REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'Obtention du Diplôme

MAGISTER

Option : Algèbre et Géométrie

Par

Mlle. Mounia BOUCHELAGHEM

THEME

Conditions sur les parties infinies, pour qu'un groupe infini appartienne à une variété de groupes définie par un mot puissance

Soutenu le

Devant le jury

Président :	Dr	M.KRACHNI	M.C Université Ferhat Abbas	Setif
Rapporteur :	Dr	A. BOUKAROURA	M.C Université Ferhat Abbas	Setif
Examinateurs :	Dr	B.DAOUD	M.C Université Ferhat Abbas	Setif
	Dr	M.KERADA	M.C Université AbdelhakBenhamouda	Jijel

Remerciements

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et les plus sincères à Monsieur Ali Boukaroura qui a dirigé ce travail avec gentillesse et efficacité. Je le remercie aussi pour les corrections qu'il a apportées à ce mémoire et les précieux conseils qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail.

Je remercie chaleureusement Monsieur Mustapha Krachni pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Messieurs Mohamed Kerrada et Bounabi Daoud pour avoir bien voulu s'intéresser à mon travail et accepter de faire partie du jury.

Je remercie également mes parents qui m'ont encouragée à terminer ce mémoire.

ملخص .

هدف هذا العمل هو تعميم لزمرة غير منتهية G لنتيجتين و جدتا من طرف Corsi Tani و Bonafede حول بنية زمرة التماثلات الناطقة و القابلة للقلب لنفس الزمرة G ، عندما تكون هذه الزمرة عديمة القوة و الشرط الذي يجب أن تحققه زمرة ما كي يكون مجموع التشاكلات الداخلية لهذه الزمرة تشاكلا ناطقا و قابلا للقلب .

الكلمات و الجمل المهمة : تطبيقات ناطقة ، تماثلات ناطقة زمر n – آبلية و زمر 2 – أنڤل.

تصنيف أمريكي للمواضيع : 20E36 ؛ 20E45

Abstract .

The aim of this word is the generalization to an infinite group G of two results obtained by Corsi Tani and Bonafede about the structure of the invertible rational endomorphisms of G when G is nilpotent and the condition which must satisfy a group G for that the sum of inner automorphisms of this group is an invertible rational automosphism of G .

Key words and phrases : rational functions , rational endomorphisms , generalized n - abelian groups , 2 – Engel groups .

Mathematics Subject Classification : 20E36 ; 20E45 .

Résumé .

L'objet de ce travail est la généralisation à un groupe infini de deux résultats obtenus par Corsi Tani et Bonafede sur la structure du groupe des endomorphismes rationnels inversibles de G lorsque G est nilpotent et la condition que doit vérifier ce même groupe G pour qu'une somme d'automorphismes intérieur de ce groupe soit un automorphisme inversible de G .

Mots et Phrases Clés : Applications rationnelles , endomorphismes rationnels , groupes n – abéliens généralisés , groupes 2 – Engel .

Mathematics Subject Classification : 20E36 ; 20E45 .

Abstract

Let $\omega(x_1, ..., x_n)$ be a word in the free group of rank $n > 0$, $\mathcal{V}(\omega)$ be the variety of groups defined by the law $\omega = \omega(x_1, ..., x_n) = 1$, and let $\mathcal{V}(\omega^*)$ be the class of all groups G in which for every infinite subsets $X_1, ..., X_n$ there exist $a_1 \in X_1, ..., a_n \in X_n$ such that $\omega(a_1, ..., a_n) = 1$. Longobardi et al., [27] posed the question whether every infinite $\mathcal{V}(\omega^*)$-group is a $\mathcal{V}(\omega)$-group. The origin of this question is an ansewer of B.H. Neuman to a question of P. Erdös.
In fact B.H. Neumann proved that an infinite group G is center-by-finite if and only if every infinite subset of G contains two distinct commuting elements. Since this result, problem of similar nature have been the object of many papers. We present in this thesis some further results of the same type.
In this work, we consider the words:

$$u_{n_1,n_2}(x, y) = [x^{n_1}, y^{n_2}] \text{ and } w_{n,n_1,\cdots,n_r}(x_1, \ldots, x_r) = (x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r})^n .$$

Then our mains results are the following:

- *If* $n_2 \equiv 0\,[n_1]$ *and* $n_2 \in \left\{3, 6, 2^k : k \in \mathbb{N}^*\right\}$, *then every infinite* $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x, y)^*)-$*group is* $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x, y)) -$ *group.*
- *If* $n_1, \ldots, n_r \in \left\{2^k : k \in \mathbb{N}^*\right\}$, *then every infinite group is a* $\mathcal{V}(w_{2,n_1,\cdots,n_r}(x_1, \ldots, x_r)) -$ *group.*

Résumé

Soient $\omega(x_1, ..., x_n)$ un mot dans le groupe libre de rang $n > 0$, $\mathcal{V}(\omega)$ la variété de groupes définie par la loi $\omega = \omega(x_1, ..., x_n) = 1$ et soit $\mathcal{V}(\omega^*)$ la classe de tous les groupes G tels que si $X_1, ..., X_n$ sont des parties infinies de G, il existe $a_1 \in X_1, ..., a_n \in X_n$ vérifiant $\omega(a_1, ..., a_n) = 1$. Il est clair que $\mathcal{F} \cup \mathcal{V}(\omega) \subset \mathcal{V}(\omega^*)$, $\mathcal{F}$ étant la classe des groupes finis.
En 1992 Longobardi et al [27] , s'inspirant du problème de P. Erdös ont posé la question suivante. *Pour quel mot $\omega(x, ..., x_n)$ a-t-on tout $\mathcal{V}(\omega^*)-$groupe infini est un $\mathcal{V}(\omega)-$groupe?*
B.H. Neumann a montré qu'un groupe infini dont toute partie infinie contient une paire d'éléments qui commutent est une extension finie de son centre. Depuis une série du résultats de même type ont été obtenus. Dans cette thèse nous ajoutons d'autres résultats de ce même type.
Dans ce travail, on considère:

$$u_{n_1,n_2}(x, y) = [x^{n_1}, y^{n_2}] \text{ et } w_{n,n_1,\cdots,n_r}(x_1, \ldots, x_r) = (x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r})^n .$$

Nos principaux résultats sont les suivants:

• *Si $n_2 \equiv 0\,[n_1]$ et $n_2 \in \left\{3, 6, 2^k : k \in \mathbb{N}^*\right\}$, alors tout $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x, y)^*)-$groupe infini est un $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x, y) -$ groupe.*

• *Si $n_1, \ldots, , n_r \in \left\{2^k : k \in \mathbb{N}^*\right\}$, alors tout $\mathcal{V}(w_{2,n_1,\cdots,n_r}(x_1, \ldots, x_r)^*) -$ groupe infini est un $\mathcal{V}(w_{2,n_1,\cdots,n_r}(x_1, \ldots, x_r) -$ groupe.*

ملخص:
في سنة 1992 لو نقباردي و ماج و رحمة الله بالاستوحاء من مسألة إيغدوش اعتبروا المسألة التالية:من أجل أية كلمة $\omega(x_1,\ldots,x_n)$ كل $V(\omega^*)$- زمرة غير منتهية تكون $V(\omega)$-زمرة. نيومان بين أن كل زمرة غير منتهية تحقق من أجل كل X_1، X_2 مجموعتان جزئيتان غير منتهيتان من الزمرة يوجد $X_1 \ni a_1, X_2 \ni a_2$ بحيث a_2, a_1 يتبادلان تكون مركز بواسطة منتهية.بالإضافة إلى سلسلة من نتائج كثيرة وجدت من نفس النوع .في هذه المذكرة نضيف نتائج أخرى من هذا النوع.النتائج الأساسية هي: إذا كان $n_2 \equiv 0[n_1]$ و $n_2 \ni \{IN^* \ni k:3,6,2^k\}$ فان $V([x^{n_1}, y^{n_2}]^*)$- زمرة غير منتهية تكون $V([x^{n_1}, y^{n_2}])$-زمرة. إذا كان $n_r \cdots n_1 \ni \{IN^* \ni k:2^k\}$ إذن $V\left((x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r})^2\right)^*$ - زمرة غير منتهية تكون $V\left((x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r})^2\right)$ زمرة.

كلمات و جمل الفاتحة: مجموعة غير منتهية، كلمة، زمرة غير منتهية، متنوعة الزمر
تصنيف أمريكي للمواضيع : 20E45, 20E36

Résumé

En 1992 Longobardi, Maj et Rhemtolla s'inspirant du problème de P.Erdos ont posé la question suivante : pour quel mot $\omega(x_1,\ldots,x_n)$ a-t-on tout $V(\omega)^*$-groupe infini est un $V(\omega)$-groupe B.H .Neumann a montré qu'un groupe infini dont toute partie infinie contient une paire d'éléments qui commutent est une extension finie de son centre. De puis une série de résultats du même type ont été obtenus. Dans cette thèse nous ajoutons d'autres résultats de ce même type. Dans ce travail, on considère : si $n_2 \equiv 0[n_1]$ et $n_2 \in \{3,6,2^k : k \in N^*\}$ alors tout $V\left([x^{n_1}, y^{n_2}]^*\right)$ -- groupe infini est un $V\left([x^{n_1}, y^{n_2}]\right)$ -groupe et si $n_1 \cdots n_r \in \{6,2^k : k \in N^*\}$, alors tout $V\left(\left((x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r})^2\right)^*\right)$ -groupe est un $V\left((x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r})^2\right)$-groupe.

Mots et Phrases Clés : Ensemble infini, mot, groupe infini, variété de groupe
Classification Subjective Mathématique : 20E36; 20E45.

Abstract

In 1992, Longobardi posed the question whether every infinite $V(\omega^*)$-group is a $V(\omega)$-group. The origin of this question is an answer of B.H.Neuman to a question of P. Erdos. In fact B.H. Neumann proved that an infinite group G is center-by-finite if and only if every infinite subset of contains two distinct commuting elements. Since then, similar results are obtained. In this thesis, we present in this thesis some further results of the same type. Our main results are then: if $n_2 \equiv 0[n_1]$ and $n_2 \in \{3,6,2^k : k \in N^*\}$, then every infinite $V([x^{n_1}, y^{n_2}]^*)$-group is a $V([x^{n_1}, y^{n_2}])$- group and if $n_1 \cdots n_r \in \{6,2^k : k \in N^*\}$, then every infinite $V(((x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r})^2)^*)$-group is a $V((x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r})^2)$-group.

Keywords and phrases: Infinite set, word, infinite group, variety of groups

Mathematics Subject Classification: 20E36; 20E4

Notation.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

Soient G un groupe arbitraire, $n \in \mathbb{N}^*$, et x, y deux éléments de G. On utilisera les notations suivantes:
$x^y = y^{-1}xy$.
$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.
$C_G(x) = \{g \in G \ / \ xg = gx\}$, le centralisateur de x dans G.
$Z(G) = \{g \in G \ / \ xg = gx; \ \forall x \in G\}$, le centre de G.
Soient X, Y des parities non vides d'un groupe G, $Y^x = \{y^x / \ y \in Y\}$.

$\mathcal{V}(\omega)$ une variété de groupes définie par ω.
S_n le groupe de permutation .
$FC(G)$ le FC - centre de G

Table des matières

Introduction **8**

1 Notions Fondamentales **10**

1.1 Introduction 10
1.2 Notions élémentaires 12
1.3 Classes de groupes et propriétés de groupes 19
1.4 Groupes libres et variétés de groupes. 21
1.5 FC-groupes 31

2 Quelques conditions pour qu'un groupe infini de $\mathcal{V}(\omega^*)$ soit un $\mathcal{V}(\omega)$-groupe **36**

2.1 Introduction 36
2.2 Condition sur un groupe infini de $\mathcal{V}(\omega^*)$ pour qu'il soit dans $\mathcal{V}(\omega)$ 37
2.3 Condition combinatoire pour qu'un groupe infini soit un $\mathcal{V}(x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r})$ -groupe 42

3 Conditions combinatoires pour qu'un groupe infini appartienne à certaines variétés de groupes **48**

3.1 Introduction 48
3.2 Conditions combinatoires pour qu'un groupe appartienne à la variété de

groupes $\mathcal{V}([x^{n_1}, y^{n_2}])$ 50

3.3 Conditions combinatoires pour qu'un groupe appartienne à la variété de groupes $\mathcal{V}((x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r})^2)$ 58

Introduction

Soient $\omega(x_1, ..., x_n)$ un mot dans le groupe libre de rang $n > 0$ et $\mathcal{V}(\omega)$ la variété de groupes définie par la loi $\omega(x_1, ..., x_n) = 1$; notons $\mathcal{V}(\omega^*)$ la classe des groupes G tels que si $X_1, ..., X_n$ sont des parties infinies de G, alors il existe $a_1 \in X_1, ..., a_n \in X_n$ vérifiant $\omega(a_1, ..., a_n) = 1$. Il est clair que $\mathcal{F} \cup \mathcal{V}(\omega) \subset \mathcal{V}(\omega^*)$ où $\mathcal{F}$ est la classe des groupes finis.

Dans ce mémoire on s'intéresse au problème posé par P. Longobardi, M. Maj et A.H. Rhemtulla (1992), qui ont considéré le problème suivant : [27] :

' A-*t-on l'égalité* $\mathcal{F} \cup \mathcal{V}(\omega) = \mathcal{V}(\omega^*)$? *Quel que soit le mot* ω '

Ce problème peut se reformuler de la manière suivante :

'*Un* $\mathcal{V}(\omega^*)-$*groupe infini,est-il nécessairement un* $\mathcal{V}(\omega)-$*groupe ? Quel que soit le mot* ω '

Apparemment, il n'existe aucun exemple d'un $\mathcal{V}(\omega^*)-$groupe infini qui n'est pas dans $\mathcal{V}(\omega)$, cela laisse à espérer que la réponse à ce problème est positive. C'est en quête d'une confirmation de cette réponse, que beaucoup de résultats ont été obtenus, dans des cas particuliers.

L'égalité $\mathcal{V}(\omega^*) = \mathcal{F} \cup \mathcal{V}(\omega)$ a lieu dans certaines classes de groupes ainsi que pour des mots bien détérminés. Voir ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [36], [43], [44], [39], [15], [16], [17], [18], [19], [20],

[40], [41], [42],...)

Notre travail constitue une contribution dans le même sens, en ajoutant à cette longue liste de mots, d'autres mots qui présentent un intérêt particulier et qu'on trouve dans les ouvrages classiques de la théorie des groupes, notamment celui de H. Neumann [35].

Au premier chapitre, on rappelle certaines généralités de la théorie des groupes ; ceci offre une posibilité de lecture de ce mémoire sans présupposer, nécessairement, une connaissance 'spécialisée' en théorie des groupes.

Dans le second chapitre nous revenons, en détail, sur les principaux résultats déjà établis et qui représentent des outils fondamentaux pour la démonstration de nos propres résultats.

Dans la première partie du troisième chapitre nous démontrons que si $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$n_2 \equiv 0\,[n_1]$

$\mathcal{B}_{n_2} \leq \mathfrak{L}$

Alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{V}([x^{n_1}, y^{n_2}]) = \mathcal{V}([x^{n_1}, y^{n_2}]^*)$. En pariculier, si $n_2 \equiv 0\,[n_1]$ et $n_2 \in \{3, 6, 2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$, alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{V}([x^{n_1}, y^{n_2}]) = \mathcal{V}([x^{n_1}, y^{n_2}]^*)$.

$\mathfrak{L}$ étant la classe de groupes vérifiant :

" *Tout sous-groupe infini d'un $\mathfrak{L}$-groupe contient un sous-groupe abélien infini* "

Ce résultat nous permet de démontrer, dans la deuxième partie de ce même chapitre, que $\mathcal{F} \cup \mathcal{V}\,[(x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_r^{n_k})^2] = \mathcal{V}\,[((x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k})^2)^*]$.

Notons que certains de nos résultats ont été soumis pour publication.

Chapitre 1

Notions Fondamentales

1.1 Introduction

Les groupes sont un des principaux types de structure algébrique, et la théorie des groupes, un des chapitres de base de l'algèbre comtemporaine. Il a fallu plusieurs générations de mathématiciens, plus de cent ans au total, pour que le concept de groupe devienne aussi limpide qu'aujourd'hui. De LAGRANGE qui se sert intuitivement des groupes de permutations pour résoudre les équations algébriques par radicaux (1771), jusqu'à EVARISTE GALOIS qui utilise déjà à bon escient l'idée d'un groupe (et qui intdroduit d'ailleurs le terme). Les groupes apparaissent aussi en géometrie au milieu du XIX^e siècle. La troisième source de la notion de groupe est la théorie des nombres.

A la fin du XIX^e siècle, des mathématiciens tels que CAYLEY, FROBENUS, VOV DYCK ont crée la notion moderne de groupe abstrait. L'étude des groupes, libérée de l'impératif de la finitude et indéférente à la nature des éléments, devient une discipline mathématique à part entière avec la parution de la Théorie abstraite des groupes de O.LOU. SHMIDT en 1916.

