الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master Thesis

in Mathematics

Option : Optimization and Control
Theme :

Matrix splitting iteration method for generalized absolute value matrix equation

Presented by

Miss : **Israa ALIOUI and Amel CHOUADRA**

Supervisor: **Dr.Merzaka KHALDI**

Thesis defended on June 13, 2026, in front of the jury composed of:

Mr .	**Mohamed ACHACHE**	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Mrs.	**Merzaka KHALDI**	MCA.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Supervisor
Mrs.	**Nassima ANANE**	MCA.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner

2025/2026

Contents

Table of Contents **5**

1 *Mathematical background* **14**

1.1 Matrix Analysis 14

1.1.1 Matrix Classes 18

1.2 Fixed point method 19

1.3 Iterative methods for solving a linear system 20

1.3.1 Jacobi method 20

1.3.2 Gauss-Seidel method 21

1.4 Newton-Raphson's method for nonlinear systems 22

2 *Matrix splitting iteration method for GAVME* **24**

2.1 *Generalization absolute value matrix equation(GAVME)* 24

2.2 *On unique solvability for GAVME* 25

2.3 *Picard's iterative method for GAVME* 26

2.3.1 *Convergence analysis* 27

2.4 *Modified Newton-type iteration method for GAVME* 28

2.4.1 *Convergence analysis* 30

2.5 Newton-based matrix splitting iterative method for GAVME 33

2.5.1 *Convergence analysis* 35

2.5.2 Special case of symmetric positive definite matrix 38

3 *Numerical results* **41**

Bibliography **67**

ملخص:

تمت في هذه المذكرة، دراسة المعادلات المصفوفية ذات القيمة المطلقة المعممة من الشكل $AX - B|X| = C$ حيث ان $A, B, C, X \in \mathbb{R}^{n\times n}$والتي تُعد غير خطية بسبب وجود القيمة المطلقة باستخدام , ، تقنية تقسيم المصفوفات تم اقتراح طريقة تكرارية قائمة على طريقة نيوتن بالإضافة إلى نسخ مسترخية منها. تشمل هذه الطريقة عدة طرق معروفة مثل طريقة بيكارد وطريقة نيوتن المعدلة. تم إثبات وتحليل خصائص التقارب مع ضمان التقارب الخطي الشامل تحت فرضيات مناسبة.كما أكدت التجارب العددية باستخدام MATLAB فعالية الطرق المقترحة على مصفوفات متناظرة وغير متناظرة.

كلمات المفتاح :

معادلات المصفوفية ذات القيمة المطلقة المعممة، تقسيم المصفوفات، طريقة نيوتن ، طريقة بيكارد، التقارب الشامل، الطرق التكرارية.

Abstract:

In this dissertation, we study generalized absolute value matrix equations of the form $AX - B|X| = C$ where $A, B, C, X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, which are nonlinear due to the presence of the absolute value operator. Using the matrix splitting technique, we propose a Newton-based iterative method as well as a relaxeds versions. This general framework includes classical methods such as Picard's method and the modified Newton method. We establish sufficient conditions and analyse the convergence properties, proving global linear convergence under suitable assumptions. Numerical experiments carried out using MATLAB confirm the effectiveness of the proposed methods for both symmetric and non-symmetric matrix.

Keywords: Generalized absolute value equations, matrix splitting, Newton methods, Picard method, global convergence, iterative methods.

Résumé:

Dans ce mémoire, nous étudions les équations matricielles en valeur absolue généralisées de la forme $AX - B|X| = C$ où $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, qui sont non linéaires en raison de la présence de la valeur absolue. En utilisant la technique de décomposition matricielle, nous proposons une méthode itérative basée sur Newton ainsi qu'une méthode relaxée. Cette méthode donne plusieurs méthodes classiques telles que la méthode de Picard et la méthode de Newton modifiée. Nous établissons et analysons les propriétés de convergence en montrant la convergence linéaire globale sous certaines hypothèses. Des expériences numériques sous MATLAB confirment l'efficacité des méthodes proposées sur des matrices symétriques et non symétriques.

Mots-clés: Équations en valeur absolue généralisées matricielles, décomposition matricielle, méthodes de Newton, méthode de Picard, convergence globale, méthodes itératives.