REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS SETIF

MEMOIRE

Présenté à la faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Option : Géométrie Algébrique

Par

Mr. BENMEDDOUR Mohamed Ourabah

THEME

LES COURBES ALGEBRIQUES ; LE POLYGONE DE NEWTON ET LES COURBURES

Soutenue le : .. / ../ 2009

Devant le jury :

Président :	Dr Drabla Salah	Pr Université Ferhat Abbas Sétif
Rapporteur :	Dr Hannachi Messaoud	Pr Université Ferhat Abbas Sétif
Examinateurs :	Dr Benterki Djamel	M.C Université Ferhat Abbas Sétif
	Dr Kadem Abdelouaheb	M.C Université Ferhat Abbas Sétif

Table des matières

Introduction **2**

1 Introduction sur l'analyse non standard **4**

1.1 Introduction : 4

1.2 Les trois axiomes de la théorie I S T : 4

1.3 Les ensembles externes et internes : 8

2 Courbes algébriques planes et courbures. **12**

2.1 Introduction : 12

2.2 L'ordre d'un point standard d'une courbe : 13

2.3 Position d'une courbe par rapport à sa tangente : 13

2.4 Paramétrisation normale d'une courbe : 14

2.4.1 Abscisse curviligne : 15

2.5 Différentes formules de la courbure : 15

2.5.1 Courbure généralisée : 22

2.5.2 Formule paramétrique de la courbure généralisée : 22

2.6 Formule infinitésimale de la courbure : 23

2.6.1 Décomposition de Goze : 23

2.6.2 Expression non standard de la courbure généralisée : 23

2.7 Décomposition d'un point à l'infini : 24

3 Méthode polygonale appliquée aux coniques. 26

3.1 Introduction 26

3.2 Rappel sur le polygone de Newton : 27

3.3 Existence des branches 30

3.4 Paramétrisation des courbes algébriques avec la méthode polygonale. . . 32

3.4.1 Autre écriture d'équation d'une droite du polygone de Newton : . 32

3.5 L'application de la méthode polygonale 37

3.6 Etude des branches infinies des coniques avec l'enveloppe concave 46

3.6.1 Rappel : 46

3.6.2 Application de la méthode polygonale de Newton sur les coniques : 49

3.7 Etude des branches infinies avec la méthode non standard : 58

3.7.1 Ordre d'un point à l'infini et sa courbure généralisée : 58

3.8 Conclusion : 62

Introduction :

L'analyse non standard et le polygone de Newton sont devenus aujourd'hui, des outils importants parmi d'autres utilisés par un nombre important de mathématiciens et d'utilisateurs des mathématiques en dépit de leur complexité et leur nouveauté, les deux méthodes sont appliquées largement dans la géométrie qui est construite sur des notions géométriques telles que la coubure, les courbes, les courbes algébriques, abscisse curviligne, repère mobile, ...

Et pour cela, bien evidemment, notre modeste travail a comme objectif l'utilisation des deux méthodes dans une étude locale des courbes algébriques et pour arriver à une analyse typiquement bien détaillée nous avons décomposé notre travail en deux parties différentes :

On utilise la méthode polygonale de Newton pour faire l'étude locale des coniques, cette approche nouvelle permet la caractérisation des points de la conique ainsi que le calcul de leur courbure, d'autre part en utilisant l'enveloppe convexe supérieure du polygone de Newton on arrive à faire l'étude des branches infinies en donnant le genre de la courbe étudiée.

En second lieu, on utilise l'analyse non standard pour donner différentes définitions de la courbures afin de trouver la meilleure expression possible en constatant que celle donnée par l'analyse non standard, convient tout à fait à notre objectif visé, parce qu'elle nous aide d'une manière ou d'une autre à trouver différentes applications telles que l'ordre des points infinis, la paramétrisation et la courbure.

Chapitre 1

Introduction sur l'analyse non standard

1.1 Introduction :

En 1960 A.Robinson (1918-1974) élabore les concepts d'une Analyse Non Standard (ANS), il utilise la théorie des modèles et fabrique des élargissements où l'on peut introduire la notion d'infiniment petit et d'infiniment grand.

1.2 Les trois axiomes de la théorie I S T :

Axiome de Transfert :

Soit $A(x, t_1, t_2, ..., t_k)$ une formule interne standard sans autre variables libres que x et les t_i, l'énoncé suivant est un axiome :

$$\forall^{st} t_1 t_2 .... t_k \ , \forall^{st} x A(x, t_1, t_2, ..., t_k) \Longrightarrow \forall x A(x, t_1, t_2, ..., t_k)$$

Enoncé équivalent :

$$\forall^{st} t_1 t_2 .... t_k \ , \exists x A\left(x, t_1, t_2, ..., t_k\right) \Longrightarrow \exists^{st} x A\left(x, t_1, t_2, ..., t_k\right)$$

On se sert de cet axiome pour montrer que certains ensembles sont standard.

Remarque : On dit que x est une variable libre si elle ne se trouve pas directement dans le champ d'un quantificateur.

Théorème 1 *: L'ensemble vide $\emptyset$ est un ensemble standard.*

Preuve : L'ensemble vide est défini dans Z F C par le premier axiome : $\exists x \left[\forall t \left(t \notin x\right)\right]$.

La formule entre crochets est standard et ne contient pas d'autre variable libre autre que x .Par transfert on a : $\exists^{st} x_0 \left[\forall t \left(t \notin x_0\right)\right]$

Comme $\emptyset$ est unique (en vertu du deuxième axiome de Z F C , axiome d'extentionalité), on a nécessairement $x_0 = \emptyset$.

Corollaire : Les entiers 0,1,2,3. sont standard.

Les objets spécifiques des mathématiques construits de manière interne à partir d'objets standard sont standard.

Applications :

1) Deux ensembles standard sont égaux, si et seulement si, ils ont les mêmes éléments standard.

2) Une fonction standard est continue si et seulement si elle est continue en tout point standard.

3) Une fonction standard prend des valeurs standard au point standard.

4) Tout ensemble borné est borné par un standard.

Remarque : Pour l'utilisation de l'axiome de transfert, il convient de s'assurer que la formule est interne et standard.On est tenté d'utiliser parfois l'axiome bien qu'une des deux hypothèses ne soit pas vérifiée.On est en présence dans ce cas d'un transfert illégal.

Exemple : La formule$\forall^{st} x \left[x \approx 0 \Longrightarrow x = 0\right]$ n'implique pas $\forall x \left[x \approx 0 \Longrightarrow x = 0\right]$.

En effet la formule n'est pas interne. Elle contient la constante non standard (constante dont on donnera la signification dans les pages qui suivent).

Axiome d'idéalisation :

De ce second axiome, on déduit l'existence d'objets non standard et surtout la présence inéluctable d'éléments non standard dans tout ensemble pourvu qu'il soit infini, on a ici le sens classique, c'est à dire qu'un ensemble est fini ($fini\,(E)$) si toute injection de E dans lui même est une injection.

Enoncé de l'axiome : Pour toute formule interne B , contenant au moins deux variables libres x et y on a :

$$\forall^{st\,fini} z \exists x\, \forall y \in z\, B(x,y) \Leftrightarrow \exists x_0 \forall^{st} y\, B(x_0,y).$$

Essayons de comprendre sur un exemple le sens de cet énoncé, B est une relation binaire.

La partie gauche de l'équivalence indique une propriété de la relation connue sous le nom de concourance sellon laquelle, pour toute partie finie de la source, il existe un élément du but qui est en relation simultanée avec tous les éléments de la partie finie considérée.

De la partie droite de l'équivalence, on déduit l'existence d'un élément qui est en relation avec tous les éléments standard.

Applications :

1) $\mathbb{N}$ contient des entiers non standard.

2) Un ensemble E standard et fini $\Leftrightarrow$ tous ses éléments sont standard.

3) Pour tout ensemble E il existe un ensemble F contenant tous les éléments standard de E.

4) Tout entier majoré par un entier standard est standard.

Axiome de standardisation :

Nous savons q'une collection d'éléments satisfaisant une propriété interne forme un ensemble E. L'axiome de standardisation va permettre d'associer d'une façon canonique à E un unique ensemble appelé son standardisé.

Mais en plus l'axiome permet également d'associer un tel standardisé à tout ensemble interne d'éléments définis par une propriété externe, ensemble que nous appellerons ensemble externe.

Enoncé de l'axiome : Pour tout formule standard $F(z)$ (interne ou externe) , on a :

$$\forall^{st}x\,\exists^{st}y\,\forall^{st}z\ [z \in y \Leftrightarrow z \in x \text{ et } F(z)]$$

Cet axiome assure l'existence d'un ensemble standard y , y est appelé le standardisé l'ensemble $\{z \in x\ /F(z)\}$ (interne ou externe), on le note : $y = {}^{s}\{z \in x\ /F(z)\}$.

Remarque : 1) Le standardisé d'un ensemble est unique.

2) L'axiome de stondardisation permet de formuliser l'idée suivante : toute collection intuitive d'objet standard détermine un unique ensemble standard.

Quelques définitions :

-Un nombre réel ε est dit infiniment petit (i.p) , si sa valeur absolue est inférieure à tout réel standard strictement positif ($\forall^{st}x \in \mathbb{R}_+\ : |\varepsilon| < x$)

-Un nombre réel ω est dit infiniment grand (i.g), s'il est en valeur absolue supérieur à tout entier standard ($\forall^{st}x \in \mathbb{R}_+\ |\omega|\ > x$) .

-Un nombre réel est dit limité , s'il n'est pas infiniment grand.

-Un nombre réel est dit appréciable s'il est limité et non infiniment petit.

Remarque : L'existence des infiniments petits (i.p) et des infiniments grands découle de l'axiome d'idéalisation.

Théorème 2 *: Pour tout réel limité x, il existe un unique réel standard x_0, appelé l'ombre de x ou la partie standard de x tel que $x \approx x_0$.*

1.3 Les ensembles externes et internes :

Rappels : Une formule est dite interne si elle est exprimable dans le langage Z F C.

-Une formule externe si elle est exprimable dans ZFC IST avec le prédicat 'st' ou l'un de ses dérivés : infiniment petit , limité...etc ...

Définition 1 *: Si la formule ne contient que des constantes standard , elle est standard sinon elle est dite non standard.*

Définition 2 *:On appelle ensemble interne tout ensemble défini à l'aide d'une formule interne.*

-On appelle ensemble externe tout sous ensemble d'un ensemble interne défini au moyen d'une formule externe, pour lequel un théorème classique au moins est en défaut.

Exemples :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq r \ : r \ > 0\} = [-r, r] \\ B &= \{x \in \mathbb{R} : x \approx y : st(y)\} = hal(y) \\ C &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = nx : n \in \mathbb{N} : st(n)\right\} \end{aligned}$$

L'ensemble A est bien sur interne, de même que C qui est l'ensemble des droites standards passant par l'origine. Par contre l'ensemble B est externe : la formule $(x \approx y : st(y))$ qui définie B est externe.

Principe de permanence :

Le premier principe de permanence, est le principe de cauchy :

"Un ensemble strictement externe n'est pas interne."

Ce principe est trés utile dans la pratique parce qu'il permet d'étudier la validité d'une propriété dans un domaine plus vaste que celui sur lequel elle a pu être vérifiée.

Quelques définitions :

Définition 3 *: Soit E un ensemble interne, un sous ensemble G est appelé galaxie de E s'il est externe et s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E telles que*

$$G = \underset{n\in{}^{\sigma}\mathbb{N}}{\cup} u_n$$

**Si G est interne ou externe, on l'appelle alors prégalaxie de E.*

Exemples : ${}^{\sigma}\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : st(n)\}$ est une galaxie ne $\mathbb{N}$

$A = \{x \in \mathbb{R} : x$ appréciable$\}$ est une galaxie de $\mathbb{R}$.

Définition 4 *:Un sous-ensemble H de E est appelé un halo de E s'il est externe et s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E telles que*

$$H = \underset{n\in{}^{\sigma}\mathbb{N}}{\cap} u_n$$

**Si H est interne ou externe, on l'appelle préhalo de E.*

Exemples : $H = \{x \in \mathbb{R} : x \approx 0\}$ est un halo de $\mathbb{R}$.

$\{0\} = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$est un préhalo.

Remarque : Tout complémentaire d'un halo dans E est une galaxie de E.

Définition 5 *:(l'ombre d'un ensemble)* :

Soit E un ensemble interne, A un sous ensemble de E. On appelle ombre de A notée ${}^{o}A$, le standardisé du Halo de A :

$${}^{o}A =^{s} \{Hal(A)\}$$

Exemples :

*L'ombre d'une droite d'équation $y = ax$, est la droite d'équation :

$y = 0$ si a est infiniment petit.

$y =^{o} ax$ si a est appréciable.

$x = 0$ si a est infiniment grand.

*L'ombre du graphe de la fonction $y = \omega \sin x$ (ω est i.g) est la réunion des droites d'équation :

$x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$* \ {}^{o}\{hal(0)\} = \{0\}$

Principe de Fehrele :

"Aucun halo n'est une galaxie."

