République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université Ferhat Abbas Setif 1

THÈSE

Présentée à la faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématiques appliquées

Par

BENCHEIKH ABDELKRIM

Thème

Approche polynômiale pour la résolution de certaines classes d'équations Intégrodifférentielles

Soutenue le : 04 / 07 / 2018

Devant le jury composé de :

Mr. Ahmed Bendjeddou	**Prof**	Univ. Ferhat-Abbas, Setif 1	**Président**
Mr. Lakhdar Chiter	**Prof**	Univ. Ferhat-Abbas, Setif 1	**Encadreur**
Mr. Dahmane Achour	**Prof**	Univ. Mohamed Boudiaf de M'Sila	**Examinateur**
Mr. Abdelaziz Mennouni	**Prof**	Univ. Hadj Lakhdar de Batna	**Examinateur**
Mr. Boureghda Abdellatif	**MCA**	Univ. Ferhat-Abbas, Setif 1	**Examinateur**
Mr. ElHadj Dahia	**MCA**	Univ. Mohamed Boudiaf de M'Sila	**Examinateur**

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة فرحات عباس سطيف 1

رســـــــالة

مقدمة إلى كلية العلوم

قسم الرياضيات

أعدت لنيل شهادة

دكتوراه علوم

تخصص: رياضيات تطبيقية

من إعداد

بـن الشيخ عبد الكريم

بعنوان

التقريب بكثيرات الحدود لحل بعض أنواع المعادلات التكاملية التفاضلية

نوقشت يوم : 04 / 07 / 2018 م

من طرف لجنة المناقشة

الدكتور:	أحمـــد بن جـــــدو	أستاذ التعليم العالي	جامعة سطيف 1	رئيسا
الدكتور:	لخضر شيـــــطر	أستاذ التعليم العالي	جامعة سطيف 1	مشرفا
الدكتور:	دحمـــــان عاشور	أستاذ التعليم العالي	جـــامعة المسيلة	مناقشا
الدكتور:	عبد العزيز منوني	أستاذ التعليم العالي	جـــامعة بـــاتنة	مناقشا
الدكتور:	عبد اللطيف بورغدة	أستـــاذ محـــاضر .أ.	جامعة سطيف 1	مناقشا
الدكتور:	الحـــــاج دحية	أستـــاذ محـــاضر .أ.	جـــامعة المسيلة	مناقشا

السلام عليكم و رحمة الله و بركاته

تحية طيبة وبعد

الحمد لله رب العالمين حمد الشاكرين والصلاة والسلام على من بلغ الرسالة وأدى الأمانة ونصح الأمة معلم البشرية الأول سيدنا محمد وعلى آله وصحبه وسلم .

بدايةًلا يسعني إلا أن أتقدم بأجزل آيات الشكر والامتنان إلى :

منارة العلم و المعرفة ..... جامعة فرحات عباس سطيف 1

من كان خير مرشد و خير معلم و أعطى من ذاته و وقته و لم يبخل بعلمه ..... المشرف د. شيطر لخضر

الى من نحت على قلبي حب الله والإنسان ونسج خيوط مستقبلي وكتب أحلامي حقيقة أمامي ..... أبي

الى التي سقتني حبا من ماء عينيها وسهرت لراحتي في قسوة لياليها ..... أمي

من عانت الصعاب معي , و عندما تكسوني الهموم أسبح في بحر حنانها ليخفف من ألامي ..... زوجتي

أولادي , شموع حياتي , نور دربي ..... يمنى , شهيناز , غسان , فاروق

إلى تلك الكوكبة النيرة و شجرة العطاء المتدفق. أساتذتنا الأفاضل الأوفياء ..... لجنة المناقشة

والشكر لله من قبل ومن بعد

ملخـــص

يهدف هذا البحث الى تقديم معالجات عددية لبعض انواع المعادلات التكاملية – التفاضلية (IDEs) و هي :

معادلة تكاملية – تفاضلية من نوع القطع المكافئ بشروط غير محلية

معادلة فـــولترا التكاملية التفاضلية الناتجة من مسالة Emden–Fowler ذات القيم الابتدائية الشاذة

معادلات تكاملية–تفاضلية من رتب كسرية الخطية و غيرالخطية

إعتمدنا في تلك التقنيات العددية على تقريب الحلول باستعمال كثيرات حدود برنشتاين BPs و كثيرات حدود جاكوبي JPs و مويجات لوجندر LW و مويجات تشيبيشاف UW , عن طريق بناء مصفوفات العمليات OM أمكن تحويل تلك المسائل إلى جمل معادات جبرية سهلة البرمجة و الحل و من خلال تطبيقات عددية أثبتت تلك الطرائق كفاءة عالية في ايجاد حلول تقريبية و دقيقة مع عرض و تحليل لطرق عالجت الموضوع سابقا.

الكلمات المفتاحية : معادلات تكاملية–تفاضلية – التقريب بكثيرات الحدود – مصفوفات العمليات

Résumé

L'objectif de cette thèse est de fournir des traitements numériques pour quelques types d'équations intégro-différentielles :

l'équation intégro-différentielle du type parabolique avec des conditions non locales , forme intégro-différentielle issue du problème de Emden-Fowler . et l'étude de quelques équations intégro-différentielles fractionnaires linéaires et non linéaires.

Pour l'approximation des solutions, nous avons utilisé les polynômes de Bernstein, et de Jacobi, les ondelettes de Legendre, et de Tchebychev. La construction de matrices opérationnelles a permis de transformer ces problèmes à des systèmes d'équations algébriques dont la résolution est simple. Des applications numériques ont prouvé l'efficacité de ces méthodes utilisées pour trouver des solutions approximatives et précises.

Mots-clés : équation intégro-différentielle, approche polynômiale, matrice opérationnelle.

