un M_rC -groupe. Si $G/\text{Frat}(G)$ est minimax, alors $G/Z(G)$ est minimax réduit.*

Lemme 3.2.6 [29, Lemme 2.10]. *Soit G un groupe. Si $G/Z(G)$ est localement cyclique, alors G est abélien.*

Lemme 3.2.7 [31, Page 6]. *Soit G un groupe abélien. Si $G/\text{Frat}(G)$ est fini, alors G est divisible-par-fini.*

Maintenant, on peut montrer le seul résultat de cette section.

Théorème 3.2.8. *Soit G un groupe tel que G^* , le résiduel fini de G , est un sous-groupe propre dans G . Alors G est un MC-groupe si, et seulement si, tout sous-groupe propre de G est un MC-groupe.*

Démonstration. Par l'absurde, on suppose que G est un non-MC-groupe minimal, donc d'après le Lemme 3.3.1, G/G^* est infini. Soient H et K deux sous-groupes normaux d'indice fini dans G , donc $|G : H \cap K|$ est fini divisible par $|G : H|$ et $|G : K|$. D'après le lemme 3.2.2, il existe un nombre premier p tel que $|G : H| = p^n$, $|G : K| = p^m$ et $|G : H \cap K| = p^\alpha$. Si $n \leq m$, alors $H \leq K$ car le groupe cyclique $G/H \cap K$ admet un seul sous-groupe d'ordre k où k est un entier strictement positif. Donc on peut déduire que les sous-groupes d'indice fini forment une série. Par suite, comme G/G^* est infini, il existe une chaîne descendente infinie de sous-groupes normaux de G

$$G = G_0 > G_1 > \dots > G_n > \dots,$$

tel que pour tous les entiers positifs, G/G_n soit d'ordre p^n où $n \in \mathbb{N}$ et G^* est l'intersection de tous les G_n . Comme G/G_1 est un groupe cyclique d'ordre p , il existe un élément x de G tel que $G/G_1 = \langle xG_1 \rangle$ et x^p appartient à G_1 . Maintenant, par récurrence sur n , on peut montrer que $G/G_n = \langle xG_n \rangle$. Supposons que $G/G_{n-1} = \langle xG_{n-1} \rangle$, où $x^{p^{n-1}} \in G_{n-1}$. Si $x^{p^{n-1}} \in G_n$, alors $\langle xG_n \rangle$ est un sous-groupe de G/G_n d'ordre p^{n-1} , ce qui implique que $G_1/G_n = \langle xG_n \rangle$, car G/G_n est cyclique et G_1/G_n est un sous-groupe de G/G_n d'ordre p^{n-1} . En conséquence, $G_1 = \langle x, G_n \rangle$, mais $G = \langle G_1, x \rangle$, donc $G = \langle x, G_n \rangle$ et G/G_n est d'ordre p^{n-1} , c'est une contradiction. D'où $x^{p^{n-1}} \notin G_n$, ce qui donne $\langle xG_n \rangle$ est d'ordre

p^n , on déduit que $G/G_n = \langle xG_n \rangle$ et $G = \langle G_n, x \rangle$, pour chaque entier positif n . Il est clair que x est d'ordre infini. Posons $N = G_1$ est un MC -groupe, donc $K = (x^p)^G = (x^p)^N$ est (résoluble-par-fini) minimax. Il est facile de voir que $(G/K)^* = N/K$ et D'après le Lemme 3.2.1, G/K est un MC -groupe, d'où x^G/K est (résoluble-par-fini) minimax et par suite x^G est (résoluble-par-fini) minimax car la classe des groupes (résolubles-par-finis) minimax est stable par extension. Posons $\overline{G} = G/D(G)$. Comme les sous-groupes abéliens divisibles d'un groupe sont contenus dans le résiduel fini, alors $D(G) \leq G^*$ et par suite $\overline{G}^* = G^*/D(G)$, ça implique que $\overline{G}/\overline{G}^* = (G/D(G))/(G^*/D(G)) \simeq G/G^*$, donc $\overline{G}/\overline{G}^*$ est infini. Supposons que $\overline{G}$ est non- MC -groupe minimal, alors on peut remplacer G par $\overline{G}$, donc on peut supposer que $D(G) = 1$. On sait que $D(G)$ contient tous les sous-groupes abéliens divisibles périodiques et normaux dans G , donc $D(x^G) \leq D(G)$. Par suite x^G est (résoluble-par-fini) minimax et $D(x^G) = 1$, ça implique que x^G est minimax réduit, donc x est un M_rC -élément de G par le Lemme 1.4.2.5, il s'ensuit que G est un MC -groupe car N est contenu dans le $MC(G)$ par le Lemme 3.2.3. Une contradiction qui montre que $\overline{G} = G/D(G)$ est un MC -groupe. D'après le Lemme 1.2.2.9, il est facile de montrer que $D(\overline{G})$ est trivial et par le Corollaire 1.4.2.7, $G/D(G)$ est un M_rC -groupe, donc $G/D(G)$ est un FC -groupe par le Lemme 3.2.4, ça implique que $(G/D(G))^* \leq Z(G/D(G))$. On a $D(G) \leq G^*$ et $(G/D(G))^* = G^*/D(G)$. Par suite