L'une des formes la plus utilisée de ce principe est celle du lemme de Robinson :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite interne de réels : Si $u_n \approx 0$ pour tout n standard , il existe alors ω (i.g) tel que $u_n = 0$ pour tout $n \leq \omega$.

Principe d'extension :

Soit X et Y deux ensemble standard , ${}^{st}X$ et ${}^{st}Y$ les sous ensembles constitués des éléments standard de X et Y respectivement et soit une application :

$\widetilde{f} : {}^{st}X \to {}^{st}Y$.

Alors il existe une unique application : $f : X \to Y$ standard qui prolonge f sur X.

Principe de construction

Ce principe est une conséquence de l'axiome de standardisation.

Soit $A(X, Y)$ une formule externe et X, Y deux ensembles standard tels que :

$$\forall^{st} x \in X, \exists^{st} y \in Y, A(x, y).$$

Alors, il exist une application standard $f : X \to Y$ telle que :

$$\forall^{st} x \in X, \ A(x, f(x))$$

Ce principe de construction fournit des application standard f dont les propriétés internes peuvent être démontrées pour les valeurs standard de la variable x et posséder ainsi des propriétés liées à A.

Notation :

$\forall^{st}\, x$	$\forall x, st(x)$
$\exists^{st} x$	$\exists x, st(x)$
$\forall^{st\, fini} x, F(x)$	$\forall^{st} x\, [fini\,(x) \Longrightarrow F(x)]$
$\exists^{st\, fini} x, F(x)$	$\exists^{st} x\, [fini\,(x)$ et $F(x)]$
$\forall^{st}\, x\,, F(x)$	$\forall x\, [st(x) \Longrightarrow F(x)]$
$\exists^{st}\, x\,, F(x)$	$\exists x\, [st(x)$ et $F(x)]$
$x \approx y$	x est équivalent à y.
x,i.p	x, est infiniment petie.
x,i.g	x, est infiniment grand.
$hal(0) = \{x \in \mathbb{R} : x, \text{i.p}\}$	appelé halo de zéro.
$hal(\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x, \text{i.g}\}$	appelé halo de l'infini.
$G = \{x \in \mathbb{R} : x$ limité$\}$	appelé galaxie principale.
${}^{\sigma}\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : st(n)\}$	

Chapitre 2

Courbes algébriques planes et courbures.

2.1 Introduction :

-La notion intuitive de "courbe"contient beaucoup d'idées différentes, et nous pouvons donner plusieurs définitions, chacune d'elles étant adaptée à la théorie que l'on veut développer.

La définition suivante est adaptée à la géométrie différentielle locale.

Définition 6 *: On appelle courbe plane dans* $\mathbb{R}^2$ *un sous-ensemble* $C \subset \mathbb{R}^2$ *tel qu'existe un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$*, et il existe une application continue injective* $M : I \to \mathbb{R}^2$ *telle que, pour tout* $t \in I$*,* $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Définition 7 *: Une courbe* $(C) \in \mathbb{R}^2$ *est dite algébrique lorsqu'elle possède une équation cartésienne polynomiale* $F(x, y) = 0$ *à coefficients réels ; une courbe* (C) *non algébrique est dite courbe transcendante.*

2.2 L'ordre d'un point standard d'une courbe :

Définition 8 *: Soit* (Γ) *une courbe plane standard dont la représentation paramétrique est :*

$M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, t \in I \ (I \subset \mathbb{R})$

un point $M_0 = M(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix}$ *de la courbe* (Γ) *est dit d'ordre* (p,q) *,s'ils existent deux entiers strictements positifs* $p, q \ (0 < p < q)$ *tels que :*

i) $M^{(i)}(t_0) = 0$ *si* $1 \leq i < p$ *et* $M^{(p)}(t_0) \neq 0$.

ii) $M^{(p)}(t_0) \wedge M^{(i)}(t_0) = 0$ *si* $p < i < q$ *et* $M^{(p)}(t_0) \wedge M^{(q)}(t_0) \neq 0$

où : q est l'ordre du premier vecteur dérivé non colinéaire à $M^{(p)}(t_0)$

-M_0 *est dit d'ordre p si seulement i) est vérifiée.*

-M_0 *est dit birégulier si seulement si* $(1,2)$ *est l'ordre de* M_0 *.*

2.3 Position d'une courbe par rapport à sa tangente :

Soit (Γ) une courbe plane donnée paramétriquement par $t \to M(t)$, et $M_0 = M(t_0)$ est un point de la courbe (Γ) d'ordre (p,q).

On utilise la formule de Taylor pour la fonction $M : I \to \mathbb{R}^2$

$$M(t) = M(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} M^{(p)}(t_0) + ... + \frac{(t-t_0)^q}{q!} M^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \eta_1$$

Lorsque $t \to t_0$, on peut écrire

$$M(t) = M(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} M^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} M^{(q)}(t_0)$$

-Si l'on prend un repère $\left(M(t_0), \frac{M^{(p)}(t_0)}{p!}, \frac{M^{(q)}(t_0)}{q!} \right)$ alors ,en posant $\alpha = t - t_0$, $M(t)$ a pour partie principale : $\begin{pmatrix} \alpha^p \\ \alpha^q \end{pmatrix}$

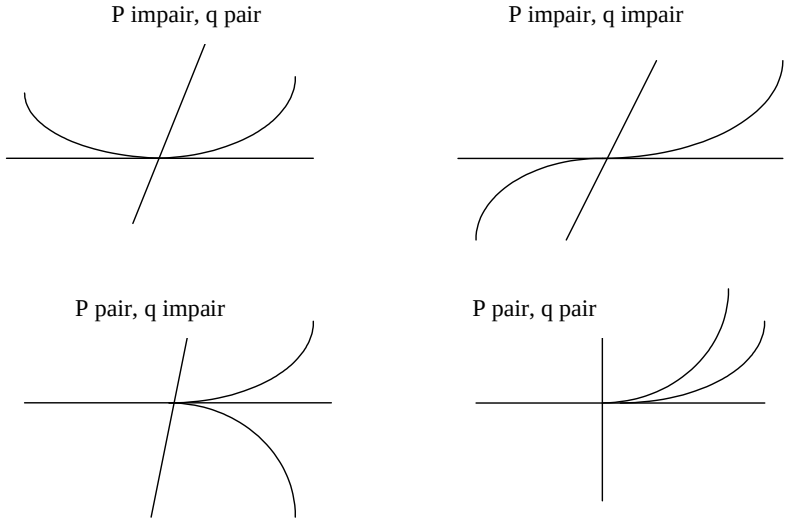
Nous allons distinguer 4 cas suivant la parité de p et q .

1^{er}cas. p impair, q pair : la courbe a localement le comportement du graphe de la fonction $x \to x^{\frac{q}{p}}$, au voisinage de $(0,0)$, $x^{\frac{q}{p}}$ est toujours positif, donc la courbe est du même côté de la tangente : qualitativement de la même forme qu'un graphe de la fonction $x \to x^2$, le point ici est un point ordinaire

$2^{éme}$cas. p impair , q impair : la courbe a localement le comportement du graphe de la fonction $x \to x^{\frac{q}{p}}$, au voisinage de $(0,0)$, $x^{\frac{q}{p}}$ est négatif puis positif , la courbe traverse la tangente : qualitativement de la même forme qu'un graphe de la fonction $x \to x^3$, le point ici est un point d'inflexion.

$3^{éme}$cas. p pair , q impair , α^p est toujours positif , α^q est négatif puis positif : nous avons un point de rebroussement de première espèce.

$4^{éme}$cas. p pair , q pair , α^p et α^q sont toujours positifs : nous avons un point de rebroussement de deuxième espèce.



2.4 Paramétrisation normale d'une courbe :

La notion de courbe étant indépendante de la paramétrisation choisie, on utilise alors la paramétrisation s où $\|M'(s)\| = 1$.

2.4.1 Abscisse curviligne :

Soit (Γ) une courbe plane standard birégulière, dont la représentation paramétrique est : $M(t) = \binom{x(t)}{y(t)}, t \in I$,$(I \subset \mathbb{R})$.

avec $M_0 = M(t_0)$ un point standard fixé comme origine.

Définition 9 *: On appelle abscisse curviligne l'application $s : I \to J$ $(I \subset J)$ telle que :*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|M'(u)\| \, du \Longrightarrow \; s'(t) = \|M'(u)\|$$

Théorème 3 *: Pour toute courbe* (Γ) *il existe une paramétrisation s où $\|M'(s)\| = 1$Celle-ci peut être définie par :*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|M'(u)\| \, du$$

.

Définition 10 *: On appelle paramétrisation normale de la courbe* (Γ) *la représentation paramétrique* $M(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}, s \in J$, *où s est l'abscisse curviligne de la courbe* (Γ).

Remarque :

1) -Le changement de paramètre est admissible, i.e les paramétrages $M(t)$ et $M(s)$ sont équivalents et l'orientation est conservée, puisque s est croissante.

2) -Toutes les paramétrisations normales ne diffèrent que par une translation :

$s \to s + s_0$ ou par un changement d'orientation :$s \to -s$.

2.5 Différentes formules de la courbure :

Courbure d'une courbe birégulière :

Soit (Γ) un courbe birégulière *définie* par :$s \to M(s) \Longrightarrow M'(s)$ est le vecteur tangent unitaire .

Dérivons l'égalité

$$\begin{cases} M'(s).M'(s) = 1 \\ M''(s).M'(s) = 0 \end{cases}$$

Donc $M''(s)$ est un vecteur normal

Définition 11 *: Le repère orthonormé direct d'origine $M(s)$, de premier vecteur $\overrightarrow{T} = M'(s)$ et de deuxième vecteur $\overrightarrow{N}$ tels que :*

$$\begin{cases} \overrightarrow{T}.\overrightarrow{T} = 1 \\ \overrightarrow{T}.\overrightarrow{N} = 0 \\ \left\|\overrightarrow{T}\right\| = \left\|\overrightarrow{N}\right\| = 1 \end{cases}$$

est appelé repère de Frenet de la courbe (Γ) au point $M(s)$.

- Le réel $\rho(s)$ défini par :

$$M''(s) = \rho(s).\overrightarrow{N}$$

est appelé courbure de la courbe (Γ) au point $M(s)$, et $r(s) = \dfrac{1}{\rho(s)}$ est le rayon de courbure.

-Le repère de Frenet est un repère mobile caractérisé par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{dM(s)}{ds} = M'(s) = \overrightarrow{T} \\ \dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = M''(s) = \rho(s).\overrightarrow{N} \\ \dfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\rho(s).\overrightarrow{T} \end{cases}$$

Courbure (indicatrice de Gauss) :

Le vecteur $M'(s)$ se déplace dans le plan $\mathbb{R}^2$ sur le cercle de centre O et de rayon 1.

L'application $s \to M'(s)$ est appelée indicatrice de Gauss.

Prenons une base fixe $\{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $\alpha(s)$ l'angle des vecteurs u_1 et $M'(s)$.

Théorème 4 *: La courbure au point $M(s)$ est égale à :*

$$\rho(s) = \frac{d\alpha\,(s)}{ds} = \alpha'\,(s)$$

Démonstration :

En décomposant $M'(s)$ sur un repère fixe $(O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$:

$$\begin{aligned} M'(s) &= \overrightarrow{T} = \cos\left(\alpha\,(s)\right)\overrightarrow{u_1} + \sin\left(\alpha\,(s)\right)\overrightarrow{u_2} \\ M''(s) &= \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \alpha'\,(s)\left(-\sin\left(\alpha\,(s)\right)\overrightarrow{u_1} + \cos\left(\alpha\,(s)\right)\overrightarrow{u_2}\right) \\ \rho(s).\overrightarrow{N} &= \alpha'\,(s)\,.\overrightarrow{N} \Longrightarrow \rho(s) = \frac{d\alpha\,(s)}{ds} = \alpha'\,(s) \end{aligned}$$

Courbure (coordonnées polaires) :

Soit (Γ) une courbe birégulière de représentation normale $s \to M(s)$, θ l'angle polaire du point $M\,(s)$, γ l'angle tangentiel et α l'angle entre l'axe (xx') et la tangente.