Actuellement, la théorie des groupes est l'un des domaines les plus évolués de l'algèbre. Elle a de multiples applications tant en mathématiques qu'au delà de leurs frontières : en topologie, analyse fonctionelle, cristallographie, mécanique quantique, et dans bien

d'autres domaines des mathématiques et de sciences naturelles.

Le but final de la théorie des groupes est en fait la discription de touts les lois compositions ayant une structure de groupe.

Ce premier chapitre est consacré à certaines notions fondamentales de la théorie générale des groupes.

1.2 Notions élémentaires

Groupes isomorphes

Homomorphismes de groupes

Etant donné deux groupes G et H, *un homomorphisme de groupes* de G dans H est une application $f : G \to H$ telle que :

$$\forall (x, y) \in G^2 : f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

Un homomorphisme bijectif d'un groupe G dans un groupe H est appelé *isomorphisme*. Les deux groupes G et H sont dits isomorphes, s'il existe un isomorphe de G dans H, dans ce cas on écrit $G \simeq H$.

Un homomorphisme bijectif d'un groupe G dans lui même est appelé *automorphisme* de G ; l'ensemble des automorphismes d'un groupe G est noté $Aut(G)$.

Soit $f : G \to H$ un homomorphisme. L'ensemble $f(G) = \{f(x)/x \in G\}$ est appelé *image* de f, il est noté $\mathrm{Im}(f)$. L'ensemble $f^{-1}(\{1_H\}) = \{x \in G/f(x) = 1_H\}$ est appelé *noyau* de f, il est noté $Ker(f)$.

On remarque que si H un sous-groupe normal de G, l'application $j : G \to \frac{G}{H}$ définie par $j(x) = xH$ est un épimorphisme et $Ker(j) = H$. L'épimorphisme j est dit la surjetion canonique de G dans $\frac{G}{H}$.

D'où :

$$\forall H \leq G : (H \lhd G) \Leftrightarrow (\ H \text{ est le noyau d'un homomorphisme de } G)$$

Il est facile de vérifier que :

i) Le composé de deux homomorphismes - s'il existe - est un homomorphisme.

ii) L'application réciproque d'un isomomorphisme est un isomomorphisme.

Par conséquent :

- *Si G est un groupe alors* $(Aut(G), \circ)$est un groupe.

- *Dans tout ensemble de groupes la relation '$\simeq$' est une relation d'équivalence.*

Sous-groupe totalement invariant, caractéristique.

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. On dit que H est un sous-groupe de G totalement invariant (ou $End-$permis) et on note $H \leq^e G$, si :

$$\forall f \in End(G) : f(H) \leq H$$

et on dit que H est un sous-groupe caractéristique (ou $Aut-$permis) et on note $H \leq^a G$, si :

$$\forall f \in Aut(G) : f(H) \leq H$$

On a

i) Tout sous-groupe totalement invariant (ou caractéristique) est un sous-groupe normal.

ii) *Les relations $\leq^e, \leq^a$ sont transitives (à la différence de la relation $\lhd$) i.e :*

$$\forall H, K \in \mathcal{L}(G) : (H \leq^e K et\ K \leq^e G) \Rightarrow (H \leq^e G\ )$$
$$\forall H, K \in \mathcal{L}(G) : (H \leq^a K et\ K \leq^a G) \Rightarrow (H \leq^a G\ )$$

iii) $\forall H, K \in \mathcal{L}(G) : (H \leq^a K et\ K \lhd G) \Rightarrow (H \lhd G\ )$

Théorème (Le premier Théorème d'isomorphisme) :

Soient G et H deux groupeset soit $f : G \to H$ un homomorphisme, alors $\frac{G}{Ker(f)} \simeq \mathrm{Im}\,(f)$.

En particulier si f est surjective on a $\frac{G}{Ker(f)} \simeq H$ *et si f est injective* $G \simeq \mathrm{Im}\,(f)$.

Conséquences : *Soient G un groupe et N un sous-groupe normal de G :*

1- (Le deuxième Théorème d'isomorphisme) : *Pour tout sous- groupe H de G* on a $N \leq HN \leq G$, $H \cap N \lhd H$ et $\frac{H}{H \cap N} \simeq \frac{HN}{N}$.

2- (Le troisième Théorème d'isomorphisme) : *Pour tout sous- groupe H de G* et tel que $N \leq H \lhd G$, on a $\frac{\left(\frac{G}{N}\right)}{\left(\frac{H}{N}\right)} \simeq \frac{G}{H}$.

Extension de groupes

On dit que le groupe G est une extension du groupe P par le groupe Q , si G possède un sous-groupe normal N tel que $N \simeq P$ et $\frac{G}{N} \simeq Q$.

Automorphismes internes d'un groupe

Etant donné un groupe G, pour tout $a \in G$ l'pplication $f_a : G \underset{x \longmapsto x^a = a^{-1}xa}{\longrightarrow} G$ est un automorphisme de G. L'ensemble $\{f_a / a \in G\}$ est un sous-groupe normal dans $Aut(G)$.

le groupe $\{f_a / a \in G\}$ est appelé le groupe des *automorphismes intérieurs* de G et est noté $Int(G)$.

Le centre d'un groupe

Soit G un groupe, l'ensemble $\{x \in G / xg = gx; \forall g \in G\}$ est appelé le centre de G et est noté $Z(G)$ *i.e* $Z(G) = \{x \in G / xg = gx; \forall g \in G\}$.

On a :

i) $Z(G)$ *est un sous-groupe caractéristique qui vérifie :*

$$(G \text{ est un groupe abélien}) \Leftrightarrow (G = Z(G)).$$

ii) $\frac{G}{Z(G)} \simeq Int(G)$.

Conséquence :

Pour tout groupe G*, on a : (* $Int(G)$ *est fini)* $\Leftrightarrow$ *(* $Z(G)$ *est d'indice fini dans* G *).*

Groupe engendré par un ensemble, groupe cyclique et ordre d'un élément

Puissance d'un élément

Soient G un groupe et $a \in G$. Pour tout entier n, la $n^{ème}$ puissance de a est définie par :

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{n+1} &= a^n = \underset{\longleftarrow n\text{-fois}\rightarrow}{a.a...a}\ ; \quad si\ n > 0 \\ a^n &= (a^{-1})^n\ ;\ si\ n < 0 \end{aligned}$$

On a $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ et $(a^n)^m = a^{nm}; \forall a \in G;\ \forall (n; m) \in \mathbb{Z}^2$

Si a, b sont deux élements de G qui commutent alors $(ab)^n = a^n b^n; \forall n \in \mathbb{Z}$

Groupe engendré par un ensemble

Soit X une partie d'un groupe G. Le plus petit sous-groupe de G qui contient X est appelé sous-groupe *engendré* par X, noté $\langle X\rangle$. Il est clair que $\langle X\rangle$ est l'intersection de tous les sous-groupes de G qui contiennent X i.e $\langle X\rangle = \bigcap_{X\subseteq H\leqslant G} H$. X est appelé l'ensemble générateur de $\langle X\rangle$ et les éléments de X sont appelés les éléments générateurs de $\langle X\rangle$.

Si $\{X_i\}_{i\in I}$ est une famille de parties de G, $\left\langle \bigcup_{i\in I} X_i \right\rangle$ est noté $\langle X_i/i\in I\rangle$ et si $x_1, x_2, ..., x_n$ sont n éléments de G, $\langle\{x_1, x_2, ..., x_n\}\rangle$ est noté simplement $\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$.

On dit qu'un groupe est de type fini s'il est engendré par une partie finie *, i.e* un groupe G est un groupe de type fini, s'il existe une partie finie de G, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ qui engendre G .

On remarque que pour tout groupe G, on a $\langle G\rangle = G$; alors un groupe fini est nécessairement de type fini, mais la réciproque est fausse en général.

On dit qu'un groupe de type fini est un groupe à $d-$générateur ($d\in IN^*$), si G est engendré par d de ses éléments, et que tout ensemble générateur de G est de cardinal supérieur ou égal à d. Dans ce cas d sera noté $d(G)$.

Si *G est un groupe et H un sous-groupe normal dans G. Alors :*

i) Si $G =< X >$*,on a* $\frac{G}{H} =< xH/x\in X >$.

ii) Si $\frac{G}{H} =< \overline{X} >$ *où* $\overline{X} = \{xH/x\in X\}$ *, on a* $G =< X, H >$.

Par conséquent :

i) Si G est un groupe de type fini, il en est de même pour $\frac{G}{H}$*; où* $H \trianglelefteq G$.

ii) Si $H \trianglelefteq G$ *tel que H et* $\frac{G}{H}$ *sont de type fini, alors G est de type fini et*

$$d(G) \leq d(\frac{G}{H}) + d(H)$$

Théorème :

Soient G un groupe de type fini et H un sous-groupe de G. Si $[G : H]$ *est fini, alors H est de type fini*

Groupe cyclique

Un sous-groupe H d'un groupe G est dit un sous-groupe cyclique, s'il est engendré

par un de ses élément, i.e s'il existe $a \in H$ tel que $H =< a >$.

Donc le groupe G est cyclique, s'il existe $a \in G$ tel que $G =< a >$. Tout groupe cyclique engendré par a est de la forme $G = \{a^n / n \in \mathbb{Z}\}$.

Conformément aux propriétés des puissances des éléments dans un groupe, il est naturel que tout groupe cyclique est abélien, mais le réciproque n'est pas toujours vraie.

Remarques :

i) Soit H un sous-groupe normal d'un groupe cyclique de G, engendré par un élément a, alors $\frac{G}{H}$ est cyclique engendré par aH.

ii) *Si* G, H sont deux groupes isomorphes, alors : (G est cyclique) $\Leftrightarrow$ (H est cyclique).

iii) S*oit* G *un groupe cyclique. Alors :*

a. Tout sous-groupe H *de* G *est un groupe cyclique. Si* G *est engendré par* a*, alors* $H = \{1\}$ *ou* $H =< a^s >$*;* s *est le plus petit entier positif vérifiant* $a^s \in H$*, aussi* $\left|\frac{G}{H}\right| = s$.

b. Si G *est fini d'ordre* n *et* d *un diviseur de* n*;* G *contient un unique sous-groupe d'ordre* d.

Ordre d'un élément dans un groupe

L'ordre du sous-groupe cyclique de G engendré par a est appelé aussi l'ordre de l'élément a, noté $|a|$, i.e $|a| = |< a >|$.

Si $|a|$ est fini, on dit que a est d'ordre fini, sinon a est dit d'ordre infini et l'on écrit $|a| = \infty$.

On remarque que dans un groupe fini G, tout élément a est d'ordre fini et $|a|$ divise $|G|$.

Groupe sans torsion, groupe de torsion (ou périodique)

On dit qu' un groupe G est un groupe sans torsion si tout élément non trivial de G (autre que l'unité) est d'ordre infini, *i.e* :

$$\forall x \in G - \{1\}, \forall n \in \mathbb{N} : (x^n = 1) \Rightarrow (n = 0)$$

Au contraire, si tous les éléments sont d'ordre fini, on dit que le groupe est de torsion (ou périodique) *i.e* :

$$\forall x \in G, \exists n \in \mathbb{N}^* : x^n = 1$$

Si les ordres des éléments d'un groupe de torsion G sont bornés, dans leur ensemble, leur *ppcm* s'appelle exposant de G (ou période de G) noté $\exp(G)$.

Un groupe de torsion dont les ordres des éléments sont des puissances d'un nombre premier p s'appelle $p-$groupe, *i.e :*

$$(G \text{ est un } p-\text{groupe }) \Leftrightarrow (\ \forall x \in G, \exists r \in \mathbb{N}; x^{p^r} = 1)$$

*S*oient G un groupe et $T(G)$ le sous-groupe de G engendré par les éléments de G d'ordre fini i.e $T(G) =< x \in G/\exists n \in N^*; x^n = 1 >$. Alors $T(G)$ est un sous-groupe caractéristique de G appelé sous-groupe de torsion du groupe G ; le groupe quotient $\frac{G}{T(G)}$ est un groupe sans torsion . Si G est abélien $T(G) = \{x \in G/\exists n \in \mathbb{N}^*; x^n = 1\}$.

Groupe opèrant sur un ensemble et action de groupe

Définition : On dit qu'un groupe G opère à gauche sur un ensemble non vide X, s'il existe une application :

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\rightarrow g \cdot x \end{aligned}$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

i) $\forall x \in X : 1 \cdot x = x$

ii) $\forall (g_1, g_2) \in G^2, \forall x \in X : (g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$

l'application

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\rightarrow g \cdot x \end{aligned}$$

est dite une action de G sur X.

Pour tout élément $x \in X$:

L'ensemble $Orb(x) = \{g \cdot x; g \in G\} \subseteq X$ est dit *orbite* de x suivant G.

L'ensemble $St_G(x) = \{g \in G / g \cdot x = x\} \subset G$ est dit stabilisateur de x suivant G.

On a, si *G est un groupe qui opère à gauche sur un ensemble non vide X. Alors :*

i) $X = \dot{\bigcup_{x \in X}} Orb(x)$.

ii) $\forall x \in X : [G : St_G(x)] = \sharp Orb(x)$.

Applications :

Soit G un groupe.

1) Action d'un groupe sur lui même par conjugaison [1].

L'application :

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \rightarrow & G \\ (g, x) & \rightarrow & g \cdot x = x^{g^{-1}} = gxg^{-1} \end{array}$$

définie une action de G sur lui même.

- $\forall x \in G, Orb(x) = \{x^g / g \in G\}$.

- $\forall x \in G : St_G(x) = \{g \in G / gx = xg\} = C_G(x)$.

d'où $[G : C_G(x)] = \sharp \{x^g / g \in G\}$.

2) Action du groupe G sur $\mathfrak{L}(G)$ par conjugaison.

L'application :

[1] Soient G un groupe et $a, b \in G$, ilest facile de voir
- $\forall x \in G : (a^x = a) \Leftrightarrow (ax = xa)$
$(ab)^x = a^x b^x$
- $\forall x, y \in G : (a^x)^y = a^{xy}$

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{L}(G) &\rightarrow \mathcal{L}(G) \\ (g, H) &\rightarrow g \cdot H = H^{g^{-1}} = gHg^{-1} \end{aligned}$$

définit une action de G sur lui même $\mathcal{L}(G)$.

- $\forall H \leq G, Orb(H) = \{H^g / g \in G\}$.

- $\forall H \leq G : St_G(H) = \{g \in G / gH = Hg\} = N_G(H)$ le normalisateur de H dans G.

d'où $[G : N_G(H)] = \sharp \{H^g / g \in G\}$.

Centralisateur d'un sous-groupe

Soit H un sous-groupe d'un groupe G, on définit le centralisateur $C_G(H)$ de H par

$$C_G(H) = \{g \in G / gh = hg; \forall h \in H\} = \bigcap_{h \in H} C_G(h)$$

Théorème :

Si H est un sous-groupe d'un groupe G, alors $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$ et $\frac{N_G(H)}{C_G(H)}$ est isomorphe à un sous-groupe de $Aut(H)$.

Conséquences :

i) Si H est un sous-groupe normal d'un groupe G, alors $\frac{G}{C_G(H)}$ est isomorphe à un sous-groupe de $Aut(H)$.

ii) Si H est un sous-groupe d'un groupe G :

$$(Aut(H) \text{ est fini }) \Rightarrow (\frac{N_G(H)}{C_G(H)} \text{ est fini })$$

1.3 Classes de groupes et propriétés de groupes

Définition

classe de groupe : Une *classe de groupes* $\mathfrak{X}$ est une classe au sens ' usuel ' constitué de groupes et vérifiant les conditions suivantes :

i) Si G_1, G_2 sont deux groupes isomorphes *i.e* $G_1 \backsimeq G_2$, alors ($G_1 \in \mathfrak{X}$) $\Leftrightarrow$ ($G_2 \in \mathfrak{X}$).

ii) Tout les groupes d'ordre 1 sont dans $\mathfrak{X}$.

Si G est un groupe qui est dans la classe $\mathfrak{X}$, on dit que G est un $\mathfrak{X}$-groupe et on écrit $G \in \mathfrak{X}$.

Une propriété $\mathcal{P}$, est dite une *proprité de groupes*, si elle vérifie les conditions suivantes :

i) Si G_1, G_2 sont deux groupes isomorphes i.e $G_1 \backsimeq G_2$, alors (G_1vérifie la propriété $\mathcal{P}$) $\Leftrightarrow$ (G_2 vérifie la propriété $\mathcal{P}$).

On note que si $\mathfrak{X}$ est une classe de groupes, alors ' l'appartenance à $\mathfrak{X}$ ' est une proprité de groupes. Inversement, si $\mathcal{P}$ est une proprité de groupes, les groupes ' vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ ' forment une classe de groupes.

- Une classe de groupes $\mathfrak{X}$ est dite une classe $\mathbf{S}-fermée$ et on écrit $\mathbf{S}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, si tout sous-groupe d'un $\mathfrak{X}$-groupe est un$\mathfrak{X}$ -groupe.

- Une classe de groupes $\mathfrak{X}$ est dite une classe $\mathbf{S}_n-fermée$ et on écrit $\mathbf{S}_n\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, si tout sous-groupe normal d'un $\mathfrak{X}$-groupe est un $\mathfrak{X}$-groupe.