$$(G/D(G))' = G'D(G)/D(G) \leq G^*/D(G) \leq Z(G/D(G))$$

Et donc $G/D(G)$ est nilpotent de classe ≤ 2 . D'autre part, il est facile de voir que $G/D(G)$ admet un sous-groupe propre d'indice fini, donc $G/D(G)$ admet au moins un sous-groupe maximal. Soit $M/D(G)$ un sous-groupe maximal de $G/D(G)$, donc $M/D(G) \triangleleft G/D(G)$ et G/M est cyclique d'ordre p , d'où $M = N$ car G admet un seul sous-groupe d'indice p . Par conséquent, $G/D(G)$ admet un seul sous-groupe maximal, ça implique que $\text{Frat}(G/D(G)) = N/D(G)$ et $(G/D(G))/\text{Frat}(G/D(G)) \simeq G/N$ est fini. D'après le Lemme 3.2.5, $(G/D(G))/Z(G/D(G))$ est minimax réduit et puisque $G/D(G)$ est un FC -groupe, alors $(G/D(G))/Z(G/D(G))$ est périodique, ce qui montre

que $(G/D(G))/Z(G/D(G))$ est cyclique fini. D'après le Lemme 3.2.6, $G/D(G)$ est abélien et par le Lemme 3.2.7, $G/D(G)$ est divisible-par-fini, donc il existe $M/D(G) \leq G/D(G)$ tels que $M/D(G)$ soit divisible et $(G/D(G))/(M/D(G))$ est fini, ça implique que $M/D(G) \leq (G/D(G))^*$ et puisque le résiduel fini d'un groupe est contenu dans tout sous-groupe d'indice fini, alors $(G/D(G))^* = M/D(G)$, il s'ensuit que $(G/D(G))/(G/D(G))^* = (G/D(G))/(G^*/D(G)) \simeq G/G^*$ est fini, c'est une contradiction avec le fait que G^* est d'indice infini dans G . Par conséquent, G est un MC -groupe. ■

Comme conséquence immédiate du Théorème précédent, nous avons la généralisation suivante du résultat de Otal et Penã [32] :

Corollaire 3.2.9. *Tout non- MC -groupe minimal est $\mathcal{F}$ -parfait.*

3.3 Groupes non-parfaits dont tous les sous-groupes propres sont des MC -groupes

Dans cette section on va caractériser les groupes non-parfaits dont tous les sous-groupes propres sont des MC -groupes. Nous montrons que si G est un groupe admettant une image homomorphe non triviale abélienne, alors G est un MC -groupe si, et seulement si, tout sous-groupe propre de G est un MC -groupe. Pour montrer le résultat principal de cette section nous utiliserons le résultat suivant :

Lemme 3.3.1 [10, Lemme 2.1]. *Soit $G = HK$ le produit de deux sous-groupes H et K et soit $x \in H \cap K$. Si x est un FC -élément de H et de K , alors il est un FC -élément de G .*

Pour montrer le lemme suivant, nous utilisons le socle d'un groupe abélien divisible de Černikov, c'est le produit direct d'un nombre fini de sous-groupes normaux minimaux. C'est-à-dire le socle d'un groupe abélien divisible de Černikov, c'est le produit direct d'un nombre fini des groupes cycliques d'ordre premier dans ce groupe.