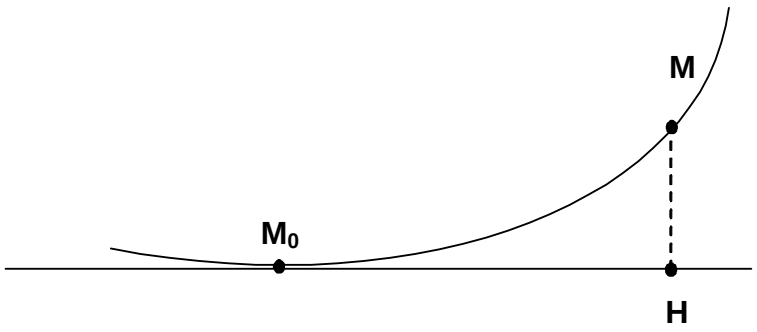
$$\begin{aligned} \alpha\,(s) &= \theta\,(s) + \gamma\,(s) \Longrightarrow \frac{d\alpha\,(s)}{ds} = \frac{d\theta\,(s)}{ds} + \frac{d\gamma\,(s)}{ds} \\ &\Longrightarrow \rho(s) = \theta'\,(s) + \gamma'\,(s) \end{aligned}$$

Courbure (point de vue géométrique) :

Théorème 5 *: Soit (Γ) une courbe plane standard birégulière, $M_0 \in (\Gamma)$ et $M \in (\Gamma)$ tel que $M \approx M_0$, Soit H la projection de M sur la tangente en M_0 à (Γ) et l la longueur de l'arc de $\widehat{M_0M}$:*

Alors la courbure de (Γ) en M_0 est égale à :

$$K = \frac{2\left\|\overrightarrow{HM}\right\|}{l^2}$$



Démonstration :

Prennons une paramétrisation normale et écrivons un développement limité de $\overrightarrow{M(s_0)M(s)}$ avec $M_0 = M(s_0)$ et $M = M(s)$ et $H = H(s)$.

$$\overrightarrow{M(s_0)H(s)} + \overrightarrow{H(s_0)M(s)} = (s - s_0)\, M'(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2\, M''(s_0) + R((s - s_0)^2)\overrightarrow{\eta}$$

Projetons sur le deuxième axe du repère deFrenet :

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{H(s_0)M(s)}\right\|.\overrightarrow{N} &= \frac{1}{2}(s - s_0)^2\, M''(s_0) + R((s - s_0)^2)\overrightarrow{\eta_2} \\
&\Longrightarrow \left\|\overrightarrow{HM}\right\|.\overrightarrow{N} = \frac{1}{2}(s - s_0)^2\, \rho(s_0).\overrightarrow{N} + R((s - s_0)^2)\overrightarrow{\eta_2} \\
&\Longrightarrow \left\|\overrightarrow{HM}\right\| = \frac{1}{2}(s - s_0)^2\, \rho(s_0) \\
&\Longrightarrow K = \rho(s_0) = \frac{2\left\|\overrightarrow{HM}\right\|}{(s - s_0)^2} = \frac{2\left\|\overrightarrow{HM}\right\|}{l^2}
\end{aligned}$$

Courbure (autre point de vue géométrique) :

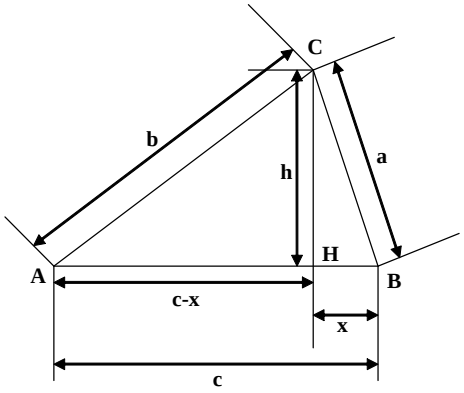
Théorème 6 *: Soit* (Γ) *une courbe plane standard birégulière ,* $M_0, M_1,\ M_2 \in (\Gamma)$ *tels que* $M_1 \approx M_0 \approx M_2$ *, S la surface de triangle* $(M_0M_1M_2)$*, on pose* $a = \left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\|, b = \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|, c = \left\|\overrightarrow{M_0M_2}\right\|,$

Alors la courbure au point M_0 est égale à :

$$K = \frac{4.S}{a.b.c} = \frac{4.\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a.b.c}$$

Où p est le demi-périmètre du triangle ($p = \frac{a+b+c}{2}$)

Démonstration :



Pour démontrer la formule il suffit de montrer que la surface de triangle est égale à :$S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$

la surface de triangle est égale à : $S = \frac{1}{2}.c.h.$

Il suffit de trouver la valeur de h en fonction de a, b et c.

On a dans le triangle BHC :

$$x^2 + h^2 = a^2 \Longrightarrow h^2 = a^2 - x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

et dans le triangle AHC :

$$(c-x)^2 + h^2 = b^2 \Longrightarrow h^2 = b^2 - (c-x)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

les relations (1) et (2) donnent : $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2.c}$

En reportant ces valeurs dans la relation (1) , on trouve :

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2.c}\right)^2 \Longrightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{a^4+b^4+c^4+2a^2c^2-2a^2b^2-2b^2c^2}{4.c^2}} \\ &\Longrightarrow h = \sqrt{\frac{2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4.c^2}} \\ &\Longrightarrow S = \frac{1}{2}.c.h. = \sqrt{\frac{2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{16}} \\ &\Longrightarrow \sqrt{\frac{2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{16}} = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)} \end{aligned}$$

Alors

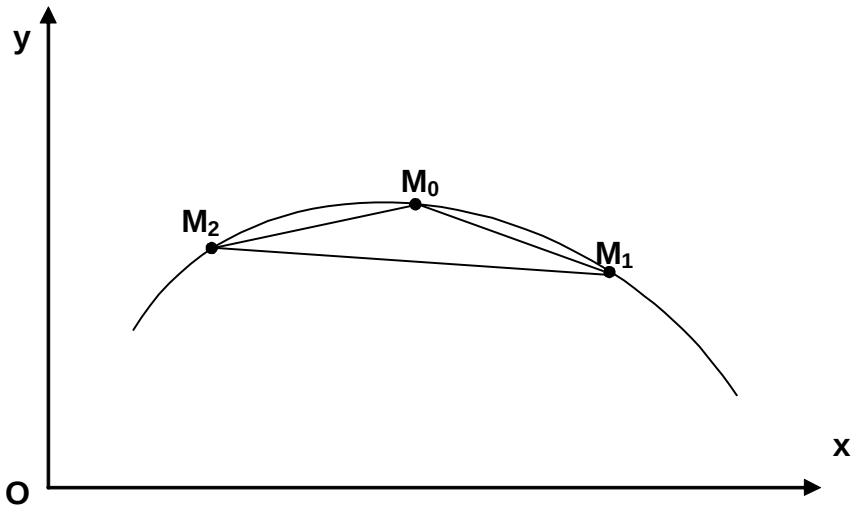
$$S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$$

Courbure (autre point de vue géométrique) :

Théorème 7 *:Soit* (Γ) *une courbe plane standard birégulière et* $M_0, M_1,\ M_2 \in (\Gamma)$ *tels que* $M_1 \approx M_0 \approx M_2$ *,*θ *l'angle des vecteurs* $\overrightarrow{M_0M_1}$ *et* $\overrightarrow{M_0M_2}$:

Alors la courbure au point M_0 *est égale à :*

$$K = \frac{1}{R} = 2\ ^0 \left(\frac{|\tan(\theta)|}{\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|}\right)$$

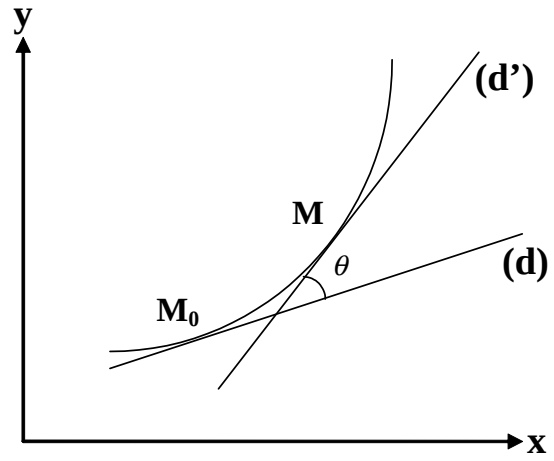


autre formulation de la Courbure

Théorème 8 *:Soit* (Γ) *une courbe plane standard birégulière et* M_0 *,* $M \in (\Gamma)$ *tels que* $M \approx M_0$, (d) *tangente en* M_0, (d') *tangente en* M *,*θ *l'angle des droites* (d) *et* (d') :

Alors la courbure au point M_0 *est égale à :*

$$K = \frac{1}{R} =^0 \left(\frac{|\theta|}{\left\| \overrightarrow{M_0M} \right\|} \right) = 2^{\,0} \left(\frac{|\alpha|}{\left\| \overrightarrow{M_0M} \right\|} \right)$$



avec α l'angle des droite (M_0M) et (d) où $|\theta| = 2|\alpha|$

2.5.1 Courbure généralisée :

On peut généraliser la notion de courbure par l'étude de rapport : $\dfrac{|\theta|}{\left\|\overrightarrow{M_0M}\right\|^{\sigma}}$

où σ caractérisera la nature du point standard M_0.

Théorème 9 *: Soit (Γ) une courbe plane standard ,et M_0 est un point de la courbe (Γ) d'ordre (p,q) ,$M \in (\Gamma)$ telle que $M \approx M_0$:*

Alors la courbure généralisée au point M_0 est égale à :

$$K_g = {}^0\left(\frac{|\theta|}{\left\|\overrightarrow{M_0M}\right\|^{\frac{q}{p}-1}}\right) = \binom{q}{p}\ {}^0\left(\frac{|\alpha|}{\left\|\overrightarrow{M_0M}\right\|^{\frac{q}{p}-1}}\right)$$

où $|\theta| = \binom{q}{p}|\alpha|$

2.5.2 Formule paramétrique de la courbure généralisée :

Théorème 10 *: Soit (Γ) une courbe plane standard, $M_0 = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix}$ est un point d'ordre (p,q), et $M = \begin{pmatrix} x(t_0+\varepsilon) \\ y(t_0+\varepsilon) \end{pmatrix}$ un point régulier $(M'(t_0+\varepsilon) \neq 0)$, où ε est i.p ,$\varepsilon \approx 0$:*

Alors la courbure généralisée au point M_0 est égale à :

$$K_g(t_0) = \frac{q\,(p!)^{\frac{q}{p}}\left\|M^{(p)}(t_0) \wedge M^{(q)}(t_0)\right\|}{p.q!.\left\|M^{(P)}(t_0)\right\|^{\frac{q}{p}+1}}$$

Remarque :

1) Si $M_0 = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix}$est un point birégulier (d'ordre $(1,2)$) alors la coubure au point M_0 est égale à :

$$K = \frac{\|x'(t_0).y''(t_0) - x''(t_0).y'(t_0)\|}{\left|(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2\right|^{\frac{3}{2}}}$$

2) Si la courbe (Γ) est donnée éxplicitement $(y = f(x))$:

Alors la courbure au point M_0 est égale à :

$$K = \frac{|f''(x_0)|}{\left|1 + (f'(x_0))^2\right|^{\frac{3}{2}}}$$

2.6 Formule infinitésimale de la courbure :

2.6.1 Décomposition de Goze :

Théorème 11 *: Soit n un entier standard.*

Soit M un point limité de $\mathbb{R}^n$, M_0 son ombre , il existe alors une base standard $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}, ..., \overrightarrow{V_n}$ de $\mathbb{R}^n$, et n infinitisimaux réels $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n$ .tels que :

$$M = M_0 + \varepsilon_1\overrightarrow{V_1} + \varepsilon_1\varepsilon_2\overrightarrow{V_2} + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\overrightarrow{V_3} + ... + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.....\varepsilon_n\overrightarrow{V_n}$$

Remarque :

Si $M \in hal\,(M_0)$ dans $\mathbb{R}^2$, alors il existe une base standard $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$de $\mathbb{R}^2$, et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux (i.p) tels que :

$$M = M_0 + \varepsilon_1\overrightarrow{V_1} + \varepsilon_1\varepsilon_2\overrightarrow{V_2}$$

2.6.2 Expression non standard de la courbure généralisée :

Théorème 12 *: Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ avec $M = M_0 + \varepsilon_1\overrightarrow{V_1} + \varepsilon_1\varepsilon_2\overrightarrow{V_2}$.*

Alors la courbure généralisée au point M_0 est égale à :

$$K_g = \frac{q}{p}\ {}^0\left(\frac{|\varepsilon_2|}{|\varepsilon_1|^{\frac{p}{q}-1}}\right)$$

où M_0 est un point standard d'ordre (p, q) ,.$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux i.p et $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$ base standard orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

Remarque :

Si M_0 est birégulier, la courbure au point M_0 est égale à :

$$K = 2^{\,0}\left(\frac{|\varepsilon_2|}{|\varepsilon_1|^{\frac{3}{2}}}\right)$$

2.7 Décomposition d'un point à l'infini :

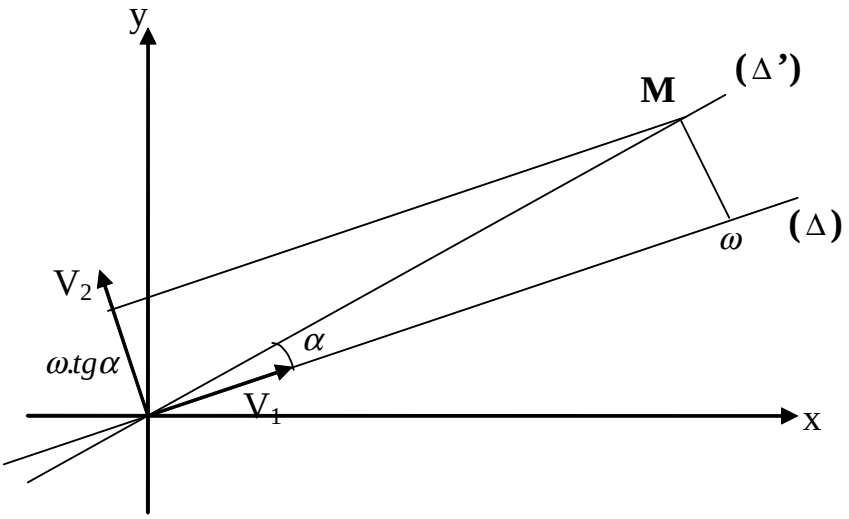
Théorème 13 *: Soit M un point à l'infini du plan $\mathbb{R}^2$, alors il exist une décomposition unique telle que :*

$$M = \omega\overrightarrow{V_1} + \omega\varepsilon\overrightarrow{V_2}$$

Avec : 1) ω est infiniment grand de $\mathbb{R}$.