- Une classe de groupes $\mathfrak{X}$ est dite une classe $\mathbf{H}-fermée$ et on écrit $\mathbf{H}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, si tout quotient (image homomorphe) d'un $\mathfrak{X}$-groupe est un $\mathfrak{X}$ -groupe.

- Une classe de groupes $\mathfrak{X}$ est dite une classe $\mathbf{P}-fermée$ et on écrit $\mathbf{P}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, si l'éxtension d'un $\mathfrak{X}$-groupe par un $\mathfrak{X}$ -groupe est $\mathfrak{X}$ -groupe.

- Une classe de groupes $\mathfrak{X}$ est dite une classe $\mathbf{R}-fermée$ et on écrit $\mathbf{R}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, si pour tout groupe G et toute famille $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\wedge}$ de sous-groupe normaux de G, on a :

$$\left(\frac{G}{H_\lambda} \in \mathfrak{X}\,;\, \forall\lambda \in \wedge\right) \Rightarrow \left(\frac{G}{\bigcap\limits_{\lambda\in\wedge} H\lambda} \in \mathfrak{X}\right)$$

Exemples :

Il est clair que :

Tous les groupes forment une classe de groupes notée $\mathfrak{U}$.et 'être un groupe ' est une proprité de groupes.

Les groupes d'ordres 1 forment une classe de groupes notée $\mathfrak{T}$, et 'être un groupe d'ordre 1 ' est une proprité de groupes.

Les groupes finis forment une classe de groupes notée $\mathfrak{F}$,et 'La commutativitè' est une proprité de groupes. On $\mathbf{S}\mathfrak{F} = \mathbf{S}_n\mathfrak{F} = \mathbf{H}\mathfrak{F} = \mathbf{P}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$

Les groupes de type fini forment une classe de groupes notée $\mathfrak{G}$,et 'être de type fini' est une proprité de groupes. On $\mathbf{H}\mathfrak{G} = \mathbf{P}\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$. Par contre $\mathfrak{G}$ n'est ni $\mathbf{S}-fermée$, ni $\mathbf{S}_n-fermée$.

Les groupes abéliens forment une classe de groupes notée $\mathfrak{A}$,et ' La commutativité ' est une proprité de groupes. $\mathbf{S}\mathfrak{A} = \mathbf{S}_n\mathfrak{A} = \mathbf{H}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Par contre $\mathfrak{A}$ n'est pas $\mathbf{P}-fermée$.

1.4 Groupes libres et variétés de groupes.

Groupes libres.

Définition : Soient F un groupe, X un ensemble non vide dans F et $\sigma : X \longrightarrow F$ une application. On dit que F où plus exactement (F, σ) est libre sur X, si pour tout groupe G et toute application $\alpha : X \longrightarrow G$ il existe un unique homomorphisme $\beta : F \longrightarrow G$ vérifiant $\beta\sigma = \alpha$, cette dernière équation veut dire que le diagrame $\begin{array}{ccc} X & \underrightarrow{\sigma} & F \\ & \alpha \searrow & \downarrow \beta \\ & & G \end{array}$ est commutatif.

Donc le groupe F est libre, s'il existe un ensemble non vide X et une application $\sigma : X \longrightarrow F$ telle que (F, σ) soit libre sur X.

Remarque :

L'application σ dans la définition précédente est nécéssairement injetive.

En effet, soient $x_{1 \neq} x_2$ deux éléments de X et suppposons que $\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$. Soient $G = \{g_1, g_2\}$ un groupe d'ordre 2 et l'application $\alpha : X \longrightarrow G$ telle que $\alpha(x_1) = g_1$ et $\alpha(x) = g_2$, si $x \neq x_1$. Alors il existe un seul homomorphisme $\beta : F \longrightarrow G$ vérifiant $\beta\sigma = \alpha$. Donc $g_1 = \alpha(x_1) = \beta\sigma(x_{1)} = \beta\sigma(x_{2)} = \alpha(x_2) = g_2$, Contradiction.

Exemples :

Soit $< a >$ un groupe cyclique infini et l'application

$$\sigma : \{a\} \rightarrow < a >$$
$$a \mapsto a$$

alors $(< a >, \sigma)$ est libre sur $\{a\}$.

Construction d'un groupe libre :

Soient X un ensemble non vide et $X^{-1} = \{x^{-1}/x \in X\}$ un ensemble disjoint de X et équipotent à X $\left(\begin{array}{l} X \rightarrow X \\ x \mapsto x^{-1} \end{array} \right.$ est une bijection de X dans $\left. X^{-1} \right)$.

Un mot écrit *en alphabet* X est une suite vide (notée 1) ou finie de r éléments appartenant à $X \cup X^{-1}$ $(r \in \mathbb{N}^*)$, noté $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_r^{\varepsilon_r}$. avec $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $r \geq 0$. Le nombre d'éléments de la suite s'appelle *longueur* du mot noté *Long(w)*. Par convention le mot vide est de longueur 0. Il est clair que

$$(Long(w) = 1) \Longleftrightarrow (w \in X \cup X^{-1})$$

L'ensemble de tous les mots écrits *en alphabet* X, sera noté $M(X)$.

Exemple :

- *Si* $X = \{x\}$; $1, x, xx, xxx, \ldots, x^{-1}, x^{-1}x^{-1}, x^{-1}x^{-1}x^{-1}, \ldots, xx^{-1}, x^{-1}x, xxx^{-1}, \ldots$sont des mots écrits *en alphabet* X.

- *Si* $X = \{x, y\}$; $1, x, xx, xxx, \ldots, x^{-1}, x^{-1}x^{-1}, x^{-1}x^{-1}x^{-1}, \ldots, xx^{-1}, x^{-1}x, xxx^{-1}, \ldots, y, yy, yyy,$
$\ldots, y^{-1}, y^{-1}y^{-1}, y^{-1}y^{-1}y^{-1}, \ldots yy^{-1}, y^{-1}y, yyy^{-1}, \ldots, , xy, x^{-1}y, xy^{-1}, x^{-1}y^{-1}, xyx, xxyy, \ldots$
sont des mots écrits *en alphabet* X.

Egalité de mots : Deux mots $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_r^{\varepsilon_r}$ et $v = y_1^{\eta_1} y_2^{\eta_2} ... y_s^{\eta_s}$ sont égaux si et seulement si, $r = s$ et $x_i = y_i$[2]; $1 \leq i \leq r$.

Produit de mots et inverse d'un mot

[2] On note que pour tous $x, y \in X$ on a :

$$(x^{\varepsilon} = y^{\eta} \text{ avec } \varepsilon = \pm 1 \text{ et } \eta = \pm 1) \Rightarrow (\ \varepsilon = \ \eta \text{ et } x = y)$$

Si $\varepsilon \neq \eta$, supposons que $\varepsilon = 1$ alors $x \in X \cap X^{-1}$, contradiction.

On définit le produit des deux mots $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_r^{\varepsilon_r}$ et $v = y_1^{\eta_1} y_2^{\eta_2} ... y_s^{\eta_s}$ par $wv = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_r^{\varepsilon_r} y_1^{\eta_1} y_2^{\eta_2} ... y_s^{\eta_s}$ et on pose $w1 = 1w = w$.

L'inverse de $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_r^{\varepsilon_r}$ est défini par $w^{-1} = x_r^{-\varepsilon_r} x_2^{-\varepsilon_{r-1}} ... x_1^{-\varepsilon_1}$ et $1^{-1} = 1$.

Le produit de mots défini dans $M(X)$ est associatif et 1 est élément unité, alors $M(X)$ muni de ce produit est un monoïde. Mais il n'est jamais un groupe car si $1 \neq w \in M(X)$, pour tout $v \in M(X)$ on a $Long(wv) = long(w) + long(v) > 0$ et $wv \neq 1$.

Proposition :

Soit X un ensemble non vide alors il existe un groupe $F(X)$ et une application $\sigma : X \longrightarrow F$ telle que $(F(X), \sigma)$ soit libre sur X et $F(X) = \langle \mathrm{Im}(\sigma) \rangle$.

Preuve :

Deux mots w et v de $M(X)$ sont dits *équivalents* (Notation $w \sim v$) si v se laise déduire de w moyennant un nombre fini d'intercalations et de suppression des mots de types $x^{\varepsilon} x^{-\varepsilon}$, $x \in X$ et $\varepsilon = \pm 1$. Autrment dit : $w \sim v$ s'il existe une suite de mots $w_1, w_2, ..., w_m$ telle que :

$$w = w_1, w_2, ..., w_m = v$$

où les mots voisins se déduisent l'un de l'autre par intercalations ou suppressions des sous-mots de types $x^{\varepsilon} x^{-\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$

Il est clair que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence dans $M(X)$. La classe d'équivalence de w est notée $[w]$.

Soit $F(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence des mots écrits *en alphabet* X i.e $F(X) = \{[w] \,/\, w \in M(X)\}$. Introduisons dans $F(X)$ l'opération de multiplication définie par la loi $[w][v] = [wv]$. Soit $[w], [w'], [v], [v']$ des éléments de $F(X)$ tels que $[w] = [w']$ et $[v] = [v']$, alors $w \sim w'$ et $v \sim v'$, d'où $wv \sim w'v'$, d'où $[w][v] = [w'][v']$ et la relation $\sim$ est compatible avec la multiplication des classes.

- L'associativité de la multiplication est immédiate par définition,
- $1_{F(X)} = [1]$.
- $[w]^{-1} = [w^{-1}]$.

Définissons l'application $\sigma : X \longrightarrow F(X)$ telle que $\sigma(x) = [x]$, alors $(F(X), \sigma)$ est libre sur X.

Mots Irréductibles

Un mot écrit en alphabet X est dit *irréductible* s'il ne contient pas des symboles voisins de type x^{ε}, $x^{-\varepsilon}$ avec $\varepsilon = \pm 1$, et il est dit réductible dans le cas contraire. Par exemple, le premier des mots

$$x_2 x_1 x_1 x_2^{-1} x_{3,} \quad x_1 x_2 x_2^{-1} x_3$$

est irréductible et le second réductible. Par convention le mot vide est un mot irréductible.

A partir de n'importe quel mot w, on peut déduire un mot irréductible w^* en éliminant un à un les sous-mots de droite $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$ avec $\varepsilon = \pm 1$. La fonction $w \rightarrow w^*$ possède les propriétés suivantes :

i) $w \sim w^*$; $\forall w \in M(X)$.

ii) (w est irréductible) $\Longleftrightarrow$ $(w = w^*)$

iii) $(x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}w)^* = w^*$ avec $\varepsilon = \pm 1$; $\forall w, v \in M(X)$.

iv) $(wx^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}v)^* = (wv)^*$avec $\varepsilon = \pm 1$; $\forall w, v \in M(X)$.

v) $(wv)^* = (wv^*)^* = (w^*v^*)^*$; $\forall w, v \in M(X)$.

vi) $\forall w, v \in M(X) : (w \sim v) \Longleftrightarrow (w^* = v^*)$. En particuler si $w, v \in M(X)$ sont deux mots irréductibles on a : $(w \sim v) \Longleftrightarrow (w = v)$.

vii) $\forall\, [w] \in F(X), \exists!\ w^* \in [w]\ /\ w^*$ est irréductible et $[w] = [w^*]$.

Forme normale

D'après *vii)* tout élément $[w]$ (w un mot irréductible)de $F(X)$ peut être écrit sous la forme $[w] = \left[x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_r^{\varepsilon_r}\right]$ avec $\varepsilon = \pm 1, r \geq 0$ et dans dans le mot $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_r^{\varepsilon_r}$ on n' a pas de sous-mot de type $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$. D'après la définition de la multiplication dans $F(X)$ on a $[w] = [x_1]^{\varepsilon_1} [x_2]^{\varepsilon_2} ... [x_r]^{\varepsilon_r}$, en multipliant les termes consécutifs de même variable x_i, l'élément peut être écrit **uniquement** sous la forme :

$$[w] = [x_1]^{l_1}\,[x_2]^{l_2}\,...\,[x_s]^{l_s}\,;s \geq 0, l_i \in \mathbb{Z}/\,\{0\}\,etx_i \neq x_{i+1}$$

Afin de simplifier la notation, nous allons identifier l'élément au mot, par cette convention on obtient :

$$\forall 1 \neq w \in F(X) : w \in w = x_1^{l_1}x_2^{l_2}...x_s^{l_s}; s \geq 1, l_i \in \mathbb{Z}/\,\{0\}\,etx_i \neq x_{i+1}{}^{3} \qquad (1.0)$$

Cette écriture de w est appelée la forme normale de w, quelque fois cette forme est désignée par : $w(x_1, x_2, ..., x_s)$ ou $w(x)$ avec $x = (x_1, x_2, ..., x_s)$.

L'éxistence de la forme normale est une caractéristique des groupes libres.

Théorème :

Soit G un groupe et X une partie de G. Supposons que tout élément $g \in G$ peut être écrit d'une façon unique sous la forme :

$$g = x_1^{l_1}x_2^{l_2}...x_s^{l_s}\ ;\ s \geq 0,\ x_i \in X\ ,\ l_i \in \mathbb{Z}/\,\{0\}\ \ et\ x_i \neq x_{i+1}$$

3

$$\begin{array}{rl} & \left(\begin{array}{c} x_1^{l_1}x_2^{l_2}...x_s^{l_s} = y_1^{m_1}y_2^{m_2}...y_r^{m_r}; \\ s \geq 0, l_i \in \mathbb{Z}/\,\{0\}\ \ et\ x_i \neq x_{i+1}; r \geq 0, m_i \in \mathbb{Z}/\,\{0\}\,ety_i \neq y_{i+1} \end{array}\right) \\ \Rightarrow & (s = m, x_i = y_i \text{ et } m_i = l_i) \end{array}$$

DONC,
Dans un groupes libre sur l'ensemble X :

$$\begin{array}{rl} & \left(x_1^{l_1}x_2^{l_2}...x_s^{l_s} = 1;\ X \ni x_i \neq x_{i+1}; r \geq 1, l_i \in \mathbb{Z}\right) \\ \Rightarrow & (l_i = 0\ ,\forall 1 \leq i \leq S) \end{array}$$

Alors G est libre sur X.

Théorème :

Soient F_1 un groupe libre sur X_1 et F_2 un groupe libre sur X_2. Si $\sharp X_1 \simeq \sharp X_2$, alors $F_1 \simeq F_2$.

Remarque :

Soient F un groupe libre sur X et $\sigma : X \longrightarrow F$ l'injection associée. Alors F est engendré par $\mathrm{Im}(\sigma)$ *et F est libre sur* $\mathrm{Im}(\sigma)$.

D'après la remarque précédente on peut donner la définition suivante d'un groupe libre.

Définition : Soit F un groupe. On dit que F est un groupe libre, s'il existe une partie X de F telle que :

i) $F = \langle X \rangle$.

ii) Toute application de X dans un groupe admet un unique prolongement en un homomorphisme de F dans ce groupe.

Remarque : *Réciproquement, si $F_1 \simeq F_2$ alors $\sharp X_1 \simeq \sharp X_2$.*

Ensemble générateur et rang d'un groupe libre

Soit F un groupe libre sur l'ensemble X. X s'appelle *ensemble générateur libre* de F. Le cardinal de X s'appelle *rang* (de liberté) de F. Si $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, au lieu de $F(X)$ on écrit $F_n(X), F_\infty(X)$. Si les désignations des générateurs n'ont pas d'importance, on écrit F_n, F_∞ tout court.

Théorème :

Tout groupe est image homomorphe d'un groupe libre. En particulier tout groupe de type fini est image homomorphe d'un groupe libre de rang fini.

Variétés de groupes

Les Classes de groupes définies par ' *des relations identiques* ' sont appelées *variétés* de groupes. Les variétés de groupes sont étroitement liées aux groupes libres, vu que les identités sont des éléments de groupes libres. Beaucoup de travaux sont consacrés à la théorie des variétés de groupes parmi lesquels le célèbre ouvrage de H. Neumann.

Soient F_∞ un groupe libre sur l'ensemble $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ et $w = x_{i_1}^{l_1} x_{i_2}^{l_2} ... x_{i_s}^{l_s}$ un ' mot ' de F_∞. Si G est un groupe et $g_1, g_2, ..., g_s$ sont des éléments de G, l'élément $w(g_1, g_2, ..., g_s) = g_1^{l_1} g_2^{l_2} ... g_s^{l_s}$s' appelle valeur de w sur $g_1, g_2, ..., g_s$.

On dit que le mot est une identité sur le groupe G, s'il devient unité sur tous les éléments de G, c'est-a-dire $w(g_1, g_2, ..., g_s) = 1_G$; $\forall g_1, g_2, ..., g_s \in G$.

variété de groupes

Soit $\mathcal{W}$ une partie de F_∞, on appelle variété de groupes définie (ou déterminée) par $\mathcal{W}$ notée $\mathcal{B}(\mathcal{W})$, la classe de groupes G tels que tout mot de $\mathcal{W}$ soit une identité sur G. Autrement dit, $\mathcal{B}(\mathcal{W})$ est la classe des groupes G tels que $w(g_1, g_2, ..., g_s) = 1_G$; $\forall w \in \mathcal{W}$, $\forall g_1, g_2, ..., g_s \in G$.