Lemme 3.3.2. *Soit G un groupe non-parfait et $\mathcal{F}$ -parfait tel que G' est de torsion. Si tout sous-groupe propre de G est un MC -groupe, alors G est nilpotent de classe inférieure ou égale à deux.*

Démonstration. Par les résultats de Černikov et Baumslag (voir [40, Théorème 9.23]) si G est un groupe hypercentral $\mathcal{F}$ -parfait, alors il est radicable et le sous-groupe de torsion T de G est contenu dans le centre de G , donc puisque G est $\mathcal{F}$ -parfait et G' périodique, il suffit de montrer que G est hypercentral. Dans ce but, nous allons montrer que chaque image homomorphe non-triviale $\overline{G} = G/L$ admet un centre non-trivial. Si $\overline{G}$ est un MC -groupe, alors il est nilpotent de classe ≤ 2 par le Corollaire 1.4.2.11, et donc $Z(\overline{G}) \neq \overline{1}$. Maintenant, supposons que $\overline{G}$ ne soit pas un MC -groupe. Il est clair que $\overline{G}/\overline{G}'$ est abélien divisible. Premièrement, supposons que $\overline{G}/\overline{G}'$ soit périodique, donc $\overline{G}$ est périodique, ce qui donne tout sous-groupe propre de $\overline{G}$ est un CC -groupe. Si $\overline{G}$ est non-parfait, alors $\overline{G}$ est un CC -groupe par le Théorème 1.2.2.10. C'est une contradiction avec le fait que $\overline{G}$ n'est pas un MC -groupe, donc $\overline{G}$ est parfait, ça implique que $G/L = (G/L)' = G'L/L \simeq G'/L \cap G'$ est un CC -groupe. Une contradiction qui montre que $\overline{G}/\overline{G}'$ n'est pas périodique. D'après le Lemme 2.2.2, il existe deux sous-groupes propres $\overline{M} = M/L$ et $\overline{N} = N/L$ de $\overline{G}$ contenant $\overline{G}'$ tels que $\overline{G} = \overline{M}\overline{N}$ et $\overline{G}/\overline{M}$, $\overline{G}/\overline{N}$ sont quasicycliques, ce qui implique que M et N sont des MC -groupes et donc $\overline{M}$ et $\overline{N}$ sont des MC -groupes. Soit $\overline{1} \neq \overline{y} \in \overline{G}'$, donc $\langle \overline{y}, \overline{N} \rangle$ est un sous-groupe propre dans $\overline{G}$, ça implique que $\overline{y}^{\overline{N}}$ est (résoluble-par-fini) minimax et périodique, donc $\overline{y}^{\overline{N}}$ est de Černikov. Si $\overline{y}^{\overline{N}}$ est infini, alors le socle de la partie divisible de $\overline{y}^{\overline{N}}$ est un sous-groupe normal fini non-trivial dans $\overline{N}$, soit $\overline{K}$. Soit $\overline{1} \neq \overline{x} \in \overline{K}$, donc $\overline{N}/C_{\overline{N}}(\overline{x}^{\overline{N}})$ est fini. Par suite il est facile de voir que $\overline{G} = \overline{M}C_{\overline{N}}(\overline{x}^{\overline{N}})$ car G est $\mathcal{F}$ -parfait. On a $\overline{x}^{\overline{G}} = \overline{x}^{\overline{M}}$ est (résoluble-par-fini) minimax et périodique, donc $\overline{x}^{\overline{G}}$ est de Černikov. Si $\overline{S}$ est le socle de la partie divisible de $\overline{x}^{\overline{G}}$, alors $\overline{S}$ est un sous-groupe non-trivial fini et normal dans $\overline{G}$, donc $\overline{G}/C_{\overline{G}}(\overline{S})$ est fini. Comme G est $\mathcal{F}$ -parfait, $\overline{G} = C_{\overline{G}}(\overline{S})$, donc $\overline{1} \neq \overline{S} \leq Z(\overline{G})$. Par conséquent, G est hypercentral, donc $G' \leq Z(G)$ et G nilpotent de classe ≤ 2 . ■

Maintenant, on peut démontrer notre résultat principal dans cette section.