Abstract

The objective of this work is to find numerically the solution of some types of integro-differential equations :

parabolic integro-differential equations with nonlocal conditions, the integro-differential form of the singular Emden-Fowler initial value problem, and the study of some linear and nonlinear fractional integro-differential equations

For the approximation of the solutions we have used Bernstein and Jacobi polynomials, Legendre and Chebyshev wavelets. The operational matrix tool converts these problems to systems of algebraic equations whose solutions are simple and easy to compute. Numerical applications have proven the effectiveness of these methods to find approximate and precise solutions.

keywords : integro-differential equation, polynomial approach, operational matrix .

الفهـــــــــرس

1 مفاهـــيم اساسية 6

1.1 دراسة مرجعية في بعض كثيرات حدود التقريب 7

1.1.1 كثيرات حدود برنشتاين BPs 7

2.1.1 كثيرات حدود جاكوبي JPs 13

3.1.1 نتائج من JPs لوجندر LPs و تشيبيشاف 16

2.1 لمحة في المويجات 18

1.2.1 المويجات 18

2.2.1 التحليل متعدد الدقة(Multi-Resolution Analysis (MRA 18

3.1 مقدمة في المعادلات التكاملية- التفاضلية IDEs 20

1.3.1 المعادلات التكاملية- التفاضلية IDEs 20

2.3.1 تصنيفات IDEs 21

2 صياغة تقنية عددية لحل IDEs نوع القطع المكافئ ذات شروط غير محلية باستعمال OBPs 22

1.2 مقدمة 23

2.2 بناء OM مصفوفات العمليات الجديدة لأساس OBPs 24

1.2.2 مصفوفة العمليات للتكامل OMI 25

2.2.2 مصفوفة العمليات للتفاضل OMD 27

3.2.2 التمثيل المصفوفي للجداء OMP 28

4.2.2 تطبيقات في فاعلية OM 29

3.2 تقنية عددية لحل IDEs نوع القطع المكافئ ذات شروط غير محلية 34

1.3.2 المسألة المكافئة متجانسة الشروط 35

2.3.2 التقنية العددية لمعالجة المسألة 35

3.3.2 تطبيق عددي 40

4.2 الإستنتاج 42

3 الحل العددي لـ VIDEs الناتجة من مسألة Emden-Fowler بطريقتي BPs و UW 43

1.3 مقدمة 44

2.3 طريقة BPs لحل VIDEs لمعادلة Emden-Fowler الشاذة 45

1.2.3 VIDEs المشكلة من معادلة Emden-Fowler 45

2.2.3 خوارزمية الحل باستعمال BPs 46

3.2.3 تطبيق عددي 48

3.3 طريقة UW لحل VIDEs لمعادلة Lane-Emden الشاذة 52
1.3.3 VIDEs المشكلة من معادلة Lane-Emden 52
2.3.3 خصائص UW و تقريب تابع 53
3.3.3 خوارزمية الحل باستعمال UW 54
4.3.3 تطبيق عددي 55
4.3 الاستنتاج 57

4 معالجة عددية لـ IDEs ذات الرتب الكسرية باستخدام JPs و LW 58
1.4 مقدمة 59
1.1.4 الحساب الكسري 60
2.1.4 دوال القطع النبضية BPFs 60
2.4 طريقة LW في معالجة عددية لـ IDEs من رتب كسرية 61
1.2.4 خصائص LW و تقريب تابع 61
2.2.4 مصفوفة العمليات للتفاضل الكسري وفق اساس LW 62
3.2.4 خوارزمية حل IDEs 63
4.2.4 تقدير خطأ التقريب 65
5.2.4 تطبيقات عددية 66
3.4 طريقة JPs المهجن في معالجة عددية لـ IDEs من رتب كسرية 70
1.3.4 JPs المهجن بتابع القطع النبضية BPFs 70
2.3.4 مصفوفات العمليات الكسرية 71
3.3.4 الطريقة لحل IDEs كسرية غير الخطية 73
4.3.4 تطبيقات عددية 75
4.4 الاستنتاج 79

قائمة الأشكال

1.1 كثيرات حدود برنشتاين PBs من أجل $n = 9$. 8
2.1 كثيرات حدود برنشتاين المتعامد المتجانس OBPs من أجل $n = 8$. 12

1.2 منحني الحل الدقيق و الحل التقريبي من أجل $m = 5$ للمثال (3.2.2) 31
2.2 منحني الخطأ المطلق من أجل $m = 5$ للمثال (3.2.2) 31
3.2 منحني الحل الدقيق و الحل التقريبي من أجل $m = 5$ للمثال (4.2.2) 34
4.2 منحني الخطأ المطلق أجل $m = 5$ للمثال (4.2.2) 34

1.4 طريقة UW و الحل الدقيق من أجل $k = 3$ للمثال (2.2.4) 67
2.4 طريقة UW و الحل الدقيق من أجل $k = 4$ للمثال (2.2.4) 67
3.4 طريقة UW و الحل الدقيق من أجل $k = 5$ للمثال (2.2.4) 68
4.4 طريقة UW و الحل الدقيق من أجل $k = 6$ للمثال (2.2.4) 68
6.4 الحل الدقيق و الحل التقريبي ب UWM من أجل القيم $k = 4, 5, 6, 7$ و $M = 2$. للمثال (3.2.4) . 69
7.4 الحل التقريبي للمثال (1.3.4) من أجل $M = 3$; $N = 1$ و $(\alpha = \beta = 1), 0.5 \leq \alpha \leq 1$ . . . 76
8.4 النتائج العددية للمثال (1.3.4) من أجل $M = 5$; $N = 1$ و $(\alpha = \beta = 1), 1.5 \leq \alpha \leq 2$ . . . 76
9.4 مقارنة بين الطريقة و الحل الدقيق للمثال (2.3.4) من أجل $(\alpha = \beta = 1)$ 77
10.4 لنتائج العددية للمثال (2.3.4) من أجل $M = 5$; $N = 2$ و $(\alpha = \beta = 0)$ 77
11.4 الحطأ المطلق لـ f على $(0, 1)$ للمثال (2.3.4) 78
12.4 النتائج العددية للمثال (3.3.4) 78
13.4 الحطأ المطلق لـ f على $(0, 1)$ للمثال (3.3.4) 79