Sous − groupe verbal

Soient G un groupe et $\mathcal{W}$ une partie de F_∞.

Le sous-groupe $\mathcal{W}(G) = \langle w(g_1, g_2, .., g_s)/w \in \mathcal{W};\ g_i \in G \rangle$ est appelé *le sous groupe verbal* de G défini par $\mathcal{W}$ (ou par rapport à $\mathcal{W}$).

Sous − groupe marginal

Soient G un groupe et $\mathcal{W}$ une partie de F_∞. Un sous-groupe normal N de G est dit $\mathcal{W}-$marginal si pour tout $a \in N$ et $w(x_1, x_2, ..., x_s) \in \mathcal{W}$ on a : :

$$\forall g_1, g_2, ..., g_s \in G : w(g_1, ..., g_{i-1}, g_i a, g_{i+1}, ..., g_s) = w(g_1, ..., g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, ..., g_s);\ 1 \leq i \leq s$$

Ce qui est équivalent à :

$$w(x_1, x_2, ..., x_s) \in \mathcal{W}\,;\ \forall g_1, g_2, ..., g_s, h_1, h_2, ..., h_s \in G :$$
$$(\ g_i \equiv h_i\,[N]\,;\ 1 \leq i \leq s\ ) \Longrightarrow (w(g_1, g_2, ..., g_s) = w(h_1, h_2, ..., h_s))$$

Il est facile de voir que les sous-groupes $\mathcal{W}$-marginaux d'un groupe G engendrent un sous-groupe $\mathcal{W}$-marginal noté $\mathcal{W}^*(G)$ et appelé le sous-groupe $\mathcal{W}^*(G)-$marginal de G.

Pour un groupe G, ces deux sous groupes (i.e $\mathcal{W}(G)$ et $\mathcal{W}^*(G)$) mesurent dans un certain sens l'écart de G par rapport aux groupes de la variété de groupes définie par $\mathcal{W}$.

Théorème :

Soient $\mathcal{W}$ une partie de F_∞ et G un groupe quelconque, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $G \in \mathcal{B}(\mathcal{W})$.

ii) $\mathcal{W}(G) = 1$.

iii) $\mathcal{W}^*(G) = G$.

Exemples :

1-Soit $w = 1$, alors $w(G) = 1$ et $w^*(G) = G$, et $\mathcal{B}(1)$ est la variété de tous les groupes d'ordre 1.

2- Soit $w(x) = x$, alors $w(G) = G$ et $w^*(G) = 1$,et $\mathcal{B}(x)$ est la variété de tous les groupes.

3- Soit $w(x, y) = [x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, alors $w(G) = G' =$, $w^*(G) = Z(G)$ et $\mathcal{B}([x, y])$ est la variété des groupes abéliens notée $\mathfrak{A}$.

4- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $w(x) = x^n$, alors $w(G) = G^n = \langle g^n / g \in G \rangle$, $\mathcal{B}(x^n)$ est la variété de groupes d'exposant fini divisant n notée $\mathcal{B}_n$ (dite aussi la variété de BURNSIDE d'exposant fini divisant n). Si $n = 2$, il est facile de voire que $w^*(G) = \{g \in Z(G)/g^2 = 1\}$.

5- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{W} = \{[x, y], x^n\}$. Alors $\mathcal{B}(\{[x, y], x^n\})$ est la variété des groupes abéliens d'exposant fini divisant n notée $\mathfrak{A}_n$. Si $n = p$ premier, $\mathcal{B}(\{[x, y], x^p\})$ est la variété des $p-$groupes abéliens élémentaires.

Théorème :

i) Un sous-groupe verbal d'un groupe est totalement invariant et un sous-groupe totalement invariant d'un groupe libre est un sous-groupe verbal.

ii) Un sous-groupe marginal d'un groupe est un sous-groupe caractéristique.

Théorème :

Soit H une partie de F_∞. Alors H est un sous-groupe verbal de F_∞ si, et seulement si H vérifie les conditions suivantes :

i) $\forall (v, u) \in F_\infty^2 : (\ v, u \in H) \Longrightarrow (v.u \in H)$.

ii) $\forall v \in F_\infty : (\ v \in H) \Longrightarrow (v^{-1} \in H)$.

ii)$\forall u \in H; \forall v_1, ..., v_{n(u)} \in F_\infty : u(v_1, ..., v_{n(u)}) \in H$.

Les parties fermées de F_∞ et **La fermeture d'une partie de F_∞**

Les sous-groupes totalement invariants de F_∞ sont appelés aussi les parities fermées de F_∞. Comme l'intersection d'une fammille de sous-groupes totalement invariants est un sous-groupe totalement invariant, alors on peut parler de la ' fermeture ' de tout ensemble de mots $\mathcal{W}$; c'est le plus petit sous-groupe totalement invariant qui contient $\mathcal{W}$, noté $\overline{\mathcal{W}}$.

Remarque :

D'après la définition des variétés de groupes, on remarque q'il existe une correspondance entre les variétés de groupes et les ensembles de mots qui les définissent. Cette correspondance n'est pas biunivoque, car deux ensembles de mots différents peuvent définir une même variété de groupes. D'autre part, l'ensemble W de toutes les identités vraies dans une variété donnée $\mathcal{B}$ ($W = \{w \in F_\infty / w(G) = 1; \forall G \in \mathcal{B}\}$) a une structure de sous-groupe verbal de F_∞; on voit sans peine que cette correspondance entre les variétés de groupes et les sous-groupes verbaux de F_∞ est biunivoque. Etudier les variétés de groupes équivaut donc à étudier les sous-groupes verbaux de F_∞.

Les Groupes $\mathcal{B}$-libres

Soient $\mathcal{B}$ une variété de groupes et F un $\mathcal{B}$-groupe ; soient X un ensemble non vide et $\sigma : X \longrightarrow F$ une application de X dans F. On dit que F ou plus exactement (F, σ) est $\mathcal{B}$-libre sur X (ou libre dans la variété $\mathcal{B}$), si pour tout $\mathcal{B}$-groupe G et toute application $\alpha : X \longrightarrow G$ il existe un unique homomorphisme $\beta : F \longrightarrow G$ vérifiant $\beta\sigma = \alpha$, cette denière équation veut dire que le diagrame $\begin{array}{ccc} X & \underrightarrow{\sigma} & F \\ & \alpha \searrow & \downarrow \beta \\ & & G \end{array}$ est commutatif.

Un groupe $\mathcal{B}$-libre est dit aussi $\mathcal{B}$-groupe libre.

Si $\mathcal{B}$ est la variété de tous les groupes, on retrouve la définition des groupes libres.

Remarque :

De la même façon que pour la définition des groupes libres, on peut donner une définition équivalente des groupes $\mathcal{B}$-libres :

Un groupe F est dit $\mathcal{B}$-libre, s'il contient une partie X telle que :

i) $F = \langle X \rangle$.

ii) Toute application de X *dans un* $\mathcal{B}$*-groupe* L *possède un unique prolongement en un homomorphisme de* F dans le *groupe.*

Théorème :

Soit $\mathcal{B}$ *une variété de groupes définie par les identités de* $\mathcal{W}$*. Alors pour tout groupe* G *on a :* G *est un groupe* $\mathcal{B}$*-libre si et seulement si* G *est isomorphe à* $\frac{\overline{F}}{\mathcal{W}(\overline{F})}$*, où* $\overline{F}$ *est un groupe libre.*

Théorème :

Soit $\mathcal{B}$ *une variété de groupes définie par les identités de* $\mathcal{W}$*. Alors tout* $\mathcal{B}$*-groupe est image homomorphe d'un groupe* $\mathcal{B}$*-libre.*

Une description exhaustive des groupes libres dans la variété des groupes abéliens sera donnée dans la suite de cette section ; par contre, dans d'autres variétés de groupes, les groupes libres peuvent présenter une structure assez complexe.

Théorème :

Un sous-groupe totalement invariant d'un groupe relativement libre est un sous-groupe verbal.

Mot commutateurs

Soit F un groupe libre sur un ensemble X, on appelle mot commutateur tout élément du sous-groupe dérivé F'.

Exemple :

Les mots $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$, $[x_1, x_2, ..., x_n] = [[x_1, x_2, ..., x_{n-1}], x_n]$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) sont des mots commutateurs.

Ensembles de mots équivalents

Deux ensembles de mots $\mathcal{W}$, $\mathcal{V}$ sont dits équivalents s'il définissent une même variété de groupes ou, ce qui revient au même $\mathcal{W}(F_\infty) = \mathcal{V}(F_\infty)$

Théorème :

Tout mot w *est équivalent à une paire de mots, l'un de la forme* x^m*, l' autre est un mot commutateur.*

Une autre approche des variétés de groupes.

Soit $\mathfrak{X}$ une classe de groupes, un groupe G est dit résiduellement $\mathfrak{X}$-groupe si, pour tout $1 \neq g \in G$, il existe un sou-groupe N_g normal dans G tel que $g \notin N_g$ et $\frac{G}{N_g} \in \mathfrak{X}$. La classe des groupes qui sont résiduellement $\mathfrak{X}$-groupes est notée $R\mathfrak{X}$.

Soit $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \wedge}$ une famille de groupes. Un groupe G est appelé produit sous-cartésien des groupes G_λ s'il est isomorphe à un sous-groupe du produit cartésien $\underset{\lambda \in \wedge}{Cr} G_\lambda$.

Lemme : Soient $\mathfrak{X}$ une classe de groupes et G un groupe, alors G est dit résiduellement $\mathfrak{X}$-groupe si, et seulement si, G est produit sous-cartésien de $\mathfrak{X}$ -groupes.

Théorème (Birkhoff) :

Une classe de de groupes $\mathfrak{X}$ est une variété de groupes si, et seulement si, elle est S, H, R fermée.

1.5 FC-groupes

Définition (FC-élément)

Un élément x d'un groupe G est dit un $FC-$élément s'il possède un nombre fini de conjugués dans G, *i.e*, $x^G = \{x^g / g \in G\}$ est un ensemble fini. En d'autre terme, x est un $FC-$élément si $C_G(x)$ est d'indice fini dans G. Il est clair que tout élément de $Z(G)$ est un $FC-$élément.

Théorème

Pour tout groupe G, l'ensemble de *tous les FC-éléments de G est sous-groupe caractéristique de G.*

Démonstration

Soient x, y deux $FC-$éléments de G, alors $[G : C_G(x)]$ et $[G : C_G(x)]$ sont finis. Mais :

$$C_G(x) \cap C_G(y) \leq C_G(xy^{-1}) \leq G$$

d'où $[G : C_G(xy^{-1})]$ est fini. D'autre part, pout tout $\alpha \in Aut(G)$ et tout $x \in G$ on a

$\alpha(C_G(x)) = C_G(\alpha(x))$, donc $[G : C_G(\alpha(x))] = [G : \alpha(C_G(x))] = [G : C_G(x)]$. D'où $\alpha(x))$ est un FC-élément.

Définition (Le FC-centre)

Soit G un groupe, l'ensemble de tous les $FC-$éléments de G est dit $FC-$centre de G, il est noté $FC(G)$. (donc $Z(G) \subseteq FC(G)$)

Définition (Le FC-groupe)

Un groupe G est dit un FC-groupe si chaque élément de G est un $FC-$élément, donc G est un $FC-$groupe si et seulement si, $G = FC(G)$.

On remarque que la classe des $FC-$groupes contient la classe des groupes finis et la classe des groupes abéliens.

Remarque

La classe des FC-groupe est une classe S, H, D-fermée

Théorème(Baer) :

Si G est un FC-groupe, alors $\frac{G}{Z(G)}$ est périodique et résiduellement fini.

Démonstration :

$\frac{G}{Z(G)}$ résiduellement fini.

On a $Z(G) = \bigcap\limits_{x \in G} C_G(x)$ a-t-on

$$\bigcap_{\frac{N}{Z(G)} \trianglelefteq \frac{G}{Z(G)} \atop \frac{G}{N} \text{fini}} \frac{N}{Z(G)} =^{?} \frac{Z(G)}{Z(G)} \Leftrightarrow \bigcap_{Z(G) \leq N \trianglelefteq G \atop \frac{G}{N} fini} N = Z(G)$$

Comme G est un FC-groupe alors $\frac{C_G(x)}{Z(G)}$ est fini d'où

$$\bigcap_{Z(G) \leq N \trianglelefteq G \atop \frac{G}{N} fini} N \leq \bigcap_{x \in G} C_G(x) = Z(G)$$

alors $\frac{G}{Z(G)}$ est résiduellement fini.

$\frac{G}{Z(G)}$ périodique

Soit $x \in G$ et $C = C_G(x)$, donc $|G : C|$ est fini . Posons $\left(\frac{G}{C}\right)_g = \{t_1C, t_2C, ..., t_nC\}$ concidérons $D = \bigcap_{i=1}^{n} C_G(t_i)$, d'où $|G : D|$ est fini ,par suite $|G : K|$ est fini où $K = \bigcap_{g \in G} D^g \trianglelefteq G$ est le core de D dans G . d'où : $x^m \in K$ pour un certain $m > 0$.Par suite , $x^m \in D$, d'où x^m centralise $\{t_1, ..., t_n\}$ et C aussi ; or G peut étre engendré par $\{t_1, ..., t_n, C\}$ donc $x^m \in Z(G)$.

Il en résulte que $\frac{G}{Z(G)}$ est périodique.

Théorème :

(i) Un groupe périodique G est un $FC-$ groupe si et seulement si , tout sous-ensemble fini est contenu dans un sous-groupe normal fini .

(ii) Un groupe de type fini G est un $FC-$ groupe si et seulement si, il est central-par-fini .

Démonstration :

(i) Soit G un $FC-$ groupe de torsion et soit F un sous-ensemble fini de G, $F = \{a_1, .., a_n\}$. L'ensemble des conjugués de a_i pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ est fini car G est un $FC-$ groupe ; donc l'ensemble des conjugués de F dans G est fini ; de plus, cet ensemble est normal ; d'après le lemme de Dicman cet ensemble engendre un sous-groupe normal de G.

Réciproquement, soit G un groupe de torsion tel que toute partie de G soit contenue dans un sous-groupe normal fini de G, G est -il un $FC-$groupe ?

Soit $x \in G$, $\{x\}$ est fini ; il existe un sous-groupe fini normal de G contenant x, soit $\overline{x} = \{x^g / g \in G\}$ la classe de conjugaison de x dans G, F étant normal dans G alors $\overline{x} \subset F, F$ étant fini , $\overline{x}$ est fini .

(ii) Comme $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$ alors $Z(G) = \bigcap_{i=1}^{n} C_G(g_i)$, puisque G est un $FC-$ groupe donc $|G : C_G(g_i)|$ est fini pour tout $i \in \{1, ..., n\}$; mais $\left|G : \bigcap_{i=1}^{n} C_G(g_i)\right| \leq \prod_{i=1}^{n} |G : C_G(g_i)|$ et $|G : Z(G)| = \left|G : \bigcap_{i=1}^{n} C_G(g_i)\right|$ alors $|G : Z(G)|$ est fini.

Réciproquement, soit G un groupe central-par-fini alors $|G : Z(G)|$ est fini, mais $Z(G) \leq C_G(x)$ por tout $x \in G$; d' après le théorème de Lagrange $|G : Z(G)| = |G : C_G(x)|\,|C_G(x) : Z(G)|$ pour tout $x \in G$; donc quel que soit $x \in G$, $|G : C_G(x)|$ est fini d'où le résultat.

Corollaire :

Un $FC-$ groupe périodique est localement fini.

Démonstration :

Rappelons qu'un groupe G est localement fini, s'il vérifie la condition suivante :

Toute partie finie est incluse dans un sous-groupe fini.

Soit $X = \{x_1, ..., x_n\}$ une partie finie d'un $FC-$ groupe périodique G; d'après le théorème précédent X est contenue dans un sous-groupe normal fini alors $\langle X \rangle$ est fini d'où G est localement fini

Théorème(B.H.Neumann) :

Si G est un $FC-$ groupe , alors G' est périodique.

Aussi l'ensemble des éléments de G d'ordre fini forme un sous-groupe totalement invariant contenant G'.

Démonstration :

Soit $x \in G'$, donc $x = [x_1, y_1] ..... [x_n, y_n]$ d'où $x \in H'$, où $H = \langle x_1, ..., x_n, y_1...., y_n \rangle$ est de type fini ; de plus c'est un $FC-$groupe .D'après le corollaire précédent H est central-par-fini, d'où H' est fini (d'après le lemme de Shur) ; donc x est d'ordre fini ; par suite G' est périodique.

Montrons que l'ensemble T des éléments d'ordre fini forment un sous-groupe totalement invariant .

Soientt g, h de T d' ordre fini ; donc gG', hG' de $\frac{G}{G'}$ sont d'ordre finis dans le groupe abélien $\frac{G}{G'}$, d'où $(gG')(hG')^{-1} = (gh^{-1})G'$ est d'ordre fini , donc il existe $m > 0$ tel que $(gh^{-1})^m \in G'$ mais G' étant périodique, il existe $l > 0$ tel que $(gh^{-1})^{ml} = 1$; alors (gh^{-1}) est d'ordre fini.