Théorème 3.3.3. *Soit G un groupe non-parfait. Alors G est un MC -groupe si, et seulement si, tout sous-groupe propre de G est un MC -groupe.*

Démonstration. Par l'absurde on suppose que G est un non- MC -groupe minimal, donc d'après Corollaire 3.2.9, G est $\mathcal{F}$ -parfait et par le Théorème 1.2.2.10, G n'est pas périodique. Supposons que G' admet un sous-groupe propre d'indice fini, donc il existe un entier positif n tel que $(G')^n$ soit un sous-groupe propre de G' . Posons $\overline{G} = G / (G')^n$, si $\overline{G}/\overline{G}'$ est périodique, alors $\overline{G}$ est périodique, ça implique que tout sous-groupe propre de $\overline{G}$ est un CC -groupe et donc $\overline{G}$ est un CC -groupe par le Théorème 1.2.2.10 et d'après le Lemme 1.2.2.4, $\overline{G}$ est abélien, d'où $G' = (G')^n$. Une contradiction qui montre que $\overline{G}/\overline{G}'$ n'est pas périodique, donc il existe deux sous-groupes normaux propres $\overline{M}$ et $\overline{N}$ de $\overline{G}$ contenant $\overline{G}'$ tels que $\overline{G} = \overline{M}\overline{N}$ et $\overline{G}/\overline{M}$, $\overline{G}/\overline{N}$ sont quasicycliques par le Lemme 2.2.2. On a pour chaque élément $\overline{x} \in \overline{G}$, le sous-groupe $\langle \overline{x}, \overline{M} \rangle$ est propre dans $\overline{G}$ et donc est un MC -groupe, ce qui montre que $\overline{x}^{\overline{M}}$ est (résoluble-par-fini) minimax. On a $(\overline{x}\overline{G}')^{\overline{M}/\overline{G}'} = \langle \overline{x}\overline{G}' \rangle = \overline{x}^{\overline{M}}\overline{G}'/\overline{G}' \simeq \overline{x}^{\overline{M}}/\overline{x}^{\overline{M}} \cap \overline{G}'$ est cyclique, mais $\overline{x}^{\overline{M}} \cap \overline{G}'$ est (résoluble-par-fini) minimax et d'exposant fini, donc $\overline{x}^{\overline{M}} \cap \overline{G}'$ est fini car tout groupe de Černikov d'exposant fini est fini. Par conséquent, $\overline{x}^{\overline{M}}$ est fini-par-cyclique, il s'ensuit que $\overline{x}$ est un FC -élément de $\langle \overline{x}, \overline{M} \rangle$ car le groupe des automorphismes d'un groupe fini-par-cyclique est fini. De la même manière $\overline{x}$ est un FC -élément de $\langle \overline{x}, \overline{N} \rangle$. D'après le Lemme 3.3.1, $\overline{x}$ est un FC -élément de $\overline{G}$, il s'ensuit que $\overline{G}$ est un FC -groupe, donc $\overline{G}$ est abélien et par suite $G' = (G')^n$. Une contradiction qui montre que G' est $\mathcal{F}$ -parfait, donc G' est nilpotent de classe inférieure ou égale à deux par le Corollaire 1.4.2.11. Ce qui montre que G' admet un sous-groupe de torsion, soit T . Soit $x \in G$, il est clair que $\langle G', x \rangle \neq G$ car tout groupe abélien divisible de type fini est trivial, donc $\langle G', x \rangle$ est un MC -groupe, d'où $\langle G', x \rangle / T$ est aussi un MC -groupe. Maintenant, soit A/T un sous-groupe de Černikov divisible et normal dans $\langle G', x \rangle / T$. On a

$$\frac{G'A/T}{G'/T} \simeq G'A/G' \simeq A/A \cap G' \simeq \frac{A/T}{(A \cap G')/T = A/T \cap G'/T} \simeq A/T$$