2) ε est infiniment petit de $\mathbb{R}$.

3) $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ deux vecteurs orthonormés.



démonstration : Soit M un point à l'infini du plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien, on a alors seulement deux possibilités :

*M se trouve sur une droite standard (Δ) passant par l'origine des axes, dans ce cas on a :

$$M = \omega\overrightarrow{V_1}$$

Où $\overrightarrow{V_1}$ est un vecteur unitaire porté par (Δ).

*M se trouve sur une droite non-standard (Δ') passant par l'origine des axes, soit (Δ_0) l'ombre de (Δ') et ε la tangente de l'angle des deux droites (Δ_0) et (Δ') (on a nécessairement $\varepsilon \approx 0$), on peut danc écrire :

$$M = \omega\overrightarrow{V_1} + \omega\varepsilon\overrightarrow{V_2}$$

Où $\overrightarrow{V_1}$ est le vecteur unitaire porté par (Δ_0), et $\overrightarrow{V_2}$ le vecteur qui formera avec $\overrightarrow{V_1}$ un repère orthonormé.

Remarque : On peut trouver un infiniment petit ε_2 telle que $\omega = \dfrac{1}{\varepsilon_2}$ d'où la décomposition suivante :

$$M = \frac{1}{\varepsilon_2}\overrightarrow{V_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\overrightarrow{V_2}$$

Chapitre 3

Méthode polygonale appliquée aux coniques.

3.1 Introduction

Définition 12 *: Les coniques forment une famille de courbes algébriques planes résultant de l'intersection d'un plan avec un cône. Selon les positions relatives du plan et du cône, on obtient differents types des coniques.*

Les coniques propres sont obtenues lorsque le plan n'est pas perpendiculaire à l'axe du cône et ne passe pas par son sommet.

on distingue trois sortes des coniques propres en fonction de l'angle d'inclinaison du plan avec l'axe du cône.

Si cet angle est supérieur a l'angle d'ouverture du cône, l'intersection est une ellipse.

Si cet angle est inférieur a l'angle d'ouverture du cône, l'intersection est une hypèrbole.

Et si les deux angles sont égaux, intersection est une parabole.

Définition 13 *: Dans un plan* (π) *on considère une droite* (Δ) *et un point* B *non situé sur* (Δ)*.*

Soit λ *un réel strictement positif.*

En appelle conique de l'indice directrice (Δ)*, de foyer* B *et d'éxcentricité* λ

L'ensemble des points N du plan (π) vérifiant :

$$\frac{NB}{NH} = \lambda$$

telle que H soit la projection de N sur (Δ) .

en fonction des valeurs de λ on obtient plusieurs types des courbes.

Si $\lambda > 1$ on a une hyperbole.

Si $0 < \lambda < 1$ on a une ellipse.

Si $\lambda = 1$ on a une parabole.

- La droite qui passe par B et perpendiculaire à la droite (Δ) est appelée axe de la conique.

Remarque :

la droite précedente est une droite symétrique par rapport aux coniques .

Définition 14 *(Analytique) : En géométrie analytique affine, les coniques sont les courbes algébriques planes du second ordre, c'est a dire les courbes dont les coordonnées cartésiennes x, y sont solutions d'une équation polynomiale du second degré à coefficients réels :*

$$a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x + a_4y = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

où a_0, a_1, a_2 ne sont pas simultanément nuls..

On peut toujours supposer que les coniques passent par l'origine

On se propose d'étudier la géométrie locale et asymptotique des coniques en utilisant la méthode polygonale de Newton.

3.2 Rappel sur le polygone de Newton :

Soit (Γ) une courbe algébrique d'équation implicite $F(x, y) = 0$ avec : $F(0, 0) = 0$. D'après le théorème des fonctions implicites,si on a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \neq 0$, alors il existe une

fonction explicite : $u(x)$ telle que $y = u(x)$ où $u(0) = 0$ et $F(x, u(x)) = 0$.

Considérons la fonction F définie par

$$F(x, y) = \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j$$

telle que :

1) $i, j \in \mathbb{N}$.

2) Aucun des couples (i, j) n'est égal à $(0, 0)$.

3) $\inf(i) = \inf(j) = 0$

4) $a_{ij} \in \mathbb{R}$

Nous allons dans ces conditions montrer qu'on peut déterminer une partie principale au voisinage de $x = 0$, pour toute fonction continue u solution de l'équation $F(x, y) = 0$ et telle que $y = u(x)$, $u(0) = 0$ et

$$F(x, u(x)) = 0$$

Alors on peut trouver un nombre réel strictement positif $\mu > 0$

telle que : $u(x) = x^\mu z(x)$ avec $z(0) \neq 0$ d'où :

$$F(x, u(x)) = F(x, x^\mu z) = \sum_{ij} a_{ij} x^i (x^\mu z)^j$$

ainsi :

$$F(x, x^\mu z) = \sum_{ij} a_{ij} x^{i+\mu j} z^j \text{..... (3)}$$

Soit $\gamma > 0$ le plus petit nombre réel positif qui vérifie :

$$i + \mu j = \gamma \text{ avec } a_{ij} \text{ non nul}$$

où $\gamma = \inf \{i + \mu j \ / \ a_{ij} \neq 0\}$

Alors on peut écrire l'équation (3)

$$F(x, x^{\mu}z) = x^{\gamma} \sum_{i+\mu j \rangle \gamma} a_{ij} x^{i+\mu j-\gamma} z^{j} + x^{\gamma} \sum_{i+\mu j=\gamma} a_{ij} z^{j}$$

On pose

$$\Psi(x) = \sum_{i+\mu j=\gamma} a_{ij} z^{j}$$

Lorsque x tend vers 0, on trouve que :

$$F(x, x^{\mu}z) \approx x^{\gamma}\Psi(x)$$

Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$et $\mu > 0$.

Si μ est vérifie :

1) $i^{'} + \mu j^{'} = i'' + \mu j''$pour deux couples distincts au moins $(i^{'}, j^{'})$ et (i'', j'').

2) $i' + \mu j^{'} \leq i + \mu j$ pour tout autre couple (i, j).

Il est commode de représenter graphiquement les conditions (1) et (2).

En considérant dans le plan $\mathbb{R}^2$, les points $(i^{'}, j^{'})$ et μ vérifie les conditions (1) et (2) .

Alors la droite (Δ) d'équation

$$u + \mu v = \gamma$$

Contient au moins deux des points $(i^{'}, j^{'})$ et que tout les points (i, j) sont au-dessus de cette droite.

-Premièrement, on commence par $(0, j_k)$ tel que j_k est la plus petite des valeurs de j des couples (i, j) avec $i = 0$.

Posons $j_k = \alpha_0$.

Considérons $u + \mu(v - \alpha_0) = 0$ les droites passent par $(0, \alpha_0)$, puis on cherche les couples (i, j) telle que $i\rangle 0$ et $j < \alpha_0$ qui verifient :

les quotients

$$\frac{i - 0}{j_k - j} = \frac{i}{\alpha_0 - j} = \mu$$

Si $\mu_1$est le plus petit d'entre eux, alors la droite d'équation

$u + \mu_1(v - \alpha_0) = 0$ est la première droite à considérer.

-Soit (α_1, β_1) le couple de (i, j) situé sur cette droite tel que i est le plus grand possible.

Considérons $(u - \alpha_1) + \mu(v - \beta_1) = 0$ les droites passent par (α_1, β_1) puis en cherche les couples (i, j) telle que $i > \alpha_1$ et $j < \alpha_1$ et telle que $\dfrac{i - \alpha_1}{\beta_1 - j} = \mu$.

-Si μ_2 est le plus petit d'entre eux, alors $(u - \alpha_1) + \mu_2(v - \beta_1) = 0$ est la deuxième droite à considérer.

On continue de cette façon jusqu'au point $(\alpha_r, 0)$ ou $\beta_r = 0$ et α_r est la plus petite des valeurs j des couples (i, j) avec $j = 0$.

On obtient alors une ligne polygonale convexe à r cotés dite polygone de Newton associée à la fonction F au voisinage de $(0, 0)$.

3.3 Existence des branches

La branche de la courbe d'équation $F(x, y) = 0$ définie par $y = u(x)$ telle que $u(x) = x^{\mu} z(x)$.

où la fonction $u(x)$ est continue , alors la fonction $z(x)$ est continue.

D'où :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} z(x) = z(0) \text{ et } u(x) \sim x^{\mu} z(0)$$

-Posons : $u(x) = x^{\mu_1} z$ pour $r = 1$, donc

$$F(x, y) = F(x, u(x)) = \sum_{ij} a_{ij} x^{i + \mu_1 j} z^j = x^{\gamma} f(x, z)$$

On a :

$$F(x, y) = 0 \Longrightarrow x^{\gamma} f(x, z) = 0$$

Après division par x^{γ} , on trouve $f(x, z) = 0$.

$$\text{Lorsque } x \text{ tend vers } 0, \ f(x, z) \text{ tend vers } g(z) = \sum_{i + \mu_1 j = \gamma} a_{ij} z^j$$

Soit le couple (i', j') qui vérifie $i' + \mu_1 (j' - \alpha_0) = 0$

Si le polynome $g(z)$ admet des racines dans $\mathbb{R}^*$ alors il éxiste $z_0 \neq 0$ tel que $g(z_0) = 0$ puis on cherche y sous la forme :

$$y = u(x) = x^{\mu_1} z(x) \text{ avec } \lim_{x \longrightarrow 0} z(x) = z_0.$$

Posons alors $y = x^{\mu_1} z$ dans l'équation $F(x, y) = 0$.

L'équation $F(x, y) = 0$ s'écrit sous la forme suivante :

$$(z - z_0)^q = x^\lambda G(x, z)$$

tel que $\lambda > 0$ et G est une fonction continue au voisinage de ($x = 0, z = z_0$).

-Si q est pair et $G(0, z_0) < 0$, alors il n'y a pas de fonction $z = z(x)$ continue et tendant vers z_0 lorsque x tend vers 0 .

-Si q est pair et $G(0, z_0) > 0$ alors :

$$(z - z_0)^q = x^\lambda G(x, z_0) \Longrightarrow z - z_0 = \pm x^{\frac{\lambda}{q}} (G(x, z_0))^{\frac{1}{q}}$$

Où :

$$z = z_0 \pm x^{\frac{\lambda}{q}} (G(x, z_0))^{\frac{1}{q}}$$

Alors il y a deux branches de courbe distinctes telles que $u(x) \sim z_0 x^{\mu_1}$.

-Si q est impair alors :

$$(z - z_0)^q = x^\lambda (G(x, z)) \Longrightarrow z - z_0 = x^{\frac{\lambda}{q}} (G(x, z))^{\frac{1}{q}}$$

Alors :

$$z = z_0 + x^{\frac{\lambda}{q}} (G(x, z_0))^{\frac{1}{q}}$$

Alors il y a une seule branche telle que : $u(x) \sim z_0 x^{\mu_1}$.

-Pour obtenir le deuxième terme de la fonction u , on fait le changement de variable

suivant :

$y = z_0 x^{\mu_1} + Y$,lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$, Y tend vers 0.

Alors on obtient une nouvelle fonction $F_1(x, Y)$ telleque :

$$F(x, y) = F(x, z_0 x^{\mu_1} + Y) = F_1(x, Y) = 0$$

3.4 Paramétrisation des courbes algébriques avec la méthode polygonale.

Théorème 14 *:Soit* (Γ) *une courbe algébrique de l'équation* $F(x, y) = 0$ *telle que* $F(0, 0) = 0$ *et* $\mu = \frac{q}{p}$ *telle que* p *et* q *apartient à* $\mathbb{N}^*$.

S'il existe une branche $y = x^{\mu} z(x)$ *alors*

$$\begin{cases} x = t^p \\ y = t^q z(t^p). \end{cases}$$

est une paramétrisation de la courbe (Γ).

Démonstration :On a :

$$y = x^{\mu} z(x) \Longrightarrow y = x^{\frac{q}{p}} z(x).$$

On pose $x = t^p$ on trouve $y = (t^p)^{\frac{q}{p}} z(t^p)$

Alors :$y = t^q z(t^p)$.