T totalement invariant ? Soit $\varphi \in EndG$ et $x \in T, x$ est d'ordre fini, donc $\varphi(x)$ est

d'ordre fini, d'où le résultat.

Chapitre 2

Quelques conditions pour qu'un groupe infini de $\mathcal{V}(\omega^*)$ soit un $\mathcal{V}(\omega)$-groupe

2.1 Introduction

Comme nous l'avons signalé au début, depuis l'article de B. H. Neumann, beaucoup de résultats similaires ont été obtenus, Par exemple voir [1]- [3] [9], [15]-[20], [22]-[23], [27]-[33], [40]- [42], [43], [44],...).

Dans ce deuxième chapitre, nous allons étudier en détails deux principaux résultats, le premier est un résultat de G. Endimioni voir [19], le deuxième est celui d' A. Abdollahi et B. Taeri voir [8]. Ces deux résultats seront très utiles pour la démonstration de nos propres résultats.

2.2 Condition sur un groupe infini de $\mathcal{V}(\omega^*)$ pour qu'il soit dans $\mathcal{V}(\omega)$

Lemme 2.2.1

Soit $(\varphi_i)_{i\in\{1,....,n\}}$ *une famille finie d' endomorphismes d'un groupe infini* G *. Supposons que pour toutes parties infinies* $X_1, X_2, ..., X_n$ *de* G*, il existe* $x_i \in X_i$ *tels que* $\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)....\varphi_n(x_n) = 1$*. Alors* $\varphi_1(x) = ... = \varphi_n(x) = 1$*; pour tout* $x \in G$ *.*

Démonstration.

Montrons qu'il existe $i; (1 \leq i \leq n)$ tel que $\ker(\varphi_i)$ soit infini. Notons

$$\mathcal{P}_n(G) = \{X \subset G/\sharp X = n\}$$

$$E_1 = \left\{\{x_1, ..., x_n\} \in \mathcal{P}_n(G); \exists \sigma \in S_n : \varphi_1\left(x_{\sigma(1)}\right)\varphi_2\left(x_{\sigma(2)}\right)....\varphi_n\left(x_{\sigma(n)}\right) = 1\right\}$$

$$E_2 = \mathcal{P}_n(G) - E_1$$

Comme G est infini, alors il existe des parties infinies $X_1, ..., X_n$ de G, telles que

$$G = X_1 \dot{\cup} .... \dot{\cup} X_n$$

Et d'après les hypothèses, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ il exite $x_i \in X_i$ tel que $\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)....\varphi_n(x_n) = 1$ d'où $\{x_1, ..., x_n\} \in E_1 \neq \varnothing$. D'après le Théorème de Ramsey, il existe une partie infinie X de G telle que

$$\mathcal{P}_n(X) \subseteq E_1 \text{ ou } \mathcal{P}_n(X) \subseteq E_2$$

Comme X est infini, alors il existe des parties infinies $X_1, ..., X_n$ de X, telles que

$$X = X_1 \dot{\cup} .... \dot{\cup} X_n$$

Par hypothèse, il exite $x_i \in X_i$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\cdots\varphi_n(x_n) = 1$; d'où $\{x_1, ..., x_n\} \in E_1$ et $\mathcal{P}_n(X) \subseteq E_1$.

Si $\{x_1, ..., x_{n-1}\} \in \mathcal{P}_{n-1}(X)$ et $x \in X - \{x_1, ..., x_{n-1}\}$ (Notons $x = x_n$), on a $\{x_1, ..., x_{n-1}, x_n = x\} \in E_1$, alors il existe $\sigma_x \in S_n$ vérifiant :

$$\varphi_1\left(x_{\sigma_x(1)}\right)\varphi_2\left(x_{\sigma_x(2)}\right)\cdots\varphi_n\left(x_{\sigma_x(n)}\right) = 1$$

Soit

$$\begin{aligned} f: \quad X - \{x_1, ..., x_{n-1}\} &\longrightarrow S_n \\ x &\longrightarrow f(x) = \sigma_x \end{aligned}$$

Comme S_n est fini et X est infini, alors il existe $\sigma \in S_n$ tel que $f^{-1}(\sigma)$ soit infini. Mais,

$$\forall x : \left[x \in f^{-1}(\sigma)\right] \Longleftrightarrow \left[x \in X - \{x_1, ..., x_{n-1}\} / \sigma = \sigma_x\right]$$

Notons $n = \sigma(k); (1 \leq k \leq n)$, alors

$$\varphi_1\left(x_{\sigma(1)}\right)\cdots\varphi_k\left(x_{\sigma(k)}\right)\cdots\varphi_n(x_k) = 1$$

Alors

$$\begin{aligned} \varphi_k\left(x_{\sigma(k)}\right) &= \varphi_{\sigma^{-1}(n)}(x) \\ &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n-k}}^{n-1} \varphi_{n-i}\left(x_{\sigma(n-i)}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(\sigma)$ est stable par $\varphi_{\sigma^{-1}(n)}\big|_{f^{-1}(\sigma)}$ et $Ker(\varphi_{\sigma^{-1}(n)})$ est infini.

Montrons maintenant que $Ker(\varphi_i)$ est infini pour tout $i; (1 \leq i \leq n)$.

Soit

$$I = \{i \in \{1, \ldots, n\} \text{ tel que } Ker(\varphi_i) \text{ soit fini}\}$$

et supposons que $I \neq \varnothing$ alors $I = \{i_1, \ldots, i_m / m \leq n \text{ et } i_1 < \cdots < i_m\}$. Soient $X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}$ des parties infinies de G et considérons

$$X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}, X_{i_{m+1}} = \ldots = X_{i_n} = Ker(\varphi_{i_{m+1}})$$

Il existe $x_{i_1} \in X_{i_1}, \ldots, x_{i_m} \in X_{i_m}$ tels que $\varphi_{i_1}(x_{i_1}) \cdots \varphi_{i_m}(x_{i_m}) = 1$. Donc $X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}$ vérifient les hypothèses du Lemme, d'où, d'après la première étape de la démonstration, il existe $i_k; (1 \leq i_k \leq i_m)$, tel que $Ker(\varphi_{i_k})$ soit fini. Ce qui est contradictoire, alors $I = \varnothing$.

Donc, on peut supposer que $Ker(\varphi_i)$ est infini pour tout $i; (1 \leq i \leq n)$. Soient $k; (1 \leq k \leq n)$ et x un élément arbitraire de G. Considérons les parties infinies de G :

$$X_1 = Ker(\varphi_1), ..., X_{k-1} = Ker(\varphi_{k-1}), X_k = xKer(\varphi_k), X_{k+1} = Ker(\varphi_{k+1}), \ldots, X_n = Ker(\varphi_n)$$

alors il exite $x_i \in X_i$ tels que

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{k-1}(x_{k-1}) \varphi_k(xx_k) \varphi_{k+1}(x_{k+1}) \cdots \varphi_n(x_n) &= \varphi_k(xx_k) \\ &= \varphi_k(x)\varphi_k(x_k) \\ &= \varphi_k(x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 2.2.1.

Corollaire

$\mathcal{V}((x_1 ... x_r)^*) = \mathcal{F}$

Démonstration

Supposons qu'il existe un groupe infini G dans $\mathcal{V}((x_1...x_r)^*)$. Considérons la famille $(\varphi_i)_{i\in\{1,....,n\}}$ *d'endomorphismes de* G où $\varphi_i = Id_G$, alors pour toutes parties infinies $X_1, X_2, ..., X_n$ de G, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ il existe $x_i \in X_i$ tel que

$$\begin{aligned} 1 &= x_1...x_r \\ &= \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\,....\varphi_n(x_n) \end{aligned}$$

D'après le lemme pécédent on a : $\varphi_1(x) = ... = \varphi_n(x) = x = 1\ \forall x \in G$; donc $G = 1$, ce qui est une contradictoin.

Lemme 2.2.2

Soient $\omega(x_1, ..., x_n)$ *un mot dans le groupe libre de rang* $n > 0$ *et* G *un* $\mathcal{V}(\omega^*)-$*groupe infini. Alors, si* G *contient un sous-groupe normal abélien infini,* G *est un* $\mathcal{V}(\omega)-$*groupe.*

Démonstration

Soient G un $\mathcal{V}(\omega^*)-$groupe infini et H un sous-groupe normal abélien infini de G. Soient $g_1, ..., g_n$ des éléments arbitraires de G et montrons que $w(g_1, ..., g_n) = 1$. Pour tout $i; (1 \leq i \leq n)$, on a

$$\begin{aligned} w(g_1, ..., g_n)^{-1} w(g_1, \ldots, g_i h, ..., g_n) H &= \left(w(g_1, ..., g_n)^{-1} H\right)(w(g_1, \ldots, g_i h, ..., g_n) H) \\ &= \left(w(g_1, ..., g_n)^{-1} H\right)(w(g_1, \ldots, g_i, ..., g_n) H) \\ &= w(g_1, ..., g_n)^{-1} w(g_1, \ldots, g_i, ..., g_n) H \\ &= H \end{aligned}$$

Donc $w(g_1, ..., g_n)^{-1} w(g_1, \ldots, g_i h, ..., g_n) \in H$ et on peut définir l'application :

$$\begin{aligned} \psi_i : \quad & H \longrightarrow H \\ & h \longrightarrow \psi_i(h) = w(g_1, ..., g_n)^{-1} w(g_1, \ldots, g_i h, ..., g_n) \end{aligned}$$

On remarque que $\psi_i(h)$ s'écrit comme produit d'éléments de la forme $u^{-1}(g_1, .., g_n)\, h_i^{\mp 1} u(g_1, .., g_n)$ où $u(x_1, ..., x_n)$ est un mot de $x_1, ..., x_n$ .Comme H est

abélien, ψ_i est un endomorphisme de H.

D'autre part :

$$\begin{aligned} w\left(g_1, g_2 \ldots, g_i, ..., g_n\right) \psi_1(h)\psi_2(h)\cdots\psi_i(h)\cdots\psi_n(h) &= w\left(g_1h_1, g_2.., g_i, .., g_n\right) \psi_2(h)\psi_i(h)\cdots\psi_n(h) \\ &= w\left(g_1h_1, g_2h_2.., g_i, .., g_n\right) ..\psi_i(h)..\psi_n(h) \\ &\vdots \\ &= w\left(g_1h_1, g_2h_2 \ldots, g_ih_i, ..., g_n\right) ...\psi_n(h) \\ &\vdots \\ &= w\left(g_1h_1, g_2h_2 \ldots, g_ih_i, ..., g_nh\right) \end{aligned}$$

D'où

$$w\left(x_1h_1, ..., x_nh_n\right) = w\left(x_1, ..., x_n\right) \psi_1\left(h_1\right) .....\psi_n\left(h_n\right)$$

On considère les ensembles infinis $H_1, H_2, ..., H_n, H_1^{'}, ..., H_n^{'}$ de H alors $g_1H_1, ..., g_nH_n$, $g_1H_1', ..., g_nH_n'$ restent infinis donc $\exists h_i \in H_i$; $(1 \leq i \leq n\ )$ tels que

$$\begin{aligned} g\left(x_1h_1, ..., g_nh_n\right) &= w\left(g_1, ..., g_n\right) \psi_1\left(h_1\right) .....\psi_n\left(h_n\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

De la même façon

$$\begin{aligned} w\left(g_1h_1^{'}, ..., g_nh_n^{'}\right) &= w\left(g_1, ..., g_n\right) \psi_1\left(h_1'\right) .....\psi_n\left(h_n'\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

et par suite on a :

$$\psi_n^{-1}\left(h_n'\right) .....\psi_1^{-1}\left(h_1'\right) \psi_1\left(h_1\right) \psi_2\left(h_2\right) .....\psi_n\left(h_n\right) = 1$$

Comme H est un groupe abélien, on trouve

$$\psi_1\left(h_1h_1'^{-1}\right).....\psi_n\left(h_nh_n'^{-1}\right)=1$$

d'près le lemme précédent on a donc : $\psi_i(h)=1$; pour tous $h\in H$ et $1\leq i\leq n$

D'où

$$w(g_1,....,g_n)=1$$

2.3 Condition combinatoire pour qu'un groupe infini soit un $\mathcal{V}(x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r})$ -groupe

Lemme 2.3.1

Soient $\omega(x_1,...,x_r)$ un mot dans le groupe libre de rang $r>0$ et G un $\mathcal{V}(\omega^*)-$groupe infini. Si G est un $FC-$groupe alors $G\in\mathcal{V}(\omega)$.

Démonstration

Soient $g_1,...,g_r\in G$, comme G est FC-groupe, alors $\left|G:\bigcap_{i=1}^{r}C_G(g_i)\right|\leq\prod_{i=1}^{r}|G:C_G(g_i)|<\infty$, donc $\bigcap_{i=1}^{r}C_G(g_i)$ est infini. Si A est un sou-groupe abélien infini de $\bigcap_{i=1}^{r}C_G(g_i)$, alors $A\in\mathcal{V}(\omega)$.

On considére les ensembles infinis $g_1A,...,g_rA$, donc il existe $a_i\in A;1\leq i\leq r$ tels que $\omega(g_1a_1,....,g_ra_r)=1=\omega(g_1,...,g_r)\,\omega(a_1,...a_r)=\omega(g_1,...,g_r)$. ■

Soient $n_1,...,n_r$ des entiers constants non nuls et $d=p\gcd(n_1,...,n)$; dans la suite la variété des groupes définie par l'identité $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}=1$ sera notée $\mathcal{V}$.

Lemme 2.3.2

Soit G un groupe infini de $\mathcal{V}^*$. Si $T = \left\{g \in G / g^d = 1\right\}$ est infini alors $G \in \mathcal{V}$. En particulier, tout groupe infini dans $\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}^*$ ne possède aucun sous-groupe infini.

Démonstration

Soient X un sous-ensemble infini de G et j un entier ; $1 \leq j \leq r$. Considérons les parties infinies de G; $X_1 = X_2 = \cdots = X_{j-1} = T$, $X_j = X, X_{j+1} = \cdots = X_r = T$.

Alors il existe $g_i \in T$; $1 \leq i \leq n$ et $i \neq j$, $x \in X$ tel que $g_1^{n_1} ... g_{j-1}^{n_{j-1}} x^{n_j} g_{j+1}^{n_{j+1}} ... g_r^{n_r} = x^{n_j} = 1$,(car $g_i^{n_i} = 1 \forall 1 \leq i \leq n$ et $i \neq j$), alors $G \in \mathcal{B}_{n_J}^*; \forall 1 \leq J \leq n$ mais $\mathcal{B}_{n_J}^* = \mathcal{B}_{n_J} \cup \mathcal{F}$ donc $G \in \mathcal{B}_{n_J}$ et $G \in \mathcal{V}$.■

On définit $\mathcal{V}(\infty)$ comme étant la classe de groupes vérifiant : Pour toute partie infinie X de G, il existe r éléments distincts $x_1, ..., x_r$ de X vérifiant $x_1^{n_1} .... x_r^{n_r} = 1$. De même, on définit la classe de groupes $\mathcal{V}(k)$ comme étant la classe des groupes G vérifiant : Pour toute partie X de cardinal k, il existe r éléments distincts $x_1, ..., x_r$ de X vérifiant $x_1^{n_1} .... x_r^{n_r} = 1$.

On remarque que $\mathcal{V}(k) \subset \mathcal{V}(\infty)$ et $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}(\infty)$.

Lemme 2.3.3

Soit G un groupe infini de $\mathcal{V}(\infty)$. Alors pour tout sous-groupe infini H de G et tout élément $g \in G$, on a $\left|H : C_H\left(g^d\right)\right|$ est fini.

Démonstration

Soit H un sous-groupe infini de de G, et supposons qu'il existe $g \in G$ tel que $\left|H : C_H\left(g^d\right)\right|$ soit infini.

Soit T la transversale à droite de $C_H\left(g^d\right)$ dans H ; on liste les éléments $t_1, t_2, ...$ de T suivant une relation bien ordonnée $\leq$ tels que $t_i < t_j$ si $i < j$.

On considère maintenant l'ensemble $T^{(r)}$ de tous les sous-ensembles à $r-$éléments de T. Pour tout $t \in T^{(r)}$, on liste les éléments $t_{i_1}, ..., t_{i_r}$ de t dans un ordre ascendant donné

par la relation précédente $\leq$; on pose $\hat{t} = (t_{i_1}, ..., t_{i_r})$. pour tout $\sigma \in S_r$, notons

$$U_\sigma = \left\{ t \in T^{(r)} / \hat{t} = (t_{i_1}, ..., t_{i_r}) \text{ et } (g^{t_{i_{\sigma(1)}}})^{n_1} ..... \left(g^{t_{i_{\sigma(r)}}}\right)^{n_r} = 1 \right\}$$

Et soit $V = T^{(r)} / \left(\dot{\bigcup}_{\sigma \in Sr} U_\sigma \right)$, alors

$$T^{(r)} = V \dot{\cup} \left(\dot{\bigcup}_{\sigma \in S_r} U_\sigma \right)$$

Par construction, on obtient $r!+1$ sous-ensembles de $T^{(r)}$. D'après le théorème de Ramsey, il existe un sous-ensemble infini $T_0 \subseteq T$ tel que $T_0^{(r)} \subseteq U_\sigma$ pour un certain σ ou $T_0^{(n)} \subseteq V$.