قائمة الجداول

1.2 الحل الدقيق و التقريبي من أجل $m = 3$ و $m = 5$ للمثال (3.2.2) 31
2.2 الحل التقريبي والحل الدقيق للمثال (4.2.2) 33
3.2 الخطأ المطلق في تقريب $v(x,t)$ في المثال (1.3.2) 41

1.3 الحل الدقيق و قيم الحل التقريبي و الخطأ المطلق للمثال (1.2.3) 50
2.3 قيم الحل التقريبي و الحل الدقيق و الخطأ المطلق للمثال (2.2.3) 51
3.3 مقارنة بين طريقتي UW و LW للمثال (1.3.3) 55
4.3 الخطأ L_2 و L_∞ الناتجة من طريقتي UW و LW للمثال (1.3.3) 55
5.3 مقارنة بين طريقتي ADM و UWM للمثال (2.3.3) 56
6.3 الخطأ L_2 و L_∞ الناتجة من طريقتي UWM و ADM للمثال (2.3.3) 56

1.4 مقارنة بين طريقة LWM و طريقة التجب تمام و الجيب CASW للمثال (1.2.4) 66

قـائمة الترميزات

BPs	Bernstein Polynomials	كثير حدود برنشتاين
OBPs	Orthonormal Bernstein Polynomials	كثير حدود برنشتاين المتعامد المتجانس
LPs	Ligender Polynomials	كثير حدود لوجندر
JPs	Jacobi polynomial	كثير حدود جاكوبي
UPs	Chebyshev polynomials of the first kind	كثير حدود تشيبيشاف النوع 1
TPs	Chebyshev Polynomial of the Second Kind	كثير حدود تشيبيشاف النوع 2
BPFs	Block pulse function	دوال القطع النبضية
LW	Legendre wavelets	مويجات لوجندر
UW	Chebyshev wavelet	مويجات تشيبيشاف
IDEs	Integrodifferential equation	معادلات تكاملية-تفاضلية
VIDEs	Volterra integro-differential equation	معادلات تكاملية-تفاضلية لفولتيرا
OM	Operational matrix	مصفوفات العمليات
OMI	Operational matrix of integration	مصفوفات العمليات للتكامل
OMD	Operational matrix of derivative	مصفوفات العمليات للتفاضل
POM	Operational matrix of product	مصفوفات العمليات للجداء
FIDEs	Fractional integro-differential equations	معادلات تكاملية-تفاضلية كسرية
PIDEs	Parabolic integro-differential equations	معادلة تكاملية-تفاضلية من نوع القطع المكافئ
MRA	Multi-Resolution Analysis equations	التحليل متعدد الدقة

قائمة الجداول

مقدمة عامة

(المشكلة - الأهداف - الأهمية)

يسعى الباحثون في كثير من المسائل العلمية والهندسية إلى تصميم نماذج رياضياتية للمساعدة في فهم الظواهر المختلفة، وهذه النماذج غالبا ما تؤدي إلى صياغة مسائل من المعادلات التكاملية-التفاضلية (IDEs) التي تعد أدوات أساسية في حقول علمية مختلفة كالرياضيات التطبيقية و الفيزياء ,البيولوجيا , الهندسة و لها تطبيقات علمية نذكر منها على سبيل المثال نظرية الحركية للمرونة واللدونة , الحرارة , تحول الكتلة , نظرية الموائع , علم الكهرياء , الميكانيك الحيوي , هندسة الالكترون , الاقتصاد , الطب ... الخ .

و إذا كانت الرياضيات التحليلية برهنت لبعض مسائل المعادلات التكاملية-التفاضلية (IDEs) وجود و وحدانية الحل تحت شروط محددة فإن البعض من المسائل لا تتوفر لنا طريقة لحساب الحل الصريح إلا في حالات معينة و تحت شروط مثالية أحيانا . لذا نلجأ الى البحث عن الحل التقريبي رغم علمنا من الناحية النظرية أن المسالة تتمتع بحل وحيد . لهذا السبب ظهر التحليل العددي كجزء من الرياضيات التحليلية لكنه يتميز باستعماله للبرمجيات بشكل كبير (حواسيب . لغة برمجة....الخ) و بالتالي قالتحليل العددي له ميزة تجريبية إذ لا يمكن القبول بالنتائج إلا بعد التأكد من محاكاتها للواقع .

لتلك الأسباب جاءت فكرة بحثنا هذا الذي يحمل عنوان التقريب بكثيرات الحدود لحل بعض أنواع المعادلات التكاملية-التفاضلية و هدفنا توصيف طرائق عددية جديدة لمعالجة و إيجاد الحل التقريبي لبعض مسائل المعادلات التكاملية-التفاضلية (IDEs) الحديثة الدراسة و هي على التوالي :

معادلة تكاملية - تفاضلية من نوع القطع المكافئ بشروط غير محلية (PIDEs) (انظر [1] A.Bencheikh, L.Chiter, Tongxing.Li). و معادلة (VIDEs) الناتجة من مسالة Emden-Fowler ذات القيم الابتدائية الشاذة (انظر [2] A.Bencheikh, L.Chiter, H.Abassi). و معادلات تكاملية-تفاضلية من رتب كسرية (FIDEs) الخطية و غيرالخطية (عرض و تحليل للمقالتين [101] و [93]).

حيث تم تقديم تقنيات عددية بالإعتماد على التقريب بكثيرات حدود برنشتاين BPs و كثيرات حدود جاكوبي BPs و كلا من ليجندر LPs , تشيبيشاف بنوعه الأول UPs و الثاني TPs .