3.4.1 Autre écriture d'équation d'une droite du polygone de Newton :

L'équation d'une droite, passant par deux points a et b de coordonnées entières $a(i_0, j_0)$ et $b(i_1, j_1)$ s'écrit comme suit : :

$$(j_1 - j_0)x + (i_0 - i_1)y = i_1(j_1 - j_0) + j_1(i_0 - i_1).$$

On pose :

$$P = (j_1 - j_0)\ ,\ Q = (i_0 - i_1) \text{ et } R = i_1(j_1 - j_0) + j_1(i_0 - i_1)$$

Avec :

$$\delta = p\gcd(P, Q) \Longrightarrow \delta \text{ divise } R$$

Alors l'équation précédente s'écrit : $Px + Qy = R$

Après division par δ ,on trouve :

$$px + qy = r \text{ avec : } p = \frac{P}{\delta} \text{ et } q = \frac{Q}{\delta} \text{ et } r = \frac{R}{\delta}$$

où p et q sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout, si $p = q$ alors on trouve : $p = q = 1$.

Ce qui nous donne finallement la paramétrisation de la courbe algébrique (Γ) au voisinage de l'origine est :

$$\begin{cases} x = t^p \\ y = z(t^q)t^q \end{cases} \text{ avec } \mu = \frac{q}{p}$$

Théorème 15 *: Soit* (Γ) *une courbe algébrique standard de paramètrisation suivante :*

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^p \\ z(t^p)t^q \end{pmatrix}$$

Alors l'origine est un point d'ordre (p, q) *.*

Démonstration :

On a trois possibilités :

-Si $p < q$ alors :

On a :

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} t^p \\ z_0 t^q \end{pmatrix} \text{avec } z_0 = \lim_{t \to 0} z(t)$$

Lorsque t tend vers 0.

Il suffit de montrer que : $r^{[p]}(0) \neq 0$ et $r^{[q]}(0) \neq 0$ avec $r^{[p]}(0)$ et $r^{[q]}(0)$ linéairements indipendants.

On a :

$$r'(t) \simeq \begin{pmatrix} pt^{p-1} \\ qz_0 t^{q-1} \end{pmatrix}$$

$$r''(t) \simeq \begin{pmatrix} p(p-1)t^{p-2} \\ q(q-1)t^{q-2} \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r^{[p]}(t) \simeq \begin{pmatrix} p! \\ z_0 \frac{q!}{p!} t^{q-p} \end{pmatrix}$$

On trouve que le premièr vecteur non nul est :

$$r^{[p]}(0) = \begin{pmatrix} p! \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on a :

$$\forall p < i < q : r^{[i]}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 \frac{q!}{q-i} t^{q-i} \end{pmatrix} \Longrightarrow r^{[i]}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et : } r^{[q]}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 q! \end{pmatrix} \Longrightarrow r^{[q]}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 q! \end{pmatrix}$$

avec $r^{[p]}(0)$ et $r^{[q]}(0)$ linéairements indépendants, l'origine est un point d'ordre (p, q).

-Si $p = q = 1$:

Soit (Γ) une courbe algébrique standard d'équation :

$$F(x, y) = \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j \text{ telle que } a_{ij} \neq 0$$

où

$$\begin{aligned} F(x,y) &= f_n(x,y) + f_{n-1}(x,y) + ... + f_m(x,y) \\ \text{telle que } f_k(x,y) &= \sum_{i+j=k} a_{ij} x^i y^j \end{aligned}$$

On a $r(t) = \begin{pmatrix} t \\ z(t)t \end{pmatrix}$, l'équation s'écrit :

$$t^n f_n(1, z(t)) + ... + t^{m+1} f_{m+1}(1, z(t)) + t^m f_m(1, z(t)) = 0$$

En divisant par t^m,on trouve :

$$t^{n-m} f_n(1, z(t)) + ...t f_{m+1}(1, z(t)) + f_m(1, z(t)) = 0.....(**)$$

Le polynome $f_m(1, z)$ admet donc k racines dans $\mathbb{R}$ telle que $k \leq m$, et pour toute racine z_0 non nulle l'équation $(**)$ s'écrit :

$$(z - z_0)^\sigma = x^\lambda g(x, z)$$

-1^{er} cas : si $\sigma = 1$ ou z_0 est un racine simple du polynome f_m Alors $z(t)$ est développable en série entière :

$$z(t) = z_0 + \sum_{i \geq 1} a_i t^i$$

Alors on a :

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ tz_0 + \sum\limits_{i \geq 1} a_i t^{i+1} \end{pmatrix}$$

Soit k le premier indice telle que $a_k \neq 0$, dans ce cas on a la paramètrisation :

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ tz_0 + a_k t^{k+1} + \sum_{i \rangle k} a_i t^{i+1} \end{pmatrix}$$

Alors l'origine est un point d'ordre $(1, k+1)$.

-2èmecas : si $\sigma > 1$ où z_0 est un racine multiple de $f_m(1,z)$ d'ordre σ, alors $z(t)$ est développable en série de Puiseux :

$$z(t) = z_0 + \sum_{i \geq 1} a_i t^{\frac{i}{\sigma}}.$$

Soit k le premier indice telle que $a_k \neq 0$ dans ce cas on trouve la paramètrisation suivante :

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ z_0 t + a_k t^{\frac{k}{\sigma}+1} + \sum_{i \rangle k} a_i t^{\frac{i}{\sigma}+1} \end{pmatrix}$$

En changent la variable suivante : $t = s^\sigma$ on obtient

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^\sigma \\ z_0 s^\sigma + a_k s^{k+\sigma} + \sum_{i \rangle k} a_i s^{\sigma+i} \end{pmatrix}$$

l'origine est un point d'ordre $(\sigma, \sigma + k)$.

-Si $p > q$ alors :

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(t)t^p \\ t^q \end{pmatrix} \approxeq \begin{pmatrix} z_0 t^p \\ t^q \end{pmatrix} \text{avec } z_0 = \lim_{t \to 0} z(t)$$

est une paramètrisation de la courbe (Γ) et il suffit montrer que : $r^{[q]}(0) \neq 0$ et $r^{[p]}(0) \neq 0$ avec $r^{[q]}(0)$ et $r^{[p]}(0)$ linéairements indépendants.

on a :

$$r^{[q]}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ q! \end{pmatrix} \neq 0, \text{et } r^{[p]}(0) = \begin{pmatrix} z_0 p! \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

et évidement que $r^{[q]}(0)$ et $r^{[p]}(0)$ sont linéairements indépendants.

Définition 15 *: Soit* (Γ) *une courbe algébrique standard et* $m_0 = r(t_0)$ *est un point de*

(Γ) *d'ordre* (p,q), *sa courbure généralisée est définie par :*

$$K_g(t_0)=\frac{q(p!)^{\frac{q}{p}}}{pq!}\frac{\begin{vmatrix} x^{[p]}(t_0) & x^{[q]}(t_0) \\ y^{[p]}(t_0) & y^{[q]}(t_0) \end{vmatrix}}{\|r^{[p]}(t_0)\|^{\frac{q}{p}+1}}$$

Théorème 16 *:soit* (Γ) *une courbe algébrique qui passe à l'origine avec l'origine est un point d'ordre* (p,q) *alors :*

i) Si $p<q$ *alors la courbure généralisée de l'origine est égale à :*

$$K_g(0)=\frac{q}{p}\left|\lim_{x\to 0} z(x)\right|$$

ii) Si $p=q$ *alors on obtient deux cas :*

-Si z_0 *est une racine simple de* $f_m(1,z)$ *alors :*

$$K_g(0)=(k+1)\frac{|a_k|}{|1+z_0^2|^{\frac{k}{2}+1}}$$

-Si z_0 *est une racine multiple de* $f_m(1,z)$ *d'ordre* σ *alors :*

$$K_g(0)=\frac{\sigma+k}{\sigma}.\frac{|a_k|}{|1+z_0^2|^{\frac{k}{2\sigma}+1}}$$

3.5 L'application de la méthode polygonale

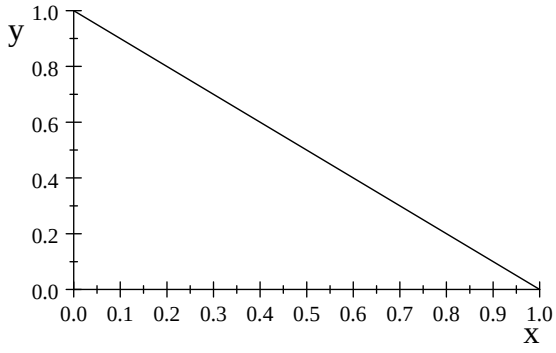
► Soit (Γ) une conique standard dont l'équation générale est de la forme :

$$a_0x^2+a_1xy+a_2y^2+a_3x+a_4y=0.....(1)$$

telle que :a_0,a_1,a_2 ne soient pas sumiltanément nuls.

La courbe (Γ) d'équation (1) est caractérisée par les couples :

$\{(2,0),(1,1),(0,2),(1,0),(0,1)\}$.



le polygone de Newton

Alors l'enveloppe convexe comprend un segment de droite d'équation : $x+y=1$ avec $\mu_1 = 1$ avec $p = q = 1$ alors :

On a :

$$y = zx \text{ avec } z \text{ est une fonction dépend de } x$$

alors l'équation (1) s'écrit :

$$(1) \Longrightarrow a_0x^2 + a_1zx^2 + a_2z^2x^2 + a_3x + a_4zx = 0$$

On simplifions par x, on trouve :

$$(1) \Longrightarrow a_0x + a_1zx + a_2z^2x + a_3 + a_4z = 0$$

Par passage a l'ombre ,on trouve :

$$z\,(0) \simeq z_0 = -\frac{a_3}{a_4} \text{ telle que } a_4 \neq 0.$$

Alors :

$$y \simeq -\frac{a_3}{a_4}x.$$

-1ercas : $a_4 \neq 0$.

Pour trouver le deuxième terme :

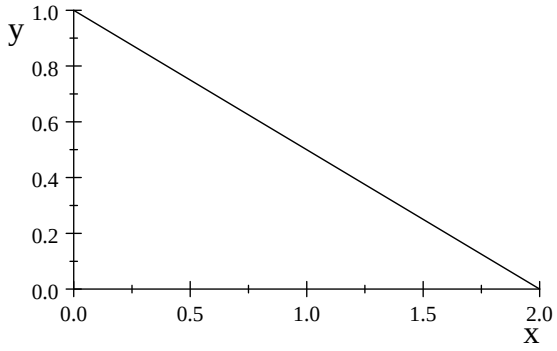
On pose :

$$Y = y + \frac{a_3}{a_4}x \Longrightarrow y = Y - \frac{a_3}{a_4}x$$

Alors :

$$\begin{aligned}(1) \quad &\Longrightarrow \quad a_0x^2 + a_1x(Y - \frac{a_3}{a_4}x) + a_2(Y - \frac{a_3}{a_4}x)^2 + a_3x + a_4(Y - \frac{a_3}{a_4}x) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{a_0a_4^2 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2}{a_4^2}x^2 + \frac{a_1a_4 - 2a_2a_3}{a_4}xY + a_2Y^2 + a_4Y = 0\end{aligned}$$

La courbe de cette équation est caractérisée par les couples :
$\{(2,0),(1,1),(0,2),(0,1)\}$.



le polygone de Newton

Alors l'enveloppe convexe comprend un segment de droite d'équation : $x + 2y = 2$ avec $\mu = 2$ et $(p,q) = (1,2)$.

Alors : $Y = zx^2$ avec z est une fonction dépend a x.

Alors l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{a_0a_4^2 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2}{a_4^2}\,x^2 + \frac{a_1a_4 - 2a_2a_3}{a_4}\,zx^3 + a_2z^2x^4 + a_4zx^2 = 0$$

On simplifions par x^2, on trouve :

$$\frac{a_0a_4^2 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2}{a_4^2} + \frac{a_1a_4 - 2a_2a_3}{a_4}zx + a_2z^2x^2 + a_4z = 0$$

Par passage à l'ombre on trouve :

$$z(0) \simeq z_1 = \frac{a_1a_3a_4 - a_0a_4^2 - a_2a_3^2}{a_4^3}$$

Alors :

$$Y \simeq \frac{a_1a_3a_4 - a_0a_4^2 - a_2a_3^2}{a_4^3}x^2 \Longrightarrow y \simeq -\frac{a_3}{a_4}x + \frac{a_1a_3a_4 - a_0a_4^2 - a_2a_3^2}{a_4^3}x^2 + ...$$

Et ainsi on a la paramétrisation suivante :

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\frac{a_3}{a_4}t + \frac{a_1a_3a_4 - a_0a_4^2 - a_2a_3^2}{a_4^3}\, t^2 + ... \end{pmatrix}$$

Alors dans ce cas l'origine est un point d'ordre $(1, 2)$ où l'origine est un point birrégulier.

finallement on obtient :

$$K_g(0) = 2\frac{\left|\frac{a_1a_3a_4 - a_0a_4^2 - a_2a_3^2}{a_4^3}\right|}{\left|1 + \frac{a_3^2}{a_4^2}\right|^{\frac{1}{2}+1}} \Longrightarrow K_g(0) = 2\left|\frac{a_1a_3a_4 - a_0a_4^2 - a_2a_3^2}{(a_3^2 + a_4^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$$

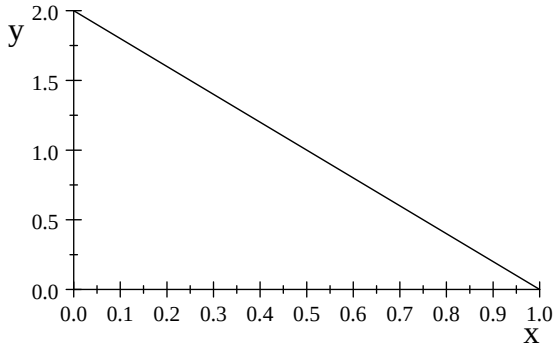
-2ème cas : $a_4 = 0$.