Supposons que $T_0^{(r)} \subseteq V$, alors l' ensemble $\{g^x / x \in T_0\}$ est infini (car si $\{g^x / x \in T_0\}$ est fini donc $\exists x, y \in T_0$et $x \neq y$ tel que $g^x = g^y \Rightarrow (g^d)^x = \left(g^d\right)^y \Rightarrow xy^{-1} \in C_H\left(g^d\right)$, contradiction).

D'où il existe r-éléments distincts $t_1, ..., t_r \in T_0$ tel que $(g^{t_1})^{n_1} .... (g^{t_r})^{n_r} = 1$. Mais $t \notin U_\sigma \forall \sigma$, donc contradiction. Alors $T_0^{(r)} \subseteq U_\sigma$ pour un certain $\sigma \in S_r$, en plus par la réduction de la relation $\leq$ sur le sous - ensemble T_0 , on suppose que $T_0 = \{t_1, t_2, ...\}$ avec $t_i < t_j$ si $i < j$. Alors pour $i_1 < i_2 < .... < i_n$ on a :

$$\left(g^{t_{i_{\sigma(1)}}}\right)^{n_1} ..... \left(g^{t_{i_{\sigma(r)}}}\right)^{n_r} = 1$$

Maintenant considérons la suite :

$$i_1 < i_2 < .... < i_{r-1} < i_r < i_{r+1} < i_{r+2} < ..... < i_{2r+1}$$

de $2r+1$ indices et supposons que $k \in \{1, 2, ..., r\}$ fixé et soit $\sigma(s) = k$. définissons la suite $j_1 < j_2 < ..... < j_r$ de la manière suivante : $j_1 = i_1, ..., j_{k-1} = i_{k-1}$ (si $k = 1$ la suite est vide), $j_k = i_{r+1}$ et les autres $n-k$ éléments sont définis par : $j_{k+1} = i_{r+1}, .., j_r = i_{2r-k+2}$

(si $k = n$ la suite est vide) ; on a

$$\left(g^{t_{\sigma(1)}}\right)^{n_1} ..... \left(g^{t_{\sigma(s)}}\right)^{n_s} .... \left(g^{t_{\sigma(r)}}\right)^{n_r} = 1$$

$$\Rightarrow \left(g^{t_k}\right)^{n_s} = \left(\left(g^{t_{\sigma(1)}}\right)^{n_1} .... \left(g^{t_{\sigma(s-1)}}\right)^{n_{s-1}}\right)^{-1} \left(\left(g^{t_{\sigma(s+1)}}\right)^{n_{s+1}} .... \left(g^{t_{\sigma(r)}}\right)^{n_r}\right)^{-1}$$

Maintenant posons $j_k = i_{r+2}$ on trouve :

$$\left(g^{t_{i_{r+2}}}\right)^{n_s} = \left(\left(g^{t_{\sigma(1)}}\right)^{n_1} .... \left(g^{t_{\sigma(s-1)}}\right)^{\alpha_{s-1}}\right)^{-1} \left(\left(g^{t_{\sigma(s+1)}}\right)^{n_{s+1}} .... \left(g^{t_{\sigma(r)}}\right)^{n_r}\right)^{-1}$$

Alors :

$$\left(g^{t_{i_{r+1}}}\right)^{n_s} = \left(g^{t_{i_{r+2}}}\right)^{n_s} \Rightarrow t_{i_{r+1}} t_{i_{r+2}}^{-1} \in C_H\left(g^{n_s}\right) \Rightarrow t_{i_{r+1}} t_{i_{r+2}}^{-1} \in \cap_{s=1}^{r} C_H\left(g^{n_s}\right) = C_H\left(g^d\right)$$

ce qui est contradictoire. ■

Corollaire 2.3.4

Soit G un groupe infini de $\mathcal{V}^*$ alors $G^d = \left\langle g^d / g \in G \right\rangle$ est fini .

Démonstration

D'après le lemme **2.3.3,** $\left|G : C_G\left(g^d\right)\right|$ est fini, $\forall g \in G$ alors $G^d \leq FC(G)$; si $FC(G)$ est infini alors $FC(G) \in \mathcal{V}$ (lemme **2.3.2**) et $G \in \mathcal{V} = \mathcal{B}_d \cup \mathcal{F}$ (lemme **2.3.1**), ce qui implique que $G^d = 1$. Si $FC(G)$ est fini, alors G^d l'est ausi. ■

Théorème 2.3.5

$\mathcal{V} \cup \mathcal{F} = \mathcal{V}^*$

Démonstration

Soit G un groupe infini de $\mathcal{V}^*$ et supposons que $G \notin \mathcal{V}$. On a G^d est fini (corollaire 2.3.4), posons $H = C_G\left(G^d\right)$ alors G/H est fini (car $G/H \simeq$ un sous - groupe de $Aut\left(G^d\right)$) et $a^d \in Z(H)$; $\forall a \in H$.

Prouvons que $H/FC(H)$ est d'exposant 2, où $FC(H)$ est le $FC-$centre de H. Supposons qu'il existe $a \in H$ tel que $a^2 \notin FC(H)$, alors $X = \{a^g / g \in H\}$ est infini (car il est clair que $C_H(a) \subset C_H(a^2)$ et $|H : C_H(a)| = |H : C_H(a^2)|\,|C_H(a^2) : C_H(a)|$).

Soit $X_1 = X_2 = ... = X_r = X$ comme $G \in \mathcal{V}^*$ alors il existe $g_1, ..., g_r \in H$ vérifiant

$$(a^{g_1})^{n_1} ..... (a^{g_r})^{n_r} = 1 = a^{n_1}.....a^{n_r}$$

$\left(\text{car } a^d \in Z(H)\right)$; on a $n_i = d\beta_i; \forall 1 \leq i \leq r$ alors

$$a^{n_1}....a^{n_r} = a^{n_1+.....+n_r} = (a^d)^{\beta_1+.....+\beta_n} = 1 \qquad (*)$$

Soit $Y = \{(a^2)^g / g \in H\}$, alors Y est infini $(a^2 \notin FC(H))$. On considère les ensembles : $X_1 = Y$ et $X_2 = ... = X_r = X$, comme $G \in \mathcal{V}^*$, alors $\exists h_1, ..., h_r \in H$ vérifiant :

$$\left(\left(a^2\right)^{h_1}\right)^{n_1} \left(a^{h_2}\right)^{n_2} ..... \left(a^{h_r}\right)^{n_r} = 1$$

Alors $a^{2n_1+n_{2+}.....+n_r} = 1$ et

$$\left(a^d\right)^{2\beta_1+\beta_{2+}.....+\beta_n} = 1 \qquad (**)$$

De $(*)$ et $(**)$, on en déduit que $\left(a^d\right)^{\beta_1} = 1$, de même en posant $X_1 = ... = X_{i-1} = X_{i+1} = ... = X_r = X$ et $X_i = Y$, on trouve que que $\left(a^d\right)^{\beta_i} = 1$ pour tout $i (1 \leq i \leq r)$. Mais $a^d = \left(a^d\right)^{\gamma_1\beta_1+.....+\gamma_r\beta_r}$ où $\gamma_i \in \mathbb{Z}$ (car $p\gcd(\beta_1, ..., \beta_n) = 1$), d'où $a^d = 1$. Ce qui implique que $(a^g)^d = 1; \forall g \in H$, donc l'ensemble $A = \{a^g / g \in H\}$ est fini (car si A est infini alors $A \in \mathcal{V} \Rightarrow G \in \mathcal{V}$ (lemme 2.3.2)). Alors $a \in FC(H)$, contradiction .

Comme $H/FC(H)$ est un 2-groupe alors $H/FC(H)$ est localement fini et $FC(H)$ est fini (si $FC(H)$ est infini alors $FC(H) \in V$ (lemme 2.3.1) $\Rightarrow G \in V$) donc H est lo-

calement fini, ce qui implique que H est fini (car si H est infini il existe un sous-groupe K abélien infini de H ; alors $K \in V \Rightarrow G \in \mathcal{V}$ (lemme 2.3.2)) d' où G est fini, contradiction.
□

Chapitre 3

Conditions combinatoires pour qu'un groupe infini appartienne à certaines variétés de groupes

3.1 Introduction

Soit G un groupe infini tel que pour toute paire $\{X, Y\}$ de parties infinies, il existe x dans X et y dans Y vérifiant $[x, y] = 1$. En utilisant le résultat de B. H. Neumann [34], le centre $Z(G)$ de G est d'indice fini ; donc $Z(G)$ est infini ; par suite, pour tous x, y dans G, les parties $xZ(G)$ et $yZ(G)$ sont infinies . Il existe donc u et v dans $Z(G)$ tels que $[xu, yv] = 1$, d'où $[x, y] = 1$; si bien que G est abélien, alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{V}([x, y]) = \mathcal{V}([x, y]^*)$.

En 2000, A. Abdollahi a démontré que $\mathcal{F} \cup \mathcal{V}([x, y^n]) = \mathcal{V}([x, y^n]^*)$, où $n \in \{3, 6, 2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Plus tard, A. Boukaroura [13] a généralisé le résultat de B.H.Neuman en démontrant que si $n \in \{2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ et si G est un groupe infini

tel que pour toute paire $\{X, Y\}$ de parties infinies, il existe x dans X et y dans Y, vérifiant $[x^n, y^n] = 1$, alors G est dans $\mathcal{V}([x^n, y^n])$.

On note $\mathfrak{L}$ la classe de groupes vérifiant :

" *Tout sous groupe infini d'un $\mathfrak{L}$-groupe, contient un sous-groupe abélien infini* "

D'après le Corollaire 2.5 dans [21], $\mathfrak{L}$ contient les $2-$groupes et les groupes localement finis.

Dans la première partie de ce chapitre, nous allons démontrer que si $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ vérifient :

- $n_2 \equiv 0\,[n_1]$
- $\mathcal{B}_{n_2} \leq \mathfrak{L}$

alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{V}([x^{n_1}, y^{n_2}]) = \mathcal{V}([x^{n_1}, y^{n_2}]^*)$. En particulier, si $n_2 \equiv 0\,[n_1]$ et $n_2 \in \{3, 6, 2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$, on a $\mathcal{F} \cup \mathcal{V}([x^{n_1}, y^{n_2}]) = \mathcal{V}([x^{n_1}, y^{n_2}]^*)$.

Il est clair que ce résultat généralise à la fois ceux de B.H.Neuman, de A.Abdollah et de A. Boukaroura.

P. Longobardi [27] a démontré si G est un groupe infini tel que pour toute partie infinie X , il existe x dans X vérifiant $x^n = 1$, alors G est d'exposant fini divisant n, d'où $\mathcal{F} \cup \mathcal{B}_n = \mathcal{V}((x^n)^*)$.A. Abdollahi et Taeri[8] ont amélioré le résultat de Longobardi ; ils ont prouvé que $\mathcal{F} \cup \mathcal{V}(x_1^{n_1}...x_r^{n_r}) = \mathcal{V}((x_1^{n_1}...x_r^{n_r})^*)$; où r, n_i $(1 \leq i \leq k)$ sont des entiers positifs.

A. Boukaroura a démontré que $\mathcal{F} \cup \mathcal{V}\,[(x_1^n x_2^n ... x_r^n)^2] = \mathcal{V}\,[((x_1^n x_2^n ... x_k^n)^2)^*]$ où $n \in \{2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la démonstration d'une généralisation du Thèorème de A. Boukaroura ; en fait on va prouver que
$\mathcal{F} \cup \mathcal{V}\,[(x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_r^{n_k})^2] = \mathcal{V}\,[((x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k})^2)^*]$ où $n_i \in \{6, 2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$

3.2 Conditions combinatoires pour qu'un groupe appartienne à la variété de groupes $\mathcal{V}([x^{n_1}, y^{n_2}])$

Soient n_1, n_2 deux entiers positifs, on note $u_{n_1,n_2}(x,y) = [x^{n_1}, y^{n_2}]$.

On note $\mathfrak{L}$ la classe de groupes vérifiant :

" *Tout $\mathfrak{L}$-groupe infini contient un sous-groupe abélien infini* "

Remarque : D'après le Corollaire 2.5 dans [21], $\mathfrak{L}$ contient les $2-$groupes et les groupes localement finis.

Proposition 3.2.1

Soit G un groupe. Pour tous $x, y, z \in G$ on a :

1-$[x,y]^z = [x^z, y^z]$

2- $[xy, z] = [x,z]^y [y,z]$

3- $[x, yz] = [x,z]\,[x,y]^z$

Démonstration.

Soient G un groupe et $x, y, z \in G$, alors :

1- On a :

$$\begin{aligned} [x,y]^z &= \left(x^{-1}y^{-1}xy\right)^z \\ &= (x^{-1})^z \left(\ y^{-1}\right)^z x^z y^z \\ &= (x^z)^{-1} \left(\ y^z\right)^{-1} x^z y^z \\ &= [x^z, y^z] \end{aligned}$$

2- On a :

$$\begin{aligned}
[x,z]^y\,[y,z] &= \left(x^{-1}z^{-1}xz\right)^y y^{-1}z^{-1}yz \\
&= y^{-1}x^{-1}z^{-1}xzyy^{-1}z^{-1}yz \\
&= y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz \\
&= (xy)^{-1}z^{-1}(xy)\,z \\
&= [xy,z]
\end{aligned}$$

3- On a :

$$\begin{aligned}
[x,yz] &= ([yz,x])^{-1} \\
&= ([y,x]^z\,[z,x])^{-1} \\
&= [x,z]\,[x,y]^z
\end{aligned}$$

Lemme 3.2.2 *Soient n_1, n_2 deux entiers positifs vérifiant $n_2 \equiv 0\,[n_1]$. Si G est un $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x,y)^*)$-groupe infini, alors pour tout $g \in G$, on a $C_G(g^{n_2})$ est infini.*

Démonstration.

Soient n_1, n_2 deux entiers positifs tels que $n_2 \equiv 0\,[n_1]$, et G un $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x,y)^*)$-groupe infini. En vu de trouver une contradiction, supposons que G contient un élément g tel que $C = C_G(g^{n_2})$ soit fini. Le groupe G étant infini, $G \setminus C$ est donc infini, d'où il existe $g_1 \in G$ et $g_1 \notin C$. Considérons l'ensemble $\{g_1, g_2, ..., g_m\}$ des éléments de G vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $g_i \notin C$, pour tout $i = 1, 2, ..., m$.

(2) $g_i g_j^{-1} \notin C$, pour tous $i, j = 1, 2, ..., m$, avec $i \neq j$.

(3) $g_i g_j^{-1} g_k g_l^{-1} \notin C$, pour tous $i, j, k, l = 1, 2, ..., m$, avec i, j, k, l distincts deux à deux.

Soit

$$D = C \cup (\cup_{i=1,..,m} C g_i) \cup \left(\cup_{i,l,k=1,..,m} C g_l g_k^{-1} x_i\right) \cup \left(\cup_{i,j,k=1,..,m} g_i g_j^{-1} g_k C^{x_k}\right).$$

D étant réunion finie de parties finies de G est finie; et comme G est infini, alors $G \setminus D$ est infini. Il existe donc un élément $g_{m+1} \in G \setminus D$; il est aisé de voir que l'ensemble $\{g_1, g_2, ..., g_m, g_{m+1}\}$ vérifie les propriétés (1), (2) et (3). On obtient ainsi une partie infinie $\{g_1, g_2, ..., g_m, g_{m+1}, ...\}$ d'éléments de G qui vérifient les propriétés (1), (2) et (3). Rappelons que tout ensemble infini admet une partition dénombrable de parties infinies. Soient I et J une réunion disjointe de $\mathbb{N}^*$ *i.e* :

$$\mathbb{N}^* = I \dot{\cup} J$$

où $I = \dot{\cup}_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{I}_n$, $J = \dot{\cup}_{n\in\mathbb{N}^*}$et les $\mathcal{I}_n$, $\mathcal{J}_n$ sont des parties infinies de $\mathbb{N}^*$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soient $A_n = \{g^{g_i} \mid i \in \mathcal{I}_n\}$ et $B_n = \{g^{g_j} \mid j \in \mathcal{J}_n\}$. Montrons que A_n et B_n sont deux parties infinies de G. En effet supposons, par exemple, que A_n est finie, alors il existe $k, l \in \mathcal{I}_n$ tel que $g^{g_k} = g^{g_l}$, d'où $g^{g_k g_l^{-1}} = 1$ *i.e* $g_k g_l^{-1} \in C$. Ce qui est une contradiction car $\{ g_1, g_2, ..., g_m, g_{m+1}, ...\}$ vérifie la prpriété (2), donc A_n et B_n sont infinies.