السؤال المطروح لماذا كثيرات الحدود بالذات ؟ الجواب , كون كثيرات الحدود تعتبر من أبرز الدوال التي جلبت الإنتباه إليها حيث تم دراستها بشكل مفصل , ولا يعتبر ذلك شئ غريب كون كثيرات الحدود هي الأبسط من ناحية التركيب فالعمليات عليها سهلة البرمجة و التطبيق على الحاسوب هذا بالإضافة إلى إستمرارها و وجود مشتقاتها من رتب عليا و خصائصها الأخرى . في نفس الوقت نظرية وايرستراس المعروفة . أعطت زخما أخر لدراسة كثيرات الحدود , قام برنشتاين في سنة 1910 م بإعطاء مثال تطبيقا للنظرية بواسطة كثيرات حدود برنشتين و منذ ذلك الحين تم دراسة كثيرات حدود برنشتاين و دراسة خصائصها المختلفة و استعملت بشكل فعال في تقريب حلول بعض المسائل الرياضياتية كالمعادلات التفاضلية و التكاملية.

بالإضافة الى كثيرات الحدود المذكورة أعلاه إستعنا في تقريب مسائل IDEs بنظرية المويجات Wavelet و التي لاقت اهتمام العلماء بسبب فاعليتها في حل المسائل و تنوعها, يوجد هناك العديد من المويجات حيث تختار ما يناسب المسألة المعالجة و هذا الذي يعكس تنوعا في معالجة المسائل . تعد نظرية المويجات نظرية مكتملة و الأبحاث الحالية تدور حول إيجاد مويجات جديدة و تطوير تطبيقاتها.

بالاضافة الى ذلك كانت عملية تهجين كثيرات الحدود من أنجع الوسائل في تحسين تقريب المعادلات التكاملية-التفاضلية و خاصة التهجين بدوال القطع النبضية (BPFs) . حيث تعرف BPFs انها مجموعة دوال متعامدة ذات قيم ثابتة على كل مجال جزئي و هي عادة تستخدم كطريقة مفيدة في التحليل و مسائل التحكم و الأنظمة العلمية الأخرى . قدمت هذه المعادلات لأول مرة لمهندسي الكهرباء عن طريق هرميت في عام 1969م لكن لمدة حوالي سبع سنوات لم تلقى أي إهتمام من ناحية التطبيقات العملية . حتى منتصف السبعينات ، حيث قام بعض الباحثين بدراسة دوال القطع النبضية (BPFs) في حل مختلف مسائل التحكم بواسطة دوال والش . منذ ذلك الوقت أصبحت BPFs تطبق على نطاق واسع ويعود ذلك لبساطتها و سهولة عملياتها.

من جهة اخرى بناء مصفوفات العمليات لأسس كثيرات الحدود (انظر [3] A.Bencheikh, L.Chiter, H.Abassi). ساعدنا بشكل كبير في عملية تقريب حلول IDEs . حيث كانت لها أهمية كبيرة في إزالة تعقيدات العبارات الموجودة في المسائل كعبارات التكامل و التفاضل و أدت إلى تحويل تلك المسائل الى جمل معادلات جبرية أعطت لنا امكانية البرمجة و سهولة الحل.

كتبت هذه الأطروحة باللغة العربية و برنامج **LTEX** العربي بنسخته الجديدة و تتألف من مقدمة عامة و أربع فصول و قائمة مراجع رتبت حسب الاستعمال . و فيما يلي تفاصيل ما تشتمل عليه الفصول الأربع :

الفصل 1 : مفاهـــيم اساسية

يتضمن هذا الفصل ثلاث أقسام إستهلنا القسم الأول بدراسة مرجعية في بعض كثيرات حدود التقريب حيث قدمنا تعريفات و خواص لكثيرات حدود برنشتاين BPs و قدمنا تقريب تابع و فق أساسه و كذا تحليل التقارب ثم عن طريق نظرية غرام سميث إستطعنا إنشاء كثير حدود برنشتاين المتعامد المتجانس OBPs [2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 3, 53]. كما تطرقنا بالتفصيل لأبرز كثير حدود و هو جاكوبي JPs و حالاته الخاصة أي كثيرات حدود لوجندر LPs و تشيبيشاف من النوعين الأول UPs و الثاني TPs [11, 12, 13, 14] و [15, 16, 17, 18, 19]. تقريب التوابع عن طريقهم . أما بالنسبة للقسم الثاني فكان لنا لمحة موجزة على المويجات Wavelet و تعريفاتها مرورا بالتحليل متعدد الدقة (AMR) [23, 24, 25, 26, 27, 28] . أما القسم الثالث من هذا الفصل كان لنا مدخل الى المعادلات التكاملية-التفاضلية (IDEs) حيث أعطينا التعريف و تصنيفات لها (انظر [29, 31, 30, 32, 33, 34]).

الفصل 2 : صياغة تقنية عددية لحل IDEs نوع القطع المكافئ ذات شروط غير محلية باستعمال OBPs

المسائل ذات شروط غير عادية كشروط التكامل اثارت في الاونة الاخير اهتمام العلماء بشكل كبير خاصة حول مبدأ الوجود ووجدانية الحل. قمنا بمساهمة عددية في هذا الفصل الثاني حيث تم بناء مصفوفات العمليات لكثير حدود برنشتاين المتعامد المتجانس [3, 1, 53] انطلقنا أولا بكتابة OBPs وفق أساس تايلر مما مكننا من تشكيل OMI مصفوفة العمليات للتكامل و كذا OMD مصفوفة العمليات للتفاضل و POM مصفوفة العمليات للجداء و عرضنا تطبيقات في فاعلية تلك مصفوفات العمليات بالتطبيق الاول معادلة تفاضلية [54] و بالتطبيق الثاني معادلة تكاملية-تفاضلية لفريدهولم و من خلال أمثلة عددية أظهرنا كفاءة OM .
إنتقلنا للجزء الثاني و هو صياغة تقنية عددية بواسطة OM لأساس OBPs لإيجاد الحل العددي لمعادلة تكاملية-تفاضلية من نوع القطع المكافئ ذات شروط غير محلية المتمثلة في المسالة التالية [1]:

$$\begin{aligned} v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) &= \int_0^t a(t-\tau)\, v(x,\tau)\, d\tau, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T \\ v(x,0) &= \Phi(x), \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

مع الشروط الغير محلية (شروط التكامل) :

$$\int_0^1 v(x,t)\, dx = r(t), \quad \int_0^1 xv(x,t)\, dx = q(t), \quad 0 < t \leq T.$$

حيث قمنا لتسهيل حل المسألة بإيجاد مسألة مكافئة لها ذات شروط غير محلية متجانسة ثم أعطينا خوارزمية الحل باستعمال مصفوفات العمليات OM الخاصة بـ OBPs و إدخال الشروط بحيث أمكن تحويل المسألة الى جمل معادلات جبرية سهلة البرمجة و الحل . ومن خلال تطبيق عددي ظهر لنا كفاءة هذه التقنية جليا.