Dans ce cas l'équation (1) s'écrit :

$$a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x = 0$$

La courbe de cette équation est caratérisée par des couples :

$\{(2, 0), (1, 1), (0, 2), (1, 0)\}$.



le polygone de Newton

Alors l'enveloppe convexe comprend un segment de droite d'équation :
$2x + y = 2$ avec $\mu = \dfrac{1}{2}$ et $(p, q) = (1, 2)$.
Alors :

$$x = z(y)y^2 \simeq z_0 y^2 \text{ telle que } z_0 = \lim_{y \to 0} z(y)$$

Ainsi l'équation (1) s'écrit :

$$a_0 z^2 y^4 + a_1 z y^3 + a_2 y^2 + a_3 z y^2 = 0$$

On divisions par y^2 on trouve que :

$$a_0 z^2 y^2 + a_1 z y + a_2 + a_3 z = 0$$

par passage a l'ombre on trouve que :

$$z = -\frac{a_2}{a_3}$$

Et enfin on trouve la paramétrisation suivante :

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(t)t^2 + ... \\ t \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_3}t^2 + ... \\ t \end{pmatrix}$$

Alors dans ce cas l'origine est un point d'ordre $(1, 2)$, ou l'origine est un point

birrégulier.

Alors :

$$K_g(o) = 2\frac{\left|\frac{a_2}{a_3}\right|}{|1+0|^{\frac{1}{2}+1}} = 2\left|\frac{a_2}{a_3}\right|$$

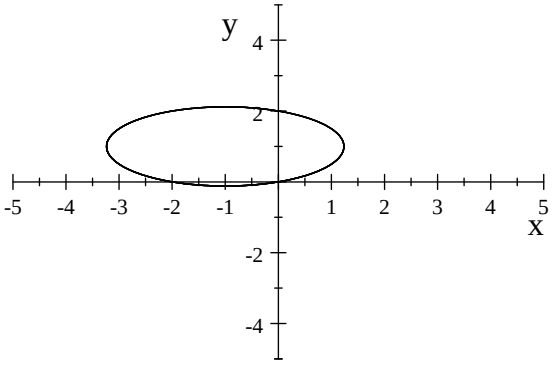
Remarque :

tout les points finis des coniques sont d'ordre $(1, 2)$, où les coniques sont des courbes algébriques birrégulières.

Exemple sur le premier cas :

Soit (Γ) une courbe algébrique standard de l'équation :

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 8y = 0$$



on peut écrire l'équation de (Γ) à la forme suivante :

$$\frac{(x+1)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} + \frac{(y-1)^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = 1$$

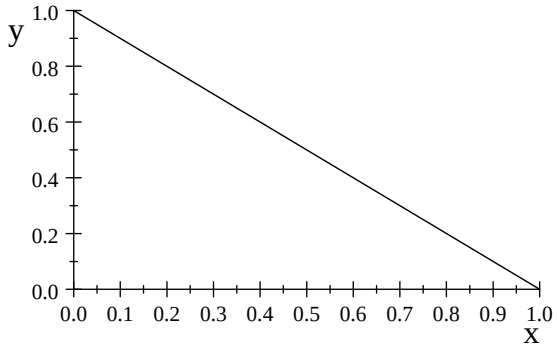
Alors (Γ) est une ellipse de centre $(-1, 1)$, avec deux indices directrices

$$(\Delta_1) : x = \frac{10}{\sqrt{5}} - 1 \text{ , et } (\Delta_2) : x = -\frac{10}{\sqrt{5}} - 1$$

et deux foyers $B_1\left(\frac{\sqrt{15}}{2} - 1, 1\right)$, $B_2\left(-\frac{\sqrt{15}}{2} - 1, 1\right)$, et d'éxcentricité $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

La courbe (Γ) est caractérisée par les couples :

$\{(2,0),(0,2),(1,0),(0,1)\}$.



le polygone de Newton

L'enveloppe convexe comprend un segment de droite d'équation :

$x+y=1$ avec $\mu=1$ et $p=q=1$.

$$\text{alors : } y=z(x)\,x=z_0x \text{ avec } \lim_{x\to 0} z(x)=z_0$$

ainsi l'équation s'écrit :

$$x^2+4z^2x^2+2x-8zx=0 \Longrightarrow z_0=\frac{1}{4} \Longrightarrow y\simeq\frac{1}{4}x$$

pour trouver le deuxième terme, on fait le changement de variable suivant :

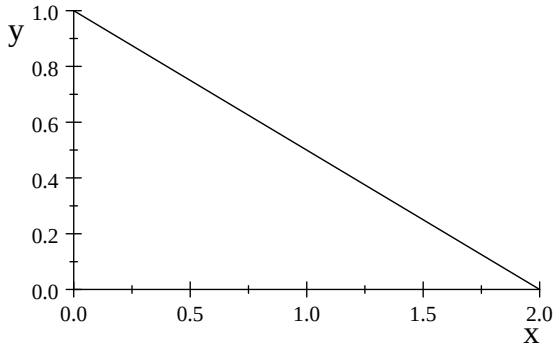
$$Y=y-\frac{1}{4}x \Longrightarrow y=\frac{1}{4}x+Y.$$

Ainsi l'équation s'écrit :

$$\frac{5}{4}x^2+2xY+4Y^2-8Y=0$$

La courbe donnée est caractérisée par les couples :

$\{(2,0),(1,1),(0,2),(0,1)\}$.



le polygone de Newton

Alors l'enveloppe convexe comprend un segment de droite d'équation : $x + 2y = 2$ avec $\mu = 2$ et $(p, q) = (1, 2)$.

donc on a :

$$Y = zx^2 \Longrightarrow \frac{5}{4}x^2 + 2zx^3 + 4z^2x^4 - 8zx^2 = 0$$

On simplifions par x^2on trouve :

$\frac{5}{4} + 2zx + 4z^2x^2 - 8z = 0$ lorsque x tend vert 0 on a :

$$z \simeq \frac{5}{32} \Longrightarrow Y = \frac{5}{32}x^2 \Longrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{32}x^2 + ...$$

Ainsi on a la paramètrisation suivante :

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{4}t + \frac{5}{32}t^2 + ... \end{pmatrix}$$

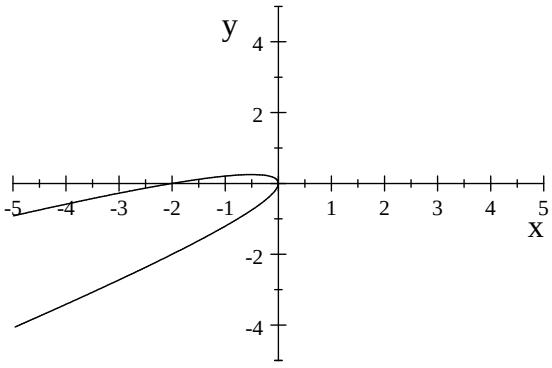
Donc on a une seule branche passante par l'origine et l'origine est un point d'ordre $(1, 2)$, (point birrégulier) avec une courbure égale à :

$$K = 2\frac{|16 + 64|}{(4 + 64)^{\frac{3}{2}}} = \frac{20}{289}\sqrt{17}$$

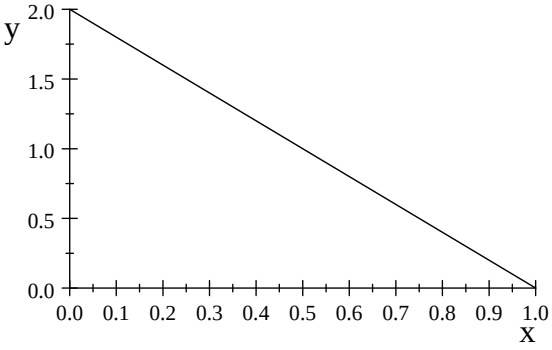
Exemple sur le deuxième cas :

Soit (Γ) une courbe algébrique standard d'équation :

$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x = 0$ avec $a_0 = 1, a_1 = -4, a_2 = 4, a_3 = 2$



Alors la courbe (Γ) de cette équation est caractérisée par les couples :
$\{(2,0),(1,1),(0,2),(1,0)\}$.



le polygone de Newton

Alors l'enveloppe convexe comprend un segment de droite d'équation :
$2x + y = 2$ avec $\mu = \dfrac{1}{2}$ et $(p,q) = (1,2)$.
Donc on a : $x = zy^2$ alors l'équation s'écrit :

$$z^2y^4 - 4zy^3 + 4y^2 + 2zy^2 = 0$$

On simplifions par y^2 on obtient :

$$z^2y^2 - 4zy + 4 + 2z = 0$$

.En tendant y vers 0 on aura : $z = -2$

On cherche alors x sous la forme suivante :

$$x = z(y)y^2 \text{ avec } \lim_{y\to 0} z\,(y) = -2$$

On a :

$$z^2y^2 - 4zy + 4 + 2z = 0 \Longrightarrow (z+2) = 2zy - \frac{1}{2}z^2y^2$$

On a la solution :

$$z(y) = -2 - 4y - 2y^2 \Longrightarrow x = -2y^2 - 4y^3 - 2y^4 + ...$$

Donc on a la paramétrisation suivante :

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t^2 - 4t^3 - 2t^4 + ... \\ t \end{pmatrix}$$

Alors l'origine est un point d'ordre $(1, 2)$ (birrégulier).

Ce qui nous donne une courbure égale à :

$$K = \frac{2}{1}\left|\frac{4}{2}\right| = 4.$$

3.6 Etude des branches infinies des coniques avec l'enveloppe concave .

3.6.1 Rappel :

Dans les mathématiques classiques on a quatre cas de points infinis :

1) $m(x, y)$ est un point infini telle que (x est infini,y est infini) .

2) $m(x, y)$ est un point infini telle que (x est infini,y est fini) .

3) $m(x, y)$ est un point infini telle que (x est fini,y est infini) .

4) $m(x,y)$ est un point infini telle que (x est infini,y indéterminé) . au contraire par exemple $y = \sin x$.

Soit (Γ) une courbe algébrique standard d'équation $F(x,y) = 0$.

D'aprés le théorème des fonctions implcites on a :

Si :

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0 \text{ telle que } m\,(x,y) \text{ est un point infinie dans les 1) cas, ou 2) cas.}$$

Alors il éxiste une fonction $u(x)$ vérifie :

$$\lim_{x\to\infty} u(x) \simeq y \text{ telle } \lim_{x\to\infty} F(x,u(x)) = 0$$

-Soit : $F(x,y) = \sum_{ij} a_{ij}x^i y^j$ avec $a_{ij} \in \mathbb{R}^*$ et les couples (i,j) sont distincts et $\inf(i) = \inf(j) = 0$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} F\,(x,y) &= f_n\,(x,y) + ... + f_m\,(x,y) = 0.....(*) \\ \text{avec } f_k\,(x,y) &= \sum_{i+j=k} a_{ij}x^i y^j \end{aligned}$$

Dans ces conditions, il existe $u(x)$ une fonction réelle vérifiant :

$$\lim_{x\to\infty} u(x) \simeq y \text{ et } \lim_{x\to\infty} F(x,u(x)) = 0$$

-Soit μ est un nombre réel vérifiant :

$$y = u(x) = x^\mu z(x) \text{ avec } : \lim_{x\to\infty} z(x) = z_0 \neq \infty$$

1) $i_1 + \mu j_1 = i_2 + \mu j_2$

2)$i_1 + \mu j_1 \geqslant i + \mu j$ pour tout autre couple (i,j).

-Soit $\gamma > 0$ le plus grand de tout les nombres vérifiant :

$i + \mu j = \gamma$ avec $a_{ij} \neq 0. \left(\gamma = \sup \left\{i + \mu j \text{ telle que } a_{ij} \neq 0\right\}\right).$

Alors l'équation s'écrit :

$$F(x, x^{\mu} z) = \sum_{i+\mu j=\gamma} a_{ij} x^{\gamma} z^{j} + \sum_{i+\mu j<\gamma} a_{ij} x^{i+\mu j} z^{j} = 0$$

On simplifions par x^{γ}on trouve :

$$\sum_{i+\mu j=\gamma} a_{ij} z^{j} + \sum_{i+\mu j<\gamma} a_{ij} x^{i+\mu j-\gamma} z^{j} = 0 \Longrightarrow \Psi(z) = \sum_{i+\mu j=\gamma} a_{ij} z^{j} = 0$$

Lorsque x tend vers ∞ alors :

$$\frac{F(x, x^{\mu} z)}{x^{\gamma}} \simeq \Psi(z)$$

Il est commode de représenter graphiquement ces conditions, en considérant dans le plan $\mathbb{R}^2$ les points (i, j). dire μ vérifie les conditions précédentes signifie que la droite d'équation $u + \mu v = \gamma$ contient au moins deux des points (i, j) et que tous les autres points (i, j) sont sous de cette droite.