Car G'/T est sans torsion et A/T est périodique. Et

$$\frac{\langle G', x \rangle / T}{G'/T} \simeq G' \langle x \rangle / G' = \langle x \rangle / G' \cap \langle x \rangle$$

Est cyclique, ce qui donne A/T est cyclique et comme A/T est divisible, alors il est trivial, d'où $D(\langle G', x \rangle / T)$ est trivial. Par conséquent, $\langle G', x \rangle / T$ est un M_rC -groupe par le Corollaire 1.4.2.7, donc $G'/T \leq Z(\langle G', x \rangle / T)$ pour tout élément $x \in G$ car dans un M_rC -groupe tout sous-groupe $\mathcal{F}$ -parfait est central, ça implique que $G'/T \leq Z(G/T)$ et G/T est nilpotent de classe inférieure ou égale à deux. Soit P/T le sous-groupe de torsion de G/T et puisque G/P est un groupe sans torsion dont tous les sous-groupes propres sont des MC -groupes, alors ils sont des M_rC -groupes. Il est facile de voir que G/P est non-parfait, donc d'après le Corollaire 1.4.2.15, G/P est un M_rC -groupe et puisque G/P est $\mathcal{F}$ -parfait, alors il est abélien, ce qui donne G' est périodique. Par le Lemme 3.3.2, G est nilpotent de classe ≤ 2 . On a G/G' est un groupe abélien divisible non périodique, donc d'après le Lemme 2.2.2, il existe deux sous-groupes propres N_1 et N_2 de G contenant G' tels que $G = N_1 N_2$ et $G/N_1, G/N_2$ sont quasicycliques. Soit $g \in G$, il est facile de voir qu'il existe un certain entier positif n tel que $g^n \in N_1 \cap N_2$. Puisque G est radicable, alors $G = G^n$, donc $[G, g] = [G^n, g] = [G, g]^n$ car $G = Z_2(G)$. On a

$$[G, g] = \left([N_1, g]^{N_2} [N_2, g] \right)^n$$

Comme $G' \leq Z(G)$, alors

$$[G, g] = [N_1, g]^n [N_2, g]^n = [N_1, g^n] [N_2, g^n]$$

Puisque N_1 est un MC -groupe, alors $[N_1, g^n]$ est (résoluble-par-fini) minimax par le Théorème 1.3.8, et comme G' est périodique, $[N_1, g^n]$ est de Černikov. De la même manière

$[N_2, g^n]$ est de Černikov, ça implique que $[G, g]$ est de Černikov. On a $G' \leq Z(G)$, donc $G = C_G([G, g])$ pour tout $g \in G$, d'après le Théorème 1.2.2.3, G est un CC -groupe. Une contradiction qui montre que G est un MC -groupe. ■

Comme conséquence immédiate du Théorème précédent, nous avons la généralisation suivante du résultat de Otal et Penã [32] :

Corollaire 3.3.4. *Tout non- MC -groupe minimal est parfait.*

Corollaire 3.3.5. *Soit G un non- MC -groupe minimal. Alors G est localement gradué si, et seulement si, G est de type infini.*

Dans [9] Černikov a prouvé que tout groupe localement (résoluble-par-fini) de rang fini est une extension finie d'un sous-groupe localement résoluble et dans [40, Lemme 10.39] tout groupe localement résoluble de rang fini est hypercentral-par-résoluble. D'après ce qui précède, on peut déduire la conséquence suivante.

Corollaire 3.3.6. *Si G est un groupe localement gradué non- MC -groupe minimal, alors G est de rang infini.*

Dans [7, Corollaire 6.1] M. Bouchelaghem et N. Trabelsi, ont montré que si G est un groupe de rang infini admettant une image homomorphe finie ou abélienne non triviale et dont tout sous-groupe propre de rang infini est un MC -groupe, alors tout sous-groupe propre de G est un MC -groupe. D'après ce qui précède, le Théorème 3.2.7 et le Théorème 3.3.3 on peut déduire la conséquence suivante :

Corollaire 3.3.7. *Soit G un groupe de rang infini admettant une image homomorphe finie ou abélienne non triviale. Si tout sous-groupe propre de rang infini de G est un MC -groupe, alors G est un MC -groupe.*