الفصل 3 : الحل العددي لـ VIDEs الناتجة من مسألة Emden-Fowler بطريقتي BPs و UW

قبل إعطاء تفصيل ما يشمل هذا الفصل لابد من ذكر الجانب الفيزيائي حيث كما هو معلوم فإن علم الفلك الذي يعد من بين أهم العلوم التي تهتم بدراسة تطور النجوم و الكواكب وكذا معرفة الوسائط المؤثرة على تطورها مثل درجة الحرارة , الضغط , الجاذبية ...إلخ . دراسة علم الفلك تستوجب معرفة النماذج الرياضية الدقيقة للتنبأ بتطور نجم معين مثلا . لذا يعتبر كثير من الباحثين إعتبار المحيط الكلي للفضاء عبارة عن مائع و من هذا المنطلق فان المعادلات المستعملة هي معادلات تفاضلية غير خطية . حاليا يقوم الباحثون الفيزيائيون بدراسة ما يعرف بالمادة المكونة للنجوم و التي يتم اعتبارها كمائع والحلول التحليلية لهذه المعادلات يكون مستحيلا و لتبسيط دراسة المادة الفلكية (المادة المكونة للنجوم) لجأ الكثير من الباحثين الى إعتبار هذه المادة ذات تجانس كروي و ان هذه المادة عبارة عن غاز و كثافة معينة حيث يشكل ما يعرف في علم الفلك بالسحابة الفلكية و التي تعرف عتد الفيزيائيون بالبلازمة الفلكية و التي تتكون اساسا من إلكترونات , فوتونات و الانوية الثقيلة حيث تصل أبعاد الجسيمات المذكورة انفا إلى الأبعاد النووية . من هذا لجأ عدة

رياضيون الى ايجاد نماذج رياضية تصف الحالة الفيزيائية للمادة الفلكية حيث يتم ربطها بالوسائط الفيزيائية المؤثرة فعليا على هذه المادة . من أحدث النماذج الرياضية معادلة Emden-fowler ذات القيم الابتدائية الشاذة التالية : [2, 80, 77, 78, 79].

$$y''(x)+\frac{k}{x}y(x)+\alpha f(x)\,g(y(x))=0,,\quad k\geq 0,,\quad \alpha\geq 0.$$

مع الشروط الابتدائية : $y(0)=a,\quad y'(0)=0,,\quad 0<x\leq 1$

و التي سنقوم بتحويلها الى معادلة تكاملية-تفاضلية لفولترا VIDEs و عن طريق التقريب بكثيرات حدود برنشتاين و بتكامل غوص استطعنا تحويلها الى جمل معادلات جبرية امكن حلها بطرق معروفة [2].

أما النموذج الثاني الذي تم التطرق له هو حالة خاصة من معادلات Emden-fowler الأمر يتعلق بما يسمى بمعادلة Lane-Emden الشاذة التالية : (دراسة و عرض للمقال [92])

$$y''(x)+\frac{k}{x}y(x)+p(x)\,y(x)=g(x),\quad 0<x\leq 1,\quad k\geq 0$$

مع الشروط الإبتدائية التالية : $y(0)=A,\quad y'(0)=B$

حيث عولجت هذه المسألة عن طريق مويجات تشيبيشاف من النوع الثاني CW بعد اعطاء خصائص و تقريب تابع باساس CW , تم تحويل المسألة الى معادلة تكاملية-تفاضلية لفولترا مكافئة . و بذلك انتقلت المسألة الى حل جمل معادلات جبرية [92]. دعمت هذه الطريقة بامثلة عددية توضح فاعلية و كفاءة هذه الطرق مقارنة بطرق اخرى درست سابقا.

الفصل 4 : معالجة عددية لـ IDEs الكسرية باستخدام JPs و LW

يتضمن هذا الفصل موضوع نال الكثير من الإهتمام من طرف علماء الرياضيات و الفيزياء, موضوع الحساب الكسري و يهتم بحساب المشتقة أو التكامل من أية رتبة سواءا كانت عدد حقيقيا او مركبا , تعود بدايات هذا الموضوع الى إصطلاح العالم Leipnitz للمشتقة من الرتبة n إذ تساءل Leipnitz من خلال رسالة وجهها إلى العالم Hospital سنة 1695م عن إمكانية ايجاد مشتقة من الرتبة $\frac{1}{2}$, ثم زاد اهتمام الرياضيين بالحساب الكسري أمثال Euler 1730 م و Laplace 1812 م و Lacroix 1819 م , Liouville 1832 م , Riemann 1876 م . و في القرن 20 زاد إهتمام العلماء بهذا الموضوع و تم تطوير الجانب النظري و التطبيقي نذكر منهم Nishimoto 1984 م و Shawagfeh 1995 م , passam 1990 م .

قسم هذا الفصل إلى ثلاثة أجزاء إستهلناه بتقديم تعريف التكامل الكسري بمفهوم ريمان -ليوفيل و المشتق الكسري بمفهوم كابوتو و كذا العلاقة بينهما .