On obtient toutes ces droites de la façon suivante :

-On commence par $(0, j_k)$ telle que j_k le plus grand des valeurs de j de les couples (i, j) avec $i = 0$.

Posons $j_k = \sigma_0$,$(i_k = 0)$.

Considérons $u + \mu(v - \sigma_0) = 0$ les droites passent par $(0, \sigma_0)$ puis en éxamine les quotients $\dfrac{i - i_k}{j_k - j} = \dfrac{i}{j_k - j} = \mu$ pour tous les couples (i, j) ou $i > 0$ et $j < j_k$.

-Si μ_1 est le plus grand d'entre eux : $u + \mu_1 (v - \sigma_0) = 0$ est la première à considérer.

-Soit (i_1, j_1) le couple de (i, j) situé sur cette droite telle que i est le plus grand possible.

On considérons cette foit les droites $u - i_1 + \mu (v - j_1) = 0$.

Passant par (i_1, j_1) puis on éxamine les quotion $\dfrac{i - i_1}{j_1 - j}$ pour tous les couples (i, j) ou

$i > i_1$et $j < j_1$.

-Si μ_2 est le plus grand d'entre eux, $u + \mu_2 v = i_1 + \mu_2 j_1$est la deuxiéme droite.

On continue de cette façon j'usqu'an point $(i_r, 0)$ ou $j_r = 0$ et i_r le plus grand des valeurs i de les couples (i, j) avec $j = 0$.

Et on obtient une onveloppe concave qu'on appelle polygone de Newton de r coté de la fonction $F(x, y)$ au voisinage de ∞.

avec r : le nombre de μ.

Remarque :

L'éxistence des branches infinies de la courbe (Γ) d'équation $F(x, y) = 0$ dépend de l'éxistence de la fonction $z(x)$.

-S'il n'éxiste pas la fonction $z(x)$ qui vérifie $y = x^{\mu} z(x)$ au voisinage de l'infinie alors il existe pas des branches infinies on a donc (Γ) est une courbe standard fermée.

3.6.2 Application de la méthode polygonale de Newton sur les coniques :

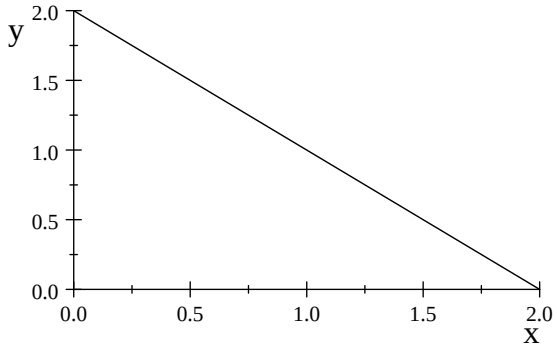
Soit (Γ) une courbe algébrique standard d'équation :

$$a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2 + a_3 x + a_4 y + a_5 = 0.....(1)$$

La courbe (Γ) d'équation (1) est caractérisée par les couples :

$\{(2,0), (1,1), (2,0), (1,0), (0,1), (0,0)\}$.

On commence par le point $(0, 2)$ et posons $\sigma_0 = 2$.



le polygone de Newton

Les droite qui passent par $(0,2)$ sont définies comme suit : $x+\mu(y-2)=0$.

Aprés on éxamine les quotients $\dfrac{i}{2-j}=\mu$ ou $i\rangle\ 0$ et $j\ <\ 2$. on trouve que $\mu_1=1$.

Alors l'enveloppe concave comprend un segment de droite d'équation $x+y=2$.

On a alors :

$$y=z(x)x\simeq z_0x \text{ avec } z_0=\lim_{x\to\infty} z\,(x)$$

Alors l'équation s'écrit :

$$a_0x^2+2a_1zx^2+a_2z^2x^2+a_3x+a_4zx+a_5=0.....(2)$$

$$\Longrightarrow x^2\left(a_0+2a_1z+a_2z^2+\frac{a_3}{x}+\frac{a_4}{x}+\frac{a_5}{x^2}\right)=0$$

On simplifions par x^2 et lorsque x tend vers ∞ on trouve que :

$$a_0+2a_1z+a_2z^2=0..... (**)$$

1) Si $a_2\neq 0$ et $a_0\neq 0$.

Alors l'équation $(**)$ est une équation de deuxieme ordre de variable z donc :

$\Delta=a_1^2-a_0a_2$ il y a trois cas de l'existence des solutions de l'équation $(**)$:

1) Si $\Delta<0$ il n'existe pas des solutions d'équation $(**)$ alors (Γ) ne possède pas des bronches infinies.

- Dans ce cas la courbe (Γ) est une courbe fermé.

ou (Γ) est une éllipse.

2) Si $\Delta = 0$ alors l'équation $(**)$ à une solution multiple :

$$z_0 = -\frac{a_1}{a_0} \text{ telle que } a_0 \neq 0.$$

Alors l'équation (2) s'écrit :

$$x^2 a_2 \left(z + \frac{a_1}{a_2} \right)^2 = -a_3 x - a_4 z x - a_5$$

En divisant par $x^2 a_2$ on trouve :

$$\left(z + \frac{a_1}{a_2} \right)^2 = -\frac{a_3 + a_4 z}{a_2} \frac{1}{x} - \frac{a_5}{x^2}$$

L'orsque x tend vers ∞ on obtient : $z_0 = -\dfrac{a_1}{a_2}$ alors il y a une bronche infinie.
Dans ce cas la courbe (Γ) est une parabole.

3) Si $\Delta > 0$ alors l'équation $(**)$ possède deux solutions z_0,z_1 telle que :

$$z_0 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{a_2} \text{ et } z_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{a_2}$$

Alors l'équation (2) s'écrit :

$$x^2 . a_2 \left(z - z_0 \right) \left(z - z_1 \right) = -a_3 x - a_4 z x - a_5$$

On division par $a_2 x^2$ on trouve :

$$\left(z - z_0 \right) \left(z - z_1 \right) = -\frac{a_3 + a_4 z}{a_2} \frac{1}{x} - \frac{a_5}{x^2}$$

Donc finalement on trouve :

$$\begin{aligned} z &= z_0 - \frac{a_3 + a_4 z_0}{a_2 (z_0 - z_1)} \frac{1}{x} - \frac{a_5}{(z_0 - z_1)} \frac{1}{x^2} \\ \text{ou } z &= z_1 - \frac{a_3 + a_4 z_1}{a_2 (z_1 - z_0)} \frac{1}{x} - \frac{a_5}{(z_1 - z_0)} \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} y &= z_0 x - \frac{a_3 + a_4 z_0}{a_2 (z_0 - z_1)} - \frac{a_5}{(z_0 - z_1)} \frac{1}{x} \\ \text{ou } y &= z_1 x - \frac{a_3 + a_4 z_1}{a_2 (z_1 - z_0)} - \frac{a_5}{(z_1 - z_0)} \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Donc dans ce cas la droite (Δ_1) d'équation $y = z_0 x - \dfrac{a_3 + a_4 z_0}{a_2 (z_0 - z_1)}$ et la droite (Δ_2) d'équation $y = z_1 x - \dfrac{a_3 + a_4 z_1}{a_2 (z_1 - z_0)}$ se sont des droites asymptotiques de la courbe (Γ) au voisinage de l'infini.

Alors il existe deux branches infinies où la courbe (Γ) est une hypèrbole.

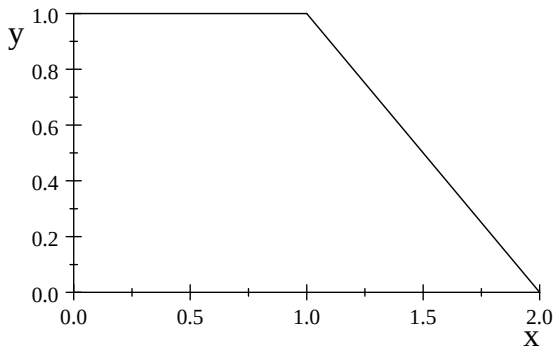
2) Si $a_2 = 0$ et $a_0 \neq 0$:

Alors l'équation de (Γ) s'écrit :

$$a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_3 x + a_4 y + a_5 = 0$$

La courbe (Γ) est caractérisée par les couples :

$\{(2,0), (1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$



Alors l'enveloppe concave de polygone de Newton comprend deux segments des droites d'équations respectivent :

$$\begin{cases} x+y=2 \text{ avec } \mu=1 \\ y=1 \text{ avec } \mu=\infty \end{cases}$$

Etude suivant le segment : $x+y=2$.

Dans ce cas on a :$y=z(x)x$ en reportant cette éxpression dans l'équation de la courbe (Γ) :

$$a_0x^2+2a_1x^2z+a_3x+a_4zx+a_5=0$$

On divisions par x^2 on trouve :

$$a_0+2a_1z+\frac{a_3+a_4z}{x}+\frac{a_5}{x^2}=0$$

et par passage a l'ombre on trouve :z_0

$$a_0+2a_1z_0=0 \Longrightarrow z_0=-\frac{a_0}{2a_1}$$

Donc l'équation précédante s'écrit :

$$z=-\frac{a_0}{2a_1}-\frac{a_3+a_4z}{2a_1x}-\frac{a_5}{2a_1x^2} \Longrightarrow y=-\frac{a_0}{2a_1}x-\frac{a_3+a_4z_0}{2a_1}-\frac{a_5}{2a_1x}$$

Alors on obtient: la droite d'équation

$$y=-\frac{a_0}{2a_1}x-\frac{a_3+a_4z_0}{2a_1}$$

est une droite asymptotique de la courbe (Γ).

Etude suivant le segment : $y=1$ avec $\mu=+\infty$.

Alors le point infini qui on trouve est de classe : (x fini, y infini) .

Alors l'équation de la courbe (Γ) s'écrit :

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_3x + a_4y + a_5 = 0$$

On division par y on a :

$$\frac{a_0x^2}{y} + 2a_1x + \frac{a_3x}{y} + a_4 + \frac{a_5}{y} = 0$$

Lorsque y tend vers ∞ on a :

$$2a_1x + a_4 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{a_4}{2a_1}$$

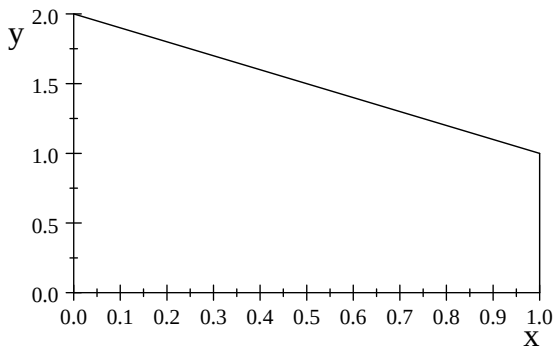
Alors la droite d'équation $x = -\frac{a_4}{2a_1}$ est une droite asymptotique de la courbe (Γ).
Donc il existe deux branches infinies de la courbe (Γ) alors la courbe est une hyperbole.

3) si $a_2 \neq 0$ et $a_0 = 0$: l'équation s'écrit :

$$2a_1xy + a_2y^2 + a_3x + a_4y + a_5 = 0.$$

La courbe (Γ) est caractérisée par les couples :

$\{(1,1),(0,2),(1,0),(0,1),(0,0)\}$:



le polygone de Newton

Alors l'enveloppe concave comprend deux segments des droites d'équations respecti-

vement :

$$\begin{cases} x+y=2 \text{ avec } \mu=1 \\ x=1 \text{ avec } \mu=0 \end{cases}$$

Etude suivant le segment : $x+y=2$.

Dans ce cas on a $y=zx$ en reportant cette exprssion dans l'équation de la courbe (Γ) on a :

$$2a_1x^2z+a_2z^2x^2+a_3x+a_4zx+a_5=0.$$

On division par x^2

$$2a_1z+a_2z^2+\frac{a_3}{x}+\frac{a_4z}{x}+\frac{a_5}{x^2}=0$$

Lorsque x tend vers ∞ on trouve : $2a_1z+a_2z^2=0$.

On a alors : $z_0=-\dfrac{2a_1}{a_2}$ en reportant cette expression dans l'équation on trouve :

$$\begin{aligned} z+\frac{2a_1}{a_2} &= -\frac{a_3}{xa_2z}-\frac{a_4z}{xa_2z}-\frac{a_5}{a_2zx^2} \\ &\Longrightarrow \quad z=-\frac{2a_1}{a_2}-\frac{a_3}{xa_2z_0}-\frac{a_4z_0}{xa_2z_0}-\frac{a_5}{a_2z_0x^2} \\ &\Longrightarrow \quad y=-\frac{2a_1}{a_2}x-\frac{a_3+a_4z_0}{a_2z_0}-\frac{a_5}{a_2z_0x} \end{aligned}$$

Alors la droite d'équation $y=-\dfrac{2a_1}{a_2}x-\dfrac{a_3+a_4z_0}{a_2z_0}$ est une droite asymptotique de la courbe (Γ).