Bibliographie

- [1] **B. Amberg, S. Franciosi and F. De Giovanni** : “ Products of groups ”, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon, Oxford, 1992.
- [2] **A. Arikan, A. O. Asar** : “ On minimal non- CC -groups ”, Rev. Mat. Univ. Complutense Madr. **10**, 31-37 (1997).
- [3] **V. V. Belyaev** : “ Minimal non- FC -groups ”, VI All Union Symposium Group Theory, Čerkassy 1978. Naukova Dumka **221**, 97-102 (1980).
- [4] **V. V. Belyaev, N. F. Sesekin** : “ Infinite groups of Miller-Moreno type ”, Acta Math. Hungar. **26**, 369-376 (1975).
- [5] **M. Bouchelaghem, N. Trabelsi** : “ On minimal non- M_rC -groups ”, Ric. Mat. **62** (1), 97-105 (2013).
- [6] **M. Bouchelaghem, N. Trabelsi** : “ Groups whose proper subgroups of infinite rank have polycyclic-by-finite conjugacy classes ”, Int. J. Group Theory **5**, no. 3, 61–67 (2016).
- [7] **M. Bouchelaghem, N. Trabelsi** : “ Groups whose proper subgroups of infinite rank have minimax conjugacy classes ”, Journal of Algebra and its Applications. (2017).
- [8] **B. Bruno, R. E. Philips** : “ Minimal non- FC -groups ”, Amer. Math. Soc. **2**, 199-221 (1981).
- [9] **N. S. Chernikov** : “ A theorem on groups of finite special rank ”, Ukrainian Math. J. **42**, 855-861 (1990).

- [10] **M. De Falco, F. De Giovanni, C. Musella and N. Trabelsi** : “ Groups whose proper subgroups of infinite rank have finite conjugacy classes ”, *Bull. Aust. Math. Soc.* **89**, 41-48 (2014).
- [11] **M. De Falco, F. De Giovanni, C. Musella and N. Trabelsi** : “ Groups with restrictions on subgroups of infinite rank ”, *Rev. Mat. Iberoam.* **30** (2), 537-550 (2014).
- [12] **M. R. Dixon** : “ Countable periodic CC -groups as automorphism groups ”, *Proc. Edinburg Math. Soc.* **35**, 295-299 (1992).
- [13] **M. R. Dixon, M. J. Evans and H. Smith** : “ Groups with all proper subgroups (finite rank)-by-nilpotent ”, *Arch. Math. (Basel)* **72**, no. 5, 321-327 (1999).
- [14] **M. R. Dixon, M. J. Evans and H. Smith** : “ Groups with all proper subgroups soluble-by-finite rank ”, *J. Algebra* **289**, 135-147 (2005).
- [15] **S. Franciosi, F. De Giovanni** : “ The schur property and groups with uniform conjugacy classes ”, *J. Algebra* **174**, 823-847 (1995).
- [16] **S. Franciosi, F. De Giovanni and M. J. Tomkinson** : “ Groups with polycyclic-by-finite conjugacy classes ”, *Boll. Un. Mat. Ital. B* (7) 4, no. 1, 35-55 (1990).
- [17] **S. Franciosi, F. De Giovanni and Y. P. Sysak** : “ Groups with many FC -subgroups ”, *J. Algebra* **218**, no. 1, 165-182 (1999).
- [18] **F. De Giovanni, M. Trombetti** : “ Groups with minimax commutator subgroups ”, *Int. J. Group theory* **3**, no. 1, 9-16 (2014).
- [19] **F. De Giovanni, M. Trombetti** : “ Groups whose proper subgroups of infinite rank have polycyclic conjugacy classes ”, *Algebra Colloquium* **22**, no. 02, 181-188 (2015).
- [20] **B. Hartley, J. Otal, J. M. Peña** : “ Locally graded minimal non- CC -groups are p -groups ”, *Arch. Math.* **57** (3), 209-211 (1991).
- [21] **O. H. Kegel, B. A. F. Wehrfritz** : “ Locally finite groups ”, North Holland, Amsterdam 1973.