أما في الجزء الثاني فاننا تطرقنا الى طريقة مويجات لوجندر LW في حل معادلات تكاملية-تفاضلية من رتب كسرية FIDEs الخطية التالية :(تحليل وعرض للمقالة [93])

$$\begin{aligned} D^{\alpha}f\left(x\right) &= \lambda_1 \int_0^x u_1\left(x,y\right) f(y)dy + \lambda_2 \int_0^1 u_2\left(x,y\right) f(y)dy + g\left(x\right) \\ f^{(s)}(0) &= 0, s = 0,1,...,r-1, r-1 < s \leq r, r \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

و معادلات تكاملية-تفاضلية من رتب كسرية FIDEs غير خطية : (تحليل و عرض للمقالة [93])

$$\begin{aligned} D^{\alpha}f\left(x\right) &= \lambda_1 \int_0^x u_1\left(x,y\right) [f(y)]^p dy + \lambda_2 \int_0^1 u_2\left(x,y\right) [f(y)]^q dy + g\left(x\right) \\ f^{(s)}(0) &= 0, \quad p,q \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

حيث عرضنا أولا تعريف و خصائص LW و صيغة مصفوفة العمليات للتفاضل وفق أساس LW ثم خوارزمية لحل لتلك المسائل المذكور أعلاه وأعطيت دراسة تحليلية لخطأ التقريب و أرفقنا كل ذلك بتطبيقات عددية. أما الجزء الثاني من هذا القصل فيتضمن طريقة JPs المهجن بدوال القطع النبضية BPFs لإيجاد الحل التقريبي لـ IDEs الكسرية غير الخطية التالية (عرض و تحليل للمقالة [101]) :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}f\left(x\right) &- \int_0^1 k\left(x,y\right) [f(y)]^q dy = g\left(x\right) \\ f^{(s)}(0) &= a_s, s = 0,1,...,r-1, r-1 < s \leq r, r \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

حيث قدم تعريف و خواص التهجين بدوال BPFs و تقريب تابع وفقها . ثم بإنشاء مصفوفات العمليات الكسرية وفق أساس جاكوبي JPs المهجن عرضت طريقة الحل و مدعمة بتطبيقات عددية .
نحن بدورنا قيد دراسة تلك المسائل الكسرية بإستعمال كثير حدود برنشتاين BPs.

وقد نتج من هذه الأطروحة ثلاث أوراق علمية ، تفاصيل هذه الأوراق العلمية كما يلي

1. **A. Bencheikh, L. Chiter, Tongxing Li.** ***Solving parabolic integro-differential equations with purely nonlocal conditions by using the operational matrices of Bernstein polynomials*** **. J. Nonlinear Sci. Appl., Volume 11, Issue 5, (2018),pp 624–634**
   http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.011.05.04 (Thomson Reuters Impact factor 1.34)

2. **A. Bencheikh, L. Chiter, H. Abbassi.** ***Bernstein polynomials method for numerical solutions of integro-differential form of the singular Emden-Fowler initial value problems*** **. J. Math. Computer Sci., 17 (2017), 66–75**
   http://dx.doi.org/10.22436/jmcs.017.01.06 (Emerging Sources Citation Index (ESCI))

3. **A. Bencheikh, L. Chiter, H. Abbassi.** ***A New Operational Matrix of Orthonormal Bernstein Polynomials and Its Applications*** **. (GJPAM).12 (5), 4219-4232, 2016**
   http://www.ripublication.com/gjpam16/gjpamv12n5_27.pdf (indexed in SCOPUS)

الفصل الأول

مفاهـــــــــيم اساسية

قائمة المحتويـــــــات

1.1 دراسة مرجعية في بعض كثيرات حدود التقريب 7
1.1.1 كثيرات حدود برنشتاين BPs 7
2.1.1 كثيرات حدود جاكوبي JPs 13
3.1.1 نتائج من JPs لوجندر LPs و تشيبيشاف 16
2.1 لمحة في المويجات 18
1.2.1 المويجات 18
2.2.1 التحليل متعدد الدقة(Multi-Resolution Analysis (MRA 18
3.1 مقدمة في المعادلات التكاملية- التفاضلية IDEs 20
1.3.1 المعادلات التكاملية- التفاضلية IDEs 20
2.3.1 تصنيفات IDEs 21

1.1 دراسة مرجعية في بعض كثيرات حدود التقريب

تعتبر كثيرات الحدود المتعامدة من أهم الطرق التي يعتمد عليها في دراسة و إيجاد حلول العديد من المشاكل و المسائل من مختلف العلوم حيث بدأ الإهتمام بدراستها و التعمق فيها منذ بداية القرن التاسع عشر ميلادي من خلال دراسة تشيبيشف للكسور الجزئية المتصلة. منذ ذلك الوقت وقع الكشف عن العديد من التطبيقات لها في العديد من المجالات الرياضياتية و المسائل الفيزيائية لذا فهي تدرس في العديد من فروع الرياضيات و الفيزياء . في هذا الجزء تم دراسة بعض الأنواع من كثيرات الحدود وهي :
كثيرات حدود برنشتاين BPs [2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] برنشتاين المتعامد المتجانس OBPs [1, 3, 53].
كثيرات حدود جاكوبي JPs [11, 12, 13, 14]. و من حالاته الخاصة كلا من كثيرات حدود لوجندر LPs و كثيرات حدود تشيبيشاف النوع الاول TPs و النوع الثاني UPs [15, 16, 17, 18, 19].
مع تقديم مفصل لبعض خصائصها و كذا تقريب تابع بواسطة أسسس تلك الكثيرات الحدود و تحليل التقارب و كل ذلك بغرض إستخدامها في الفصول المقبلة.