Etude suivant le segment $x=1$ avec $\mu=0$

Alors le point infini qu'on trouve est de classe :(x infini,y fini)

Alors l'équation de la courbe (Γ) s'écrit :

$$2a_1xy+a_2y^2+a_3x+a_4y+a_5=0$$

En divisant par x on trouve :

$$2a_1y + \frac{a_2y^2}{x} + a_3 + \frac{a_4y}{x} + \frac{a_5}{x} = 0$$

Lorsque x tend vers ∞ on trouve : $2a_1y + a_3 = 0 \Longrightarrow y = -\frac{a_3}{2a_1}$.

Alors la droite d'équation $y = -\frac{a_3}{2a_1}$ est une droite asymptotique de la courbe (Γ).

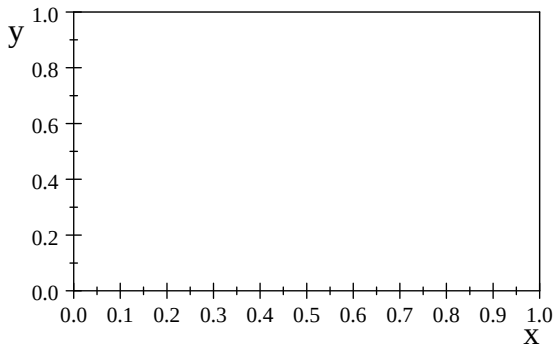
Donc il existe deux branches infinies de la courbe (Γ) alors la courbe est une hypèrbole.

4) Si $a_2 = 0$ et $a_0 = 0$ avec $a_1 \neq 0$ alors l'équation s'écrit :

$$2a_1xy + a_3x + a_4y + a_5 = 0.$$

Donc la courbe (Γ) est caractérisée par les couples :

$\{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$.



le polygone de Newton

Alors l'enveloppe concave comprend deux segments des droites d'équations respectivement :

$$\begin{cases} x = 1 \text{ avec } \mu = 0 \\ y = 1 \text{ avec } \mu = \infty \end{cases}$$

Etude suivant le segment : $x = 1$ avec $\mu = 0$.

Alors le point infini qu'on trouve est de classe :(x infini, y fini)

Alors l'équation de la courbe (Γ) s'écrit :

$2a_1xy + a_3x + a_4y + a_5 = 0$.

Par division par x on trouve :

$$2a_1y + a_3 + \frac{a_4y}{x} + \frac{a_5}{x} = 0$$

Lorsque x tend vers ∞ on a :

$$2a_1y + a_3 = 0 \Longrightarrow y = -\frac{a_3}{2a_1}$$

Alors la droite d'équation $y = -\frac{a_3}{2a_1}$ est une droite asymptotique de la courbe (Γ).
Etude suivant le segment : $y = 1$.

Alors le point infinie qui on trouve est de classe :(x fini, y infini)

Alors l'équation de la courbe (Γ) s'écrit :

$$2a_1xy + a_3x + a_4y + a_5 = 0.$$

Pardivision par y on trouve :

$$2a_1x + a_4 + \frac{a_3x}{y} + \frac{a_5}{y} = 0$$

Lorsque y tend vers ∞ on trouve :

$$2a_1x + a_4 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{a_4}{2a_1}$$

Alors la droite d'équation $x = -\frac{a_4}{2a_1}$ est une droite asymptotique de la courbe (Γ).
Donc il éxiste deux branches infinies de la courbe (Γ) alors la courbe est une hyperbole.

Remarque :

dans tout les cas précedantes on trouve que :

-*i*) Si $\Delta < 0$ on obtient une ellipse.

-*ii*) Si $\Delta = 0$ on obtient une parabole.

-*iii*) Si $\Delta > 0$ on obtient une hyperbole.

3.7 Etude des branches infinies avec la méthode non standard :

3.7.1 Ordre d'un point à l'infini et sa courbure généralisée :

Soit (Γ) une courbe algébrique standard, M est un point à l'infini de (Γ) avec la décomposition suivante :

$$M = \frac{1}{\varepsilon_2}\overrightarrow{V_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\overrightarrow{V_2}$$

$\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\right)$ est une base orthonormée et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux infinitésimaux.

On sait qu'il existe un couple d'entiers positifs (α, β) premiers entre eux, telle que le rapport $\left(\frac{\varepsilon_1^\alpha}{\varepsilon_2^\beta}\right)$ soit appréciable i.e, (il existe γ appréciable telle que $\frac{\varepsilon_1^\alpha}{\varepsilon_2^\beta} = \gamma$.

On a alors trois possibilités

i) $\alpha < \beta$: si on pose $X = \varepsilon_2$ et $Y = \varepsilon_1$, par permanence , on a alors la courbe d'equation $Y^\alpha = \gamma X^\beta$

Alors l'infini est un point d'ordre (α, β) est sa courbure généralisée est égale à :

$$K_g = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \ {}^0\left|\frac{\varepsilon_1^\alpha}{\varepsilon_2^\beta}\right|$$

ii) $\alpha > \beta$: avec le même procédé, on a la courbe d'équation $X^\beta = \frac{1}{\gamma}Y^\alpha$.

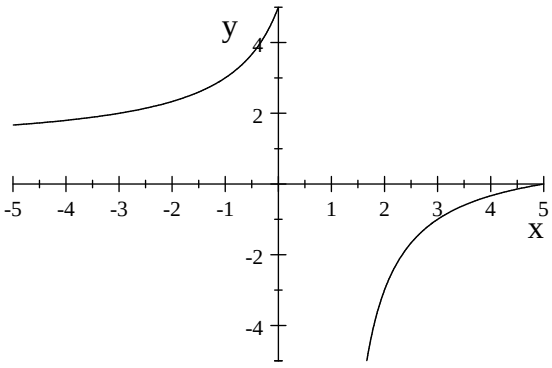
Alors l'infini est un point d'ordre (β, α) est sa courbure généralisée est égale à :

$$K_g = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \ {}^0\left|\frac{\varepsilon_2^\beta}{\varepsilon_1^\alpha}\right|$$

iii) $\alpha = \beta = 1$: dans ce cas on fait le changement de variable suivant : $Y = \gamma X + Z.$, on a une nouvelle fonction $G(X, Z) = 0$ on procède alors par itération.

Exemple 1 : Soit la courbe algébrique standard (Γ) définie par

$$xy - x - y + 5 = 0$$



M est un point infini, alors on a la décomposition suivante :

$$M = \frac{1}{\varepsilon_2}\overrightarrow{V_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\overrightarrow{V_2}$$

On trouve $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, on a alors $\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ou $\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ alors il y a deux branches infinies des directions $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

1) Soit M est un point infini de direction $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ alors $M = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\\ \frac{1}{\varepsilon_2}\end{pmatrix}$.

En reportant ces valeurs dans l'equation de (Γ) on trouve :

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \varepsilon_1 - 1 + 5\varepsilon_2 = 0$$

Par passage à l'ombre on obtient :

$$^0\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) = 1$$

Alors la droite d'équation $x = 1$ est une droite asymptote de la courbe (Γ).

Pour calculer la courbure généralisée à l'infini on fait le changement de variable suivant (par construction)

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X}{Y} \\ \frac{1}{Y} \end{pmatrix}$$

Soit la nouvelle courbe (C) dont on ce propose d'étudier l'ordre et la courbure à l'origine :

$$-XY + 5Y^2 + X - Y = 0$$

Alors la courbe (C) est une conique qui passe à l'origine (précédement on trouve)

$(1, 2)$ l'ordre de l'origine de la courbe (C) où l'infin est un point birégulier de la courbe (Γ).

Et la courbure généralisée de l'infini est égale à la courbure à l'origine de la courbe (C)

Alors

$$K_g = 2 \left| \frac{4}{2^{\frac{3}{2}}} \right| = 2\sqrt{2}$$

1) Soit M est un point infini de direction $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_2} \\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \end{pmatrix}$.

En reportant ces valeurs dans l'equation de (Γ) on trouve :

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1 - \varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 = 0$$

Par passage à l'ombre on obtient :

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1$$

Alors la droite d'équation $y = 1$ est une droite asymptote de la courbe (Γ).

Pour calculer la courbure généralisée à l'infini on fait le changement de variable suivant (par construction) :

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Y} \\ \frac{X}{Y} \end{pmatrix}$$

On trouve la même courbe précédente(C) :

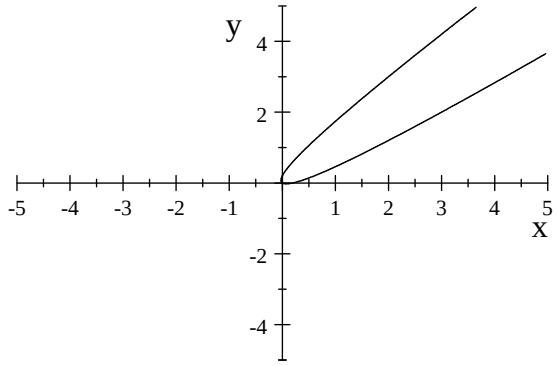
$$-XY + 5Y^2 + X - Y = 0$$

Alors l'infini est un point d'ordre $(1, 2)$ (birégulier) et sa courbure généralisée est égale à :

$$K_g = 2 \left| \frac{4}{2^{\frac{3}{2}}} \right| = 2\sqrt{2}$$

Exemple 2 : Soit la courbe algébrique standard (Γ) définie par :

$$5x^2 - 10xy + 5y^2 - x - y = 0$$



M est un point infini, alors on a la décomposition suivante :

$$M = \frac{1}{\varepsilon_2}\overrightarrow{V_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\overrightarrow{V_2}$$

On trouve $\overrightarrow{V_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \end{pmatrix}$

En reportant ces valeurs dans l'equation de (Γ) on trouve :

$$10\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2} - \sqrt{2} = 0 \Longrightarrow \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

Alors l'infini est un point d'ordre $(1, 2)$ (birégulier) et sa courbure généralisée est égale à :

$$K_g = \left(\frac{1}{2}\right) \left|\frac{10}{\sqrt{2}}\right| = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

3.8 Conclusion :

tout les points finis ou infinis des coniques sont biréguliers.

Bibliographie.

[1] F. Diener et G.Reeb, cours d'analyse non standard, Hermann, paris 1989.

[2] F. Diener, cours d'analyse non standard , OPU,198.

[3] A. Robinson, Non standard analysis, Koninhl. Ned. Akad. Wetensch. proc. Ser. A64, 1961, pp 432-440.

[4] E. Nelson : Internal Set Theory. bull. Amer. Math. Soc 83 (1977) .

[5] M. Goze : Etude locale de la variété des lois d'algébre de lie. mulhouse 1982.

[6] M. Hannachi : Invarients métriques associées au points singuliers d'une courbe réelle, IRMA Strasbourg, 1985.

[7] M. Hannachi : Enveloppes, coniques et développées, Maghreb mathematical review, vol 5, n^0 1 et 2, 1996, pp.47-55.

[8] M. Hannachi : Invariants métriques associées au points singuliers à distance finie ou infinie, d'une courbe réelle, Thèse de doctorat d'état, Setif , 1996.

[9] M. Hannachi : Généralisation de la notion de courbure, rendiconti séminario, facolta sciences, Universita Gagliari, vol 70, 2000, pp 43-50.

[10] Hannachi Messaoud ; Mezaghcha, Khelifa : Formules du repère mobile. (French) [Moving-frame fomulas]Maghreb Math. Rev. 3 (1994) n^0 2, 121-129.

[11] M. Hannachi , K. Mezaghcha : Invariants métriques associés à une courbe holomorphe, Maghreb Mathematical Review, Vol 3 $n^0$3, 1994, pp.65-68.

[12] Mezaghcha , Khelifa : Etude dans le halo d'un point standard d'une courbe réelle. (french) [Study of a real curve in the halo of a standard point] Maghreb Math. Rev. 5 (1996), n^0 1-2, 123-128.

[13] M. Hannachi, K. Mezaghcha : Généralisation de la notion de torsion. (french) [Generalization of the notion of torsion] An. univ. Oradea Fasc. Mat. 10 (2003), 171-184 (2004).

[14] K. Mezaghcha : Etude en un point quelconque d'une courbe réelle et une généralisation des formules du repère mobile, Thèse de magister, Université Ferhat

Abbas,Setif, (21/12/1995).

[15] M. Hannachi : Courbure généralisée ou finesse d'une courbe plane . Analyse non standard et représentation du réel. Actes de l'école d'été O P U (Alger) C N R S (Paris) 1985.

[16] Khelifa Mezaghcha : Application de l'analyse non standard aux courbes et surfaces. Thèse de Doctorat d'état, Université Ferhat Abbas, Setif (2008).

[17] J. Dieudonné : Calcul infinitésimal. Paris : Hermann, (1980).

[18] Guy. Laville : Courbes et surfaces. Paris (2004).