- [22] **P. B. Kleidman, R. A. Wilson** : “ A characterization of some locally finite simple groups of lie type ”, Arch. Math. (Basel) **48**, 10-14 (1987).
- [23] **L. A. Kurdachenko** : “ On groups with minimax conjugacy classes ”, Naukova Dumka Kiev, 160-177 (1993).
- [24] **L. A. Kurdachenko, J. Otal** : “ Groups all proper quotient groups of which have chernikov conjugacy classes ”, Ukrainian Mathematical journal, Vol. **52**, No. 3, (2000).
- [25] **L. A. Kurdachenko, J. Otal** : “ Frattini properties of groups with minimax conjugacy classes ”, Quaderni di matematica **8**, 221-237 (2001).
- [26] **L. A. Kurdachenko, P. Shumyatsky** : “ The ranks of central factor and commutator groups ”, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **154**, no. 1, 63–69 (2013).
- [27] **M. Kuzucuoglu, M. R. E. Phillips** : “ Locally finite minimal non- FC -groups ”, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **105** (3) 417-420 (1989).
- [28] **G. A. Miller, H. C. Moreno** : “ Non abelian groups in which every subgroup is abelian ”, Math. Trans. Am. Soc. **4**, 398-404 (1903).
- [29] **M. F. Newman, J. Wiegold** : “ Groups with many nilpotent subgroups ”, Arch. Math. **15**, 241-250 (1964).
- [30] **A. Yu. Ol’shanskiĭ** : “ Geometry of defining relations in groups ”, Mathematics and its Applications (Soviet Series), **70**. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, (1991).
- [31] **J. Otal** : “ The Frattini subgroup of a group ”, In Margarita Mathematica en honor de José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández.. Eds. J. L. Varona y L. Español. Universidad de La Rioja (ISBN 84-95301-56-3), Logroño, pp. 1-12 (2001).
- [32] **J. Otal, J. M. Peña** : “ Minimal non- CC -groups ”, Comm. Algebra **16** (6), 1231-1242 (1988).
- [33] **J. Otal, J. M. Peña** : “ Groups in which every proper subgroup is Chernikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Chernikov ”, Archiv. Math, **51**, P. 193-197 (1988).

- [34] **J. Otal, J. M. Peña** : “ Infinite locally finite groups of type $PSL(2, K)$ or $Sz(K)$ are not minimal under certain conditions ”, Publ. Mat. **32**, 43-47 (1988).
- [35] **J. Otal, J. M. Peña** : “ Groups with conditions related to finiteness properties on conjugacy classes ”, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **81**, 79-84 (1989).
- [36] **J. D. Polovickiĭ** : “ Locally extremal and layer-extremal groups ”, Mat. Sb. (N.S.) **58** (100), 685–694 (1962).
- [37] **A. Rezig, N. Trabelsi** : “ Groups with many subgroups having polycyclic-by-finite layers or derived subgroup ”, Comm. Algebra **45**, 1-9 (2017).
- [38] **D. J. S. Robinson** : “ Residual properties of some classes of infinite soluble groups ”, Proc. London Math. Soc. **18**, 495-520 (1968).
- [39] **D. J. S. Robinson** : “ On the theory of groups with extremal layers ”, J. Algebra **14**, 182–193 (1970).
- [40] **D. J. S. Robinson** : “ Finiteness conditions and generalized soluble groups ”, Springer Verlag, Berlin (1972).
- [41] **D. J. S. Robinson** : “ A course in the theory of groups ”, Springer-verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1982).
- [42] **F. Russo, N. Trabelsi** : “ Minimal non- PC -groups ”, Ann. Math. Blaise Pascal **16** (2), 277-286 (2009).
- [43] **O. J. Schmidt** : “ The groups, all subgroups of which are special ”, Math. Sbornik **31**, 366-372 (1924).
- [44] **M. J. Tomkinson** : “ FC -groups ”, Research Notes in Mathematics **96** Pitman, Boston (1984).
- [45] **Z. Zhang** : “ Minimal non- FO -groups ”, Comm. Algebra **38**, 1983-1987 (2010).