1.1.1 كثيرات حدود برنشتاين BPs

تعريف 1.1.1 كثيرات حدود برنشتاين *(Bernstein polynomials)* من الدرجة n معرفة على المجال $[0,1]$ هي كثيرات حدود من الشكل : [2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, i = 0, \quad 1, ..., n. \tag{1.1}$$

و أما الصيغة (1.1) العامة لكثيرات حدود برنشتاين *BPs* على المجال $[a,b]$ يعطى بالعلاقة التالية :

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{1}{(b-a)^n} (x-a)^i (b-x)^{n-i}, i = 0, \quad 1, ..., n. \tag{2.1}$$

و إذا كان $i < 0$ أو $i > n$ فان $B_{i,n}(x) = 0$

نتيجة 1.1.1 بتطبيق دستور ثنائي الحد لنيوتن على العبارة $(1-x)^{n-i}$ نجد :

$$B_{i,n}(x) = \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} x^{i+k}, \quad i = 0, 1, ..., n.. \tag{3.1}$$

و منه يمكن كتابة $B_{i,n}(x)$ على الشكل:

$$B_{i,n}(x) = \mathbf{A}_{i+1} \mathbf{T}_n(x) \quad i = 0, 1, ., n$$

حيث :

$$\mathbf{A}_{i+1} = \left[\overbrace{0,0,\ldots,0}^{i}, (-1)^0\binom{n}{i}, (-1)^1\binom{n}{i}\binom{n-i}{1}, \ldots, (-1)^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-i}\right]$$

$$\mathbf{T}_n(x) = \left[1, x, ..., x^n\right]^T$$

إذا قمنا بتعريف المصفوفة $\mathbf{A}$ ذات الرتبة $(n+1)\times(n+1)$ كما يلي :

$\mathbf{A} = \left[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_{n+1}\right]^T$ و الشعاع $B(x) = \left[B_{0,n}(x), B_{1,n}(x), ..., B_{n,n}(x)\right]^T$, فإننا نحصل على الصيغة المصفوفية لشعاع اساس *BPs*:

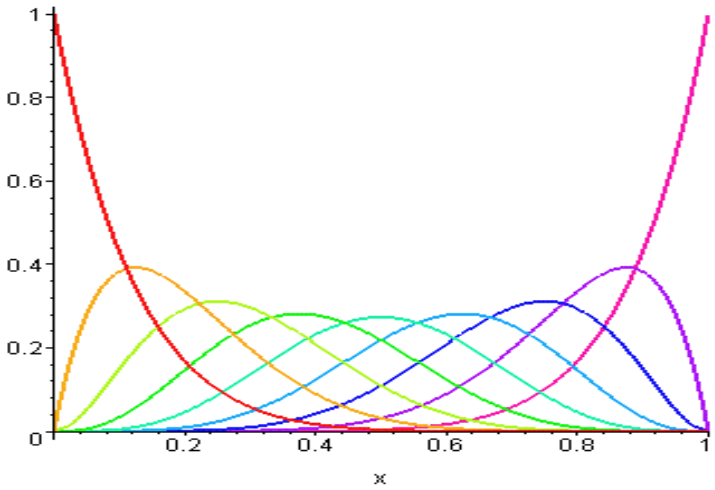
$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{A}\mathbf{T}_n(x) \tag{4.1}$$

حيث

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (-1)^0\binom{n}{0} & (-1)^1\binom{n}{0}\binom{n-0}{1} & \cdots & (-1)^{n-0}\binom{n}{0}\binom{n-0}{n-0} \\ 0 & (-1)^0\binom{n}{1} & \cdots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\binom{n-1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (-1)^0\binom{n}{n} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=0}^{n}\binom{n}{i} \neq 0$ وهذا يعني أن المصفوفة $\mathbf{A}$ قابلة للقلب. و منه يمكن كتابة

$$\mathbf{T}_n(x) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(x) \tag{5.1}$$



شكل 1.1: كثيرات حدود برنشتاين PBs من أجل $n = 9$.

خواص 1.1.1 على المجال $[0,1]$ لكثيرات حدود برنشتين العديد من الخواص ذات الأهمية نذكر منها :

1. موجبة : $\forall x \in [0,1], B_{i,n}(x) \geq 0$
2. لدينا : $B_{i,n}(1) = \delta_{in}$, $B_{i,n}(0) = \delta_{i0}$ و $B_{i,n}(1-x) = B_{n-i,n}(x)$
3. تحقق العلاقة التراجعية : $B_{i,n}(x) = (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x)$
4. و كذلك العلاقة $B_{i,n}(x)B_{j,m}(x) = \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}} B_{i+j,n+m}(x)$
5. قيمة المجموع $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x)$ هو 1
6. قيمة التكامل : $\int_0^1 B_{i,n}(x)dx$ هو $\frac{1}{n+1}$
7. صيغة المشتق النوني يعطى بالعلاقة :

$$\frac{d^p}{dx^p}\Big(B_{i,n}(x)\Big) = \frac{n!}{(n-p)!} \sum_{k=\max(0,i+p-n)}^{\min(i,p)} (-1)^{k+p} \binom{p}{k} B_{i-k,n-p}(x)$$

8. تشكل الجملة $\{B_{0,n}(x), B_{1,n}(x), \ldots, B_{n,n}(x)\}$ لكثيرات حدود برنشتاين *BPs* أساس للفضاء $\mathcal{P}_n$ فضاء كثيرات الحدود من درجة أقل أو تساوي n. و الجملة تلك مجموعة تامة في الفضاء $L^2([0,1])$.