Comme G est un $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x,y)^*)$-groupe, il existe donc $i_n \in \mathcal{I}_n$ et $j_n \in \mathcal{J}_n$ tels que

$$[(g^{g_{i_n}})^{n_1}, (g^{g_{j_n}})^{n_2}] = 1$$

comme $n_2 \equiv 0\,[n_1]$, on a

$$[(g^{g_{i_n}})^{n_2}, (g^{g_{j_n}})^{n_2}] = 1$$

mais

$$[(g^{g_{i_n}})^{n_2}, (g^{g_{j_n}})^{n_2}] = [(g^{n_2})^{g_{i_n} g_{j_n}^{-1}}, g^{n_2}]^{g_{j_n}} = 1$$

On en déduit que $(g^{n_2})^{g_{i_n} g_{j_n}^{-1}} \in C$. Alors l'ensemble $\{(g^{n_2})^{g_{i_n} g_{j_n}^{-1}} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ étant in-

clus dans C est fini ; alors il existe deux entiers distincts $p, l \in \mathbb{N}^*$ tels que $(g^{n_2})^{g_{i_p} g_{j_p}^{-1}} = (g^{n_2})^{g_{i_l} g_{j_l}^{-1}}$, d'où $(g^{n_2})^{g_{i_p} g_{j_p}^{-1} g_{j_l} g_{i_l}^{-1}} = g^{n_2}$, il s'ensuit que $g_{i_p} g_{j_p}^{-1} g_{j_l} g_{i_l}^{-1} \in C$ ce qui contredit le choix de $g_1, g_2, ..., g_m, g_{m+1}, ...$. Donc, $C_G(g^{n_2})$ est bien infini, ce qui achève la démonstration du lemme. ■

Lemme 3.2.3

Soient n_1, n_2 deux entiers positifs tels que $n_2 \equiv 0\,[n_1]$. Alors *on a*

$$(\mathcal{B}_{n_2} \leq \mathfrak{L}) \Rightarrow (\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x,y)^*) \leq \mathfrak{L})$$

Démonstration.

Soient n_1, n_2 deux entiers positifs tels que $n_2 \equiv 0\,[n_1]$ et supposons que $\mathcal{B}_{n_2} \leq \mathfrak{L}$. Soit G un $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x,y)^*)$-groupe infini. Si X et Y sont deux parties infinies, il existe a dans X_1 et $b \in X_2$ $[a^{n_1}, b^{n_2}] = 1$

Mais $n_2 = kn_1$ $(k \in \mathbb{N})$, alors $[a^{n_2}, b^{n_2}] = \left[(a^{n_1})^k, b^{n_2}\right] = 1$. Donc G est un $\mathcal{V}([x^{n_2}, y^{n_2}]^*)-$groupe infini, d'après le lemme 2.3 de [13], G possède un sous-groupe abélien infini et G est un $\mathfrak{L}-$groupe. ■

Lemme 3.2.4

Soient G un $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x,y)^*)$-groupe infini et A un sous-groupe abélien infini de G. Alors pour tout $g \in G$ l'ensemble :

$$A(g) = \{a \in A / [g^{n_1}, a^{n_2}] = 1\}$$

est une partie infinie de G.

Démonstration.

Soient G un $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x,y)^*)$-groupe infini et A un sous-groupe abélien infini de G et soit g un élément arbitraire de G. Considérons l'ensemble $g^A = \{g^a |\ a \in A\}$ des conjugués de g dans A.

Si g^A est fini, alors $C_A(g)$ est infini, et comme $C_A(g) \subset Z(\langle A, g\rangle)$, $Z(\langle A, g\rangle)$ est un sous-groupe normal abélien infini de $\langle A, g\rangle$, il s'ensuit, en vertu du lemme 2.2.2, que $\langle A, g\rangle$ est un $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x, y))$-groupe ; donc on a l'égalité $[g^{n_1}, a^{n_2}] = 1$, et ceci est vrai pour tout $a \in A$. Par suite $A(g) = A$, et $A(g)$ est donc infini.

Maintenant, supposons g^A infini. Si $A \setminus A(g)$ est fini, alors $A(g)$ est infini. Sinon on peut supposer aussi que $A \setminus A(g)$ est infini. Donc g^A et $A \setminus A(g)$ sont deux parties infinies de G, alors il existe a_1 dans A, a_2 dans $A \setminus A(g)$, vérifiant $[(g^{a_1})^{n_1}, a_2^{n_2}] = 1$.Mais

$$\begin{aligned}[(g^{a_1})^{n_1}, a_2^{n_2}] &= [g^{n_1}, (a_2^{n_2})^{a_1^{-1}}]^{a_1} \\ &= [g^{n_1}, a_2^{n_2}]^{a_1}\end{aligned}$$

d'où $[g^{n_1}, a_2^{n_2}] = 1$, ce qui est contradictoire. ■

Théorème 3.2.5 *Soient n_1, n_2 deux entiers positifs tels que $n_2 \equiv 0\,[n_1]$ et $\mathcal{B}_{n_2} \leq \mathfrak{L}$. Alors tout $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x, y)^*)$-groupe infini est un $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x, y))$-groupe.*

Démonstration.

Soit G un groupe infini tel pour toutes parties infinies X_1 et X_2 , il existe $a_1$dans X_1 et $a_2 \in X_2$ vérifiant $[a_1^{n_1}, a_2^{n_2}] = 1$. Montrons que G est un $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x, y))$-groupe *i.e* que $[g_1^{n_1}, g_2^{n_2}] = 1$ où g_1, g_2 sont deux éléments arbitraires de G .

D'après le Lemme 3.2.2 $C_G(g_2^{n_2})$ est infini, et d'après le Lemme 3.2.3, $C_G(g_2^{n_2})$ contient un sous-groupe abelien infini noté A. Afin de montrer que $[g_1^{n_1}, g_2^{n_2}] = 1$, nous allons considérer les quatre cas suivants :

1^{er} Cas : $C_A(g_1)$ infini et $C = C_A(g_2)$ infini. Donc C est un sous-groupe abélin infini de $A \leq C_G(g_2^{n_2})$. Notons :

$$C(g_1) = \{a \in C / \, [g_1^{n_1}, a^{n_2}] = 1\}$$

D'après le lemme 3.2.4 $C(g_1)$ est infini. Considérons les deux parties infinies $g_1C_A(g_1)$ et $g_2C(g_1)$. Alors il existe $a_1 \in C_A(g_1)$ et $a_2 \in C(g_1)$ tels que $[(g_1a_1)^{n_1}, (g_2a_2)^{n_2}] = 1$. On a

$$\begin{aligned}
[(g_1a_1)^{n_1}, (g_2a_2)^{n_2}] &= [g_1^{n_1}a_1^{n_1}, g_2^{n_2}a_2^{n_2}] \\
&= [g_1^{n_1}, g_2^{n_2}{a_2}^{n_2}]^{a_1^{n_1}} [a_1^{n_1}, g_2^{n_2}{a_2}^{n_2}] \\
&= \left([g_1^{n_1}, {a_2}^{n_2}] [g_1^{n_1}, g_2^{n_2}]^{{a_2}^{n_2}}\right)^{a_1^{n_1}} [a_1^{n_1}, g_2^{n_2}a_2]
\end{aligned}$$

Mais $[g_1^{n_1}, {a_2}^{n_2}] = 1$ car $a_2 \in C(g_1)$, et

$$\begin{aligned}
[a_1^{n_1}, g_2^{n_2}{a_2}^{n_2}] &= [a_1^{n_1}, {a_2}^{n_2}] [a_1^{n_1}, g_2^{n_2}]^{{a_2}^{n_2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

car $a_1 \in C_A(g_1) \leq A \leq C_G(g_2^{n_2})$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
[(g_1a_1)^{n_1}, (g_2a_2)^{n_2}] &= [g_1^{n_1}, g_2^{n_2}]^{{a_2}^{n_2}{a_1}^{n_1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $[g_1^{n_1}, g_2^{n_2}] = 1$.

$2^{\text{ème}}$ Cas : $C_A(g_1)$ infini et $C = C_A(g_2)$ fini. Alors $g_2^A = \{g_2^a / a \in A\}$ est infini. Considérons les deux parties infinies $g_1C_A(g_1)$ et $g_2^A = \{g_2^a / a \in A\}$, il existe donc $a_1 \in C_A(g_1)$ et $a_2 \in A$ tels

que $[(g_1a_1)^{n_1}, (g_2^{a_2})^{n_2}] = 1$. On a

$$\begin{aligned}
[(g_1a_1)^{n_1}, (g_2^{a_2})^{n_2}] &= [g_1^{n_1}a_1^{n_1}, (g_2^{n_2})^{a_2}] \\
&= [g_1^{n_1}, (g_2^{n_2})^{a_2}]^{a_1^{n_1}} [a_1^{n_1}, (g_2^{n_2})^{a_2}] \\
&= [g_1^{n_1}, (g_2^{n_2})^{a_2}]^{a_1^{n_1}} [a_1^{n_1}, g_2^{n_2}]^{a_2}
\end{aligned}$$

Mais $[a_1^{n_1}, g_2^{n_2}]^{a_2} = 1$ et $(g_2^{n_2})^{a_2} = g_2^{n_2}$ car $a_1, a_2 \in A \leq C_G(g_2^{n_2})$, d'où

$$\begin{aligned}[(g_1a_1)^{n_1}, (g_2^{a_2})^{n_2}] &= [g_1^{n_1}, g_2^{n_2}]^{a_1^{n_1}} \\ &= 1\end{aligned}$$

Ce qui implique que $[g_1^{n_1}, g_2^{n_2}] = 1$.

$3^{\text{ème}}$ Cas : $C_A(g_1)$ est fini et $C = C_A(g_2)$ est infini. Notons :

$$C(g_1) = \{a \in C / [g_1^{n_1}, a^{n_2}] = 1\}$$

D'après le Lemme 3.2.4 $C(g_1)$ est infini. Considérons les deux parties infinies $g_1^A = \{g_1^a / a \in A\}$ et $g_2C(g_1)$. Alors il existe $a_1 \in A$ et $a_2 \in C(g_1)$ tels que $[(g_1^{a_1})^{n_1}, (g_2a_2)^{n_2}] = 1$. On a :

$$\begin{aligned}[(g_1^{a_1})^{n_1}, (g_2a_2)^{n_2}] &= [(g_1^{n_1})^{a_1}, g_2^{n_2}a_2{}^{n_2}] \\ &= [(g_1^{n_1})^{a_1}, a_2{}^{n_2}]\,[(g_1^{n_1})^{a_1}, g_2^{n_2}]^{a_2{}^{n_2}} \\ &= [g_1^{n_1}, a_2{}^{n_2}]^{a_1}\,[g_1^{n_1}, g_2^{n_2}]^{a_1a_2{}^{n_2}}\end{aligned}$$

Mais $[g_1^{n_1}, a_2{}^{n_2}]^{a_1} = 1$ car $a_2 \in C(g_1)$, alors

$$\begin{aligned}[(g_1^{a_1})^{n_1}, (g_2a_2)^{n_2}] &= [g_1^{n_1}, g_2^{n_2}]^{a_1a_2{}^{n_2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

Ce qui implique que $[g_1^{n_1}, g_2^{n_2}] = 1$.

$4^{\text{ème}}$ Cas : $C_A(g_1)$ est fini et $C = C_A(g_2)$ est fini. Considérons les parties infinies $g_1^A = \{g_1^a / a \in A\}$ et $g_2^A = \{g_2^a / a \in A\}$. Alors il exite $a_1, a_2 \in A$ tels que $[(g_1^{a_1})^{n_1}, (g_2^{a_2})^{n_2}] = 1$.

On a :

$$\begin{aligned}[(g_1^{a_1})^{n_1}, (g_2^{a_2})^{n_2}] &= [(g_1^{n_1})^{a_1}, (g_2^{n_2})^{a_2}] \\ &= [(g_1^{n_1})^{a_1}, g_2^{n_2}]\end{aligned}$$

Mais $[g_1^{n_1}, g_2^{n_2}] = ([(g_1^{n_1})^{a_1}, g_2^{n_2}])^{a_1^{-1}}$, ce qui implique que $[g_1^{n_1}, g_2^{n_2}] = 1$.■

Corollaire 3.2.6 *Soit G un $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x,y)^*)$-groupe infini. Si $n_2 \equiv 0\,[n_1]$ et $n_2 \in \{3, 6, 2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$, alors tout $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x,y)^*)$-groupe infini est un $\mathcal{V}(u_{n_1,n_2}(x,y))$-groupe.*

Démonstration

Si n_1, n_2 sont deux entiers positifs tels que $n_2 \equiv 0\,[n_1]$ et $n_2 \in \{3, 6, 2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$, d'après la remarque, $\mathcal{B}_{n_2} \leq \mathfrak{L}$, d'où le résultat.

3.3 Conditions combinatoires pour qu'un groupe appartienne à la variété de groupes $\mathcal{V}((x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r})^2)$

Proposition 3.3.1 [*Lemme de Dicman*]

Soient G un groupe et X une partie de G, normale[1] finie dont tout les éléments sont d'ordre fini, alors $\langle X\rangle$ est sous-groupe normal fini.

Demonstration.

Soient n le cardinal le X et $m = ppcm\{|x| / x \in X\}$. On a

$$\forall g \in \langle X\rangle, \exists t(g) \in \mathbb{N}^* / g = x_1x_2...x_{t(g)};\ x_i \in X(1 \leq i \leq t(g)) \qquad (*)$$

Montrons que $\forall g \in \langle X\rangle : t(g) \leq n(m-1)$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $g \in \langle X\rangle$ tel que $t(x) = t > n(m-1)$. D'après le principe de Pigeon, un des éléments de X, noté x, apparait, au moins, m fois dans l'expression $(^*)$. Soit x_i le premier terme dans $(^*)$ vérifiant $x = x_i$. Possons $x'_j = x^{-1}x_jx$ pour tout $j < i$, alors $x'_j \in X$ et

$$g = xx_1^{'}\ldots x_{i-1}^{'}x'_{i+1}...x'_{t(g)}$$

dans cette écriture on a pu déplacer x_i de la $i^{ème}$ position dans $(*)$ à la première. Dans $x_1^{'}\ldots x_{i-1}^{'}x'_{i+1}...x'_{t(g)}$, x apparait, au moins, $m-1$. On refait la même chose m-fois, on obtient

$$g = x^m x_1^* x_2^* ... x_{t-m}^*;\ x_i^* \in X(1 \leq i \leq t-m) \qquad (*)$$

Mais $x^m = 1$, ce qui nous donne une contradiction. ■

Lemme 3.3.2

[1] $\forall x \in X, \forall g \in G : x^g \in X$

Soit $\omega_{n,n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r) = (x_1^{n_1}...x_r^{n_{r1}})^n$ *tel que* $d \equiv 0\,[n]$, *où* $d = pgcd(n_i)$. *Alors tout* $\mathcal{V}(\omega_{n,n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)^*)$*-groupe infini est un* $\mathcal{B}_{nd}$*-groupe.*

Démonstration.

Soit G un $\mathcal{V}(\omega_{n,n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)^*)$-groupe infini et soit $d = \underset{1\leq i\leq r}{pgcd}(n_i)$. Montrons que G est un $\mathcal{B}_{nd}-$groupe. Soit $X = \{g \in G \ / \ g^d = 1\}$.

Si X est infini, soit Y une partie infinie quelconque de G. Pour tout t; $1 \leq t \leq r$, considérons les parties infinies de G :

$$\begin{aligned} X_1 &= \cdots = X_{t-1} = X \\ X_t &= Y \\ X_{t+1} &= \cdots = X_r = X \end{aligned}$$

Alors il existe $a \in Y$ et $a_1, \cdots a_{t-1}, a_{t+1}, \cdots, a_r \in X$ tels que $(a_1^{n_1} \ldots a_{t-1}^{n_{t-1}} a^{n_t} a_{t+1}^{n_{t+1}} ... a_r^{n_r})^n = 1$. Pour tout $i; i = 1, \ldots, t-1, t+1, \ldots, r$, on a $a_i^{n_i} = 1$, car $n_i \equiv 0\,[d]$ et $a_i \in X$. Alors $a^{nn_t} = 1$ et G est un $\mathcal{V}((x^{nn_t})^*)$-groupe infini ; d'après le théorème 2.3.5, G est un $\mathcal{V}(x^{nn_t})$-groupe. D'où G est dans $\overset{r}{\underset{t=1}{\cap}} \mathcal{B}_{nn_t} \leq \mathcal{B}_e$, où $e = pgcd(nn_i) = dn$.

Supposons X fini. Donc X est un sous-ensemble normal fini d'éléments d'ordre fini de G, alors, d'après le Lemme 3.3.1, $N = \langle X \rangle$ est un sous-groupe normal fini de G. Soient $\overline{X_1}$, $\overline{X_2}$, ..., $\overline{X_r}$, des parties infinies de $\frac{G}{N}$ telles que $\overline{X_i} = \{aN \ / \ a \in X_i\}$, où les X_i $(1 \leq i \leq r)$ sont des parties infinies de G. Comme G est un $\mathcal{V}(\omega_{n,n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)^*)$-groupe, alors il existe $a_i \in X_i$ $(1 \leq i \leq n)$ tels que $(a_1^{n_1}...a_r^{n_r})^n = 1$. Comme $d \equiv 0\,[n]$, alors $(a_1^{n_1}...a_r^{n_r})^d = 1$, d'où $a_1^{n_1}...a_r^{n_r} \in X \subset N$. Donc

$$\begin{aligned} (a_1^{n_1}...a_r^{n_r})N &= (a_1^{n_1}N)...(a_r^{n_r}N) \\ &= (a_1N)^{n_1}...(a_rN)^{n_r} \\ &= N \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\frac{G}{N}$ est un $\mathcal{V}((x_1^{n_1}...x_k^{n_k})^*)$-groupe infini ; d'après le théorème 2.3.5, $\frac{G}{N}$ est $\mathcal{V}(x_1^{n_1}...x_k^{n_k})$-groupe, d'où $\frac{G}{N} \in \mathcal{B}_d$ et $G^d \leq N$ et G^d est fini. Soit $C = C_G(G^d)$; il est clair que $C = \bigcap\limits_{1\leq i\leq r} C_G(G^{n_i})$ et $\frac{G}{C}$ est fini. Comme G est infini, alors C est un $\mathcal{V}(\omega_{n,n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)^*)$-groupe infini. Montrons que C est un $\mathcal{B}_{dn}$-groupe. En effet, si $C_1, \cdots, C_r$ sont des parties infinies de C, il existe $c_i \in C_i$ tels que $(c_1^{n_1} \cdots c_r^{n_r})^n = 1$. Comme $[c_k^{n_k}, c_l^{n_l}] = 1$; pour tout k, l $(1 \leq k \leq r$ et $1 \leq l \leq r)$, alors $(c_1^{n_1} \cdots c_r^{n_r})^n = c_1^{nn_1} \cdots c_r^{nn_r} = 1$. D'où C est un $\mathcal{V}((x_1^{nn_1}...x_k^{nn_k})^*)$-groupe infini ; d'après le théorème 2.3.5, C est un $\mathcal{B}_e-$groupe, où $e = pgcd(nn_i) = dn$.

Soit, maintenant Y une partie infinie de G. Pour tout t; $1 \leq t \leq r$, considérons les parties infinies de G; $X_1 = X_2 = \cdots = X_{t-1} = C$, $X_t = Y, X_{t+1} = \cdots = X_r = C$. Alors il existe $a \in Y$ et $a_1, \cdots a_{t-1}, a_{t+1}, \cdots, a_r \in C$ tels que $(a_1^{n_1} \ldots a_{t-1}^{n_{t-1}} a^n a_{t+1}^{n_{t+1}} ... a_r^{n_r})^n = 1$. Mais $d \equiv 0\,[n]$, alors

$$\begin{aligned}(a_1^{n_1} \ldots a_{t-1}^{n_{t-1}} a^{n_t} a_{t+1}^{n_{t+1}} ... a_r^{n_r})^d &= a_1^{dn_1} \ldots a_{t-1}^{dn_{t-1}} a^{dn} a_{t+1}^{dn_{t+1}} ... a_r^{dn_r} \\ &= a^{dn_t} \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc G est dans $\bigcap\limits_{1\leq t\leq r} \mathcal{B}_{nn_t} \leq \mathcal{B}_{nd}$. Ce qui achève la démonstration du lemme. ■

Lemme 3.3.3

Soit $\omega_{2,n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r) = (x_1^{n_1}...x_r^{n_r})^2$ *tel que* $d \equiv 0\,[2]$, *où* $d = pgcd(n_i)$. *Alors* Tout $\mathcal{V}(\omega_{2,n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)^*)$*-groupe infini est un* $\bigcap\limits_{\substack{1\leq k\leq r \\ 1\leq l\leq r}} \mathcal{V}\,([x_k^{n_k}, x_l^{n_l}])$-groupe.

Démonstration.

Soit G un $\mathcal{V}(\omega_{2,n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)^*)$-groupe infini avec $d \equiv 0\,[2]$, où $d = pgcd(n_i)$ et notons $X = \{g \in G \ / \ g^d = 1\}$. Montrons que G est un $\mathcal{V}\,([x_k^{n_k}, x_l^{n_l}])$-groupe ; pour tout k, l ($1 \leq k \leq l \leq r$). D'après le lemme 3.3.2, on peut supposer ausi que G est $\mathcal{B}_{2d}$.

Si X est infini. Soient Y, Z deux parties infinies de G, considérons les parties infinies de G :

$$\begin{aligned} X_1 &= \cdots = X_{k-1} = X \\ X_k &= Y \\ X_{k+1} &= \cdots = X_{l-1} \\ X_l &= Z \\ X_{l+1} &= X, \cdots, X_r = X \end{aligned}$$

Alors il existe $a \in Y, b \in Z$ et $a_1, \cdots a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_{l-1}, a_{l+1}, \cdots, a_r \in X$ tels que $(a_1^{n_1} \ldots a_{k-1}^{n_{k-1}} a^{n_k} a_{k+1}^{n_{k+1}} \ldots a_{l-1}^{n_{l-1}} b^{n_l} a_{l+1}^{n_{l+1}} \ldots a_r^{n_r})^2 = 1$. Donc $(a^{n_k} b^{n_l})^2 = 1$, d'après le lemme 3.3.2, G est un $\bigcap\limits_{1 \leq t \leq r} \mathcal{B}_{nn_i}-$groupe, alors

$$\begin{aligned} [a^{n_k}, b^{n_l}] &= (a^{n_k} b^{n_l})^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et G est un $\mathcal{V}(\ [x_k^{n_k}, x_l^{n_l}]^*)$-groupe, d'après le théorème 3.2.5**,** est un $\mathcal{V}\ ([x_k^{n_k}, x_l^{n_l}])$-groupe.

Supposons que X soit fini. Donc X est un sous-ensemble normal fini d'éléments d'ordre fini de G, et $N = \langle X \rangle$ est un sous-groupe normal fini de G et . Soient $\overline{X_1}$, $\overline{X_2}$, ..., $\overline{X_r}$, des parties infinies de $\frac{G}{N}$ telles que $\overline{X_i} = \{aN \ / \ a \in X_i\}$, où les X_i $(1 \leq i \leq r)$ sont des parties infinies de G. Comme G est un $\mathcal{V}(\omega_{d,n_1,\ldots,n_r}(x_1, ..., x_r)^*)$-groupe, alors il existe $a_i \in X_i$ $(1 \leq i \leq n)$ tels que $(a_1^{n_1} ... a_r^{n_r})^n = 1$. Comme $d \equiv 0\,[2]$, alors $(a_1^{n_1} ... a_r^{n_r})^d = 1$, d'où $a_1^{n_1} ... a_r^{n_r} \in X \subset N$. Donc

$$\begin{aligned} (a_1^{n_1} ... a_r^{n_r})N &= (a_1^{n_1} N) ... (a_r^{n_r} N) \\ &= (a_1 N)^{n_1} ... (a_r N)^{n_r} \\ &= N \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\frac{G}{N}$ est un $\mathcal{V}((x_1^{n_1}...x_k^{n_k})^*)$-groupe infini, d'après le théorème 2.3.5, $\frac{G}{N}$ est $\mathcal{V}(x_1^{n_1}...x_k^{n_k})$-groupe, d'où $\frac{G}{N} \in \mathcal{B}_d$ et $G^d \leq N$ et G^d est fini. Soit $C = C_G(G^d)$,

il est clair que $C = \underset{1\leq i\leq r}{\cap} C_G(G^{n_i})$ et $\frac{G}{C}$ est fini. Comme G est infini, alors C est $\mathcal{V}(\omega_{2,n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)^*)$-groupe infini, alors C est un $\mathcal{B}_{2d}$-groupe. Soient Y, Z deux parties infinies de G ; considérons les parties infinies de G :

$$\begin{aligned} X_1 &= \cdots = X_{k-1} = C \\ X_k &= Y \\ X_{k+1} &= \cdots = X_{l-1} = C \\ X_l &= Z \\ X_{l+1} &= \cdots = X_r = C \end{aligned}$$

Alors il existe $a \in Y, b \in Z$ et $a_1, \cdots a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_{l-1}, a_{l+1}, \cdots, a_r \in C$ tels que

$$\begin{aligned} (a_1^{n_1} \dots a_{k-1}^{n_{k-1}} a^{n_k} a_{k+1}^{n_{k+1}} ... a_{l-1}^{n_{l-1}} b^{n_l} a_{l+1}^{n_{l+1}} ... a_r^{n_r})^2 &= (a_1^{n_1} \dots a_{k-1}^{n_{k-1}} a_{k+1}^{n_{k+1}} ... a_{l-1}^{n_{l-1}} a_{l+1}^{n_{l+1}} ... a_r^{n_r} a^{n_k} b^{n_l})^2 \\ &= (a_1^{n_1} \dots a_{k-1}^{n_{k-1}} a_{k+1}^{n_{k+1}} ... a_{l-1}^{n_{l-1}} a_{l+1}^{n_{l+1}} ... a_r^{n_r})^2 (a^{n_k} b^{n_l})^2 \\ &= (a_1^{2n_1} \dots a_{k-1}^{2n_{k-1}} a_{k+1}^{2n_{k+1}} ... a_{l-1}^{2n_{l-1}} a_{l+1}^{2n_{l+1}} ... a_r^{2n_r})^2 (a^{n_k} b^{n_l})^2 \\ &= (a^{n_k} b^{n_l})^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $(a^{n_k} b^{n_l})^2 = [b^{n_k}, b^{n_l}] = 1$ G est un $\mathcal{V}(\ [x_k^{n_k}, x_l^{n_l}]^*)$-groupe, d'après le Théorème 3.2.5**,** G est un $\mathcal{V}\ ([x_k^{n_k}, x_l^{n_l}])$-groupe. ■

Théorème 3.3.4

Soit $\omega_{2,n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r) = (x_1^{n_1}...x_r^{n_r})^2$ *tel que* $n_i \in \{6, 2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. *Alors tout* $\mathcal{V}(\omega_{2,n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)^*)$*-groupe infini est un* $\mathcal{V}(\omega_{2,n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)^*)$*-groupe.*

Démonstration :

Soit G un $\mathcal{V}(\omega_{2,n_1,\ldots,n_r}(x_1,\ldots,x_r)^*)$-groupe infini avec $n_i \in \{6, 2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Alors $d = pgcd(n_i) \in \{6, 2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$, donc $d \equiv 0\,[2]$. D'après le lemme 3.3.2, G est un $\mathcal{B}_{2d}$-groupe, et d'après le lemme précédent, G est un $\bigcap_{\substack{1 \leq k \leq r \\ 1 \leq l \leq r}} \mathcal{V}([x_k^{n_k}, x_l^{n_l}])$-groupe. Alors pour tout $a_1, \cdots, a_r \in G$, on a $(a_1^{n_1} \ldots a_r^{n_r})^2 = a_1^{2n_1} \ldots a_r^{2n_r} = 1$. D'où G est un $\mathcal{V}(\omega_{2,n_1,\ldots,n_r}(x_1,\ldots,x_r))$-groupe. ■

Bibliographie

[1] A. Abdollahi, A. Mohammadi Hassanabadi et B. Taeri, '*A property equivalent to n-permutability for infinite groups'*, J. Algebra **221** (1999), 570-578.

[2] A. Abdollahi et B. Taeri, *'A condition on finitely generated soluble groups'*, Comm. Algebra **27** (1999), 5633-5638.

[3] A. Abdollahi et B. Taeri, *'Some conditions on infinite subsets of infinite groups',* Bull. Malaysian Math. Soc. (2) **22** (1999), 87-93.

[4] A. Abdollahi, *'A characterization of infinite 3-abelian groups',* Arch. Math. **73** (1999), 104-108.

[5] A. Abdollahi, '*Finitely generated soluble groups with an Engel condition on infinite subsets'*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **103** (2000), 47-49.

[6] A. Abdollahi, *'Some Engel conditions on infinite subsets of certain groups'*, Bull. Austral. Math. Soc. **62** (2000), 141-148.

[7] A. Abdollahi, *'Infinite groups with an Engel condition on infinite subsets'*, Bull. Iranian Math. Soc. **26** (2000), 73-79.

[8] A. Abdollahi et B. Taeri, *'A condition on certain variety of groups'*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **104** (2000), 129-134.

[9] A. Abdollahi, *'Some Engel conditions on finite subsets of certain groups',* Houston J. Math. **27** (2001), 511-522.

[10] A. Abdollahi, A. Mohammadi Hassanabadi, *'A permutability problem in infinite groups and Ramsey's theorem'*, Bull. Austral. Math. Soc. **64** (2001), 232.

[11] A. Abdollahi et N. Trabelsi, *'Quelques extensions d'un problème de Paul Erdos sur les groupes'*, Bull. Belg. Math. Soc. **9** (2002), 1-11.

[12] Abdollahi et B. Taeri, *'A combinatorial problem in infinite groups'*, Bull. Malaysian Math. Soc. (2003).

[13] A. Boukaroura, '*Two conditions for infinite groups to satisfy certain law*' Algebra Colloq. 10 :1 (2003), 75-80

[14] A. Boukaroura, *'A combinatorial problem in certain variety of groups'*,

[15] C. Delizia, *'Finitely generated soluble groups with a condition on infinite subsets'*, Rend. Sci. Mat. Appl. Ser. *A* **128** (1994), 201-208.

[16] C. Delizia, '*On groups with a nilpotence condition on infinite subsets*', Algebra colloq. **2** (1995), 97-104.

[17] C. Delizia, *'On certain residually finite groups*', Comm. Algebra 24 (1996), 3531-3535.

[18] C. Delizia, A. H. Rhemtulla et H. Smith, *'Locally graded groups with a nilpotence condition on infinite subsets',* J. Austral. Math. Soc. (series A) **69** (2000), 415-420.

[19] G. Endimioni, *'On a combinatorial problem in varieties of groups',* Comm. in Algebra **23** (1995), 5297-5307.

[20] G. Endimioni, *'Groups in which certain equations have many solutions'*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **106** (2001), 77-82.

[21] O.H. Kegel and B.A.F. Wehrfrits, '*Locally finite groups'*, North-Holland, Amsterdam 1973.

[22] P. S. Kim, *'A condition for locally soluble groups to be metabelian'*, Houston J. Math. **20** (1994), 193-199.

[23] Y. K. Kim et A. H. Rhemtulla, *'On locally graded groups'*, Proceedings of Groups-Korea 94, Walter de Gruyter & Co, (Berlin, New York 1995), 1-197.

[24] J. C. Lennox and J. E. Roseblade, *'Centrality in finitely generated soluble groups'*, J. Algebra **16** (1970), 399-435.

[25] J. C. Lennox, A. M. Hassanabadi et J. Wiegold, *'Some commutativity criteria'*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **84** (1990), 135-141.

[26] J. C. Lennox and J. Wiegold, *'Extensions of a problem of Paul Erdos on groups',* J. Austral. Math. Soc. Ser. *A* **31** (1981), 459-46.

[27] P. Longobardi, M. Maj et A. H. Rhemtulla, *'Infinite groups in a given variety and Ramsey's theorem'*, Comm. in Algebra **20** (1992), 127-139.

[28] P. Longobardi, M. Maj, A. H. Rhemtulla et H. Smith, *'Periodic groups with many permutable subgroups'*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **53** (1992), 116-119.

[29] P. Longobardi et M. Maj, '*A finiteness condition concerning commutators in groups'*, Houston J. Math. **19** (1993), 505-512.

[30] P. Longobardi and M. Maj, '*Finitely generated soluble groups with an Engel condition on infinite subsets'*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **89** (1993), 97-102.

[31] P. Longobardi, M. Maj et H. Smith, *'A note on locally graded groups'*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **94** (1995), 275-277.

[32] P. Longobardi, M. Maj, A. Mann et A. H. Rhemtulla, *'Groups with many nilpotent subgroups',* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **95** (1996), 143-152.

[33] P. Longobardi, '*On locally graded groups with an Engel condition on infinite subsets'*, Arch. Math. **76** (2001), 88

[34] B. H. Neumann, *'A problem of Paul Erdos on groups'*, J. Austral. Math. Soc. ser. *A* **21** (1976), 467-

[35] H. Neumann, '*Varieties of groups*', Springer-verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1967.

[36] A. H. Rhemtulla et H. Smith, *'On infinite locally finite groups*', Canad. Math. Bull. **20** (1994), 1-8.

[37] D. J. S. Robinson, '*Finiteness conditions and generalized soluble groups*', Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1972.

[38] D. J. S. Robinson, '*A course in the theory of groups*', Springer-verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1982.

[39] C.Delizia. '*On groups with a Nilpotence Condition On infinite Subsets*', Algebra Colloq. 2 :2 (1995), 97-104.

[40] L. S. Spiezia, '*Infinite locally soluble k-Engel groups*', Atti Accad. Naz. Lincei Rend. cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **3** (1992), 177-183.

[41] L. S. Spiezia, '*A property of the variety of 2-Engel groups*', Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **91** (1994), 225-228.

[42] L. S. Spiezia, '*A characterization of third Engel groups*', Arch. Math. **64** (1995), 369-373.

[43] B. Taeri, *'A question of P. Erdos and nilpotent-by-finite groups'*, Bull. Austral. Math. Soc. **64** (2001), 245-254.

[44] B. Taeri, '*A combinatorial condition on a certain variety of groups*', Arch. Math. **77** (2001), 456-460.