تعريف 2.1.1 تعرف كثيرات حدود برنشتاين بمتغيرين *(2D-BPs)* من الدرجة nm المعرفة على المجال $[0,1] \times [0,1]$ هي كثيرات حدود من الشكل:

$$B_{(i,n)(j,m)}(x,y) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} x^i (1-x)^{n-i} y^j (1-y)^{m-j} \qquad (6.1)$$

حيث : $i = 0,1,...,n, \quad j = 0,1,...,m$

خواص 2.1.1 كما في *1D-BPs* لدى *2D-BPs* على المجال $[0,1] \times [0,1]$ الخواص التالية :

1. موجبة : $B_{(i,n)(j,m)}(x,y) \geq 0$
2. خاصية التفكيك : $B_{(i,n)(j,m)}(x,y) = B_{(i,n)}(x)\, B_{(j,m)}(y)$
3. بتطبيق دستور ثنائي الحد لنيوتن على كلا من $(1-x)^{n-i}$ و $(1-y)^{m-j}$ نحصل على الصيغة :

$$\begin{aligned} B_{(i,n)(j,m)}(x,y) &= \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} x^i (1-x)^{n-i} y^i (1-y)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{n+m} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-i \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-j \\ t \end{pmatrix} x^{i+k} y^{j+t} \end{aligned}$$

1.1.1.1 تقريب تابع وفق اساس BPs

نفرض أن $H = L^2[0,1)$ فضاء هلبرتي مزود بالجداء السلمي $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ و النظيم $\|f\| = \sqrt{\langle f,g\rangle}$ و ليكن $\{B_{0,n}(x), B_{1,n}(x), ..., B_{n,n}(x)\} \subset H$ مجموعة دوال برنشتاين . ليكن $\mathbf{S_n} = Span\{B_{0,n}(x), B_{1,n}(x), ..., B_{n,n}(x)\}$ و $f(x) \in L^2([0,1))$. بما أن $\mathbf{S_n}$ فضاء شعاعي جزئي ذو بعد منتهي و مغلق ، فإنه يوجد أحسن تقريب $\tilde{z}$ للتابع f في $\mathbf{S_n}$ و يكون وحيد أي :

$$\forall z \in \mathbf{S_n},\ \exists!\ \tilde{z} \in \mathbf{S_n}\ :\ \|f-\tilde{z}\| \leq \|f-z\| \tag{7.1}$$

و بما أن $\tilde{z} \in \mathbf{S}$ فإن :

$$f(x) \approx \tilde{z} = \sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(x) = \mathbf{C}^T\mathbf{B}(x) \tag{8.1}$$

حيث: $\mathbf{C}^T = \left[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, ..., \mathbf{c}_m\right]$, و هو شعاع معاملات التحليل وفق أساس BPs.
يمكن تعيين $\mathbf{C}$ من خلال الصيغة التالية:

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}^{-1}\left\langle f\left(x\right), \mathbf{B}(x)\right\rangle \tag{9.1}$$

حيث: $\mathbf{Q}$ مصفوفة من البعد $(n+1)\times(n+1)$ ناتجة من الجداء السلمي الثنائي للشعاع $\mathbf{B}(x)$ كما يلي:

$$\mathbf{Q} = \langle \mathbf{B}(x), \mathbf{B}(x)\rangle = \int_0^1 \mathbf{B}(x)\mathbf{B}^T(x)dx = \mathbf{A}\int_0^1 \mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(x)^T dx\mathbf{A}^T = \mathbf{AHA}^T$$

حيث: $\mathbf{A}$ معرفة بالصيغة , و $\mathbf{H}$ تسمى مصفوفة هلبرت معرفة كمايلي:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}$$

يمكن تعيين عناصر المصفوفة $\mathbf{Q}$ مباشرة من خلال الجداء السلمي الثنائي بين دوال برنشتاين كما يلي :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{i+1,j+1} &= \int_0^1 B_{i,n}(x)B_{j,n}(x)dx = \binom{n}{i}\binom{n}{j}\int_0^1 (1-x)^{2n-i-j}\,x^{i+j}dx \\ &= \frac{\binom{n}{i}\binom{n}{j}}{(2n+1)\binom{2n}{i+j}} \end{aligned}$$

حيث: $i,j = 0,1,...,n.$

2.1.1.1 تحليل التقارب

نظرية 1.1.1 لتكن $f \in C^{(n+1)}[0,1)$ ، و $\mathbf{S_n} = Span\{B_{0,n}(x), B_{1,n}(x), ..., B_{n,n}(x)\}$.
إذا كان $\mathbf{C}^T\mathbf{B}(x)$ هو أحسن تقريب للدالة f في $\mathbf{S_n}$، فإن:

$$\|f - \mathbf{C}^T\mathbf{B}(x)\|_{L^2[0,1)} \leq \frac{\gamma}{(n+1)!\sqrt{2n+3}} \tag{10.1}$$

حيث: $\gamma = \max_{x\in[0,1)} |f^{(n+1)}(x)|$.

البرهان 1.1.1 لننشر الدالة $f(x)$ حسب سلسلة تايلور كما يلي:

$$\widetilde{f}(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + ... + \frac{x^n}{n}f^{(n)}(0)$$

لدينا: $\left|f(x) - \tilde{f}(x)\right| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)} f^{(n+1)!}(\zeta_x)\right|$ حيث: $\zeta_x \in [0,1]$.
بماأن $\mathbf{C}^T\mathbf{B}(x)$ هو أحسن تقريب للدالة f في S_n و $\widetilde{f} \in S_n$، فإنه:

$$\begin{aligned}
\left\|f(x) - \mathbf{C}^T\mathbf{B}(x)\right\|^2_{L^2[0,1]} &\leq \left\|f(x) - \tilde{f}(x)\right\|^2_{L^2[0,1]} \\
&\leq \int_0^1 \left|f(x) - \tilde{f}(x)\right|^2 dx \\
&= \int_0^1 \left|f^{(n+1)}(\zeta_x)\right|^2 \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)}\right)^2 dx \\
&\leq \frac{\left|f^{(n+1)}(\zeta_x)\right|^2}{(n+1)!} \int_0^1 x^{2n+2} dx \\
&= \frac{\gamma^2}{((n+1)!)^2(2n+3)}.
\end{aligned}$$

ملاحظة 1.1.1 تقريب تابع بمتغيرين $k(x,y)$ من $L^2[0,1)\times[0,1)$ وفق أساس كثيرات حدود برنشتاين بمتغيرين $2D\text{-}BPs$ يعطى بالصيغة التالية: :

$$\begin{aligned}
k(x,y) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} k_{i,j} B_{(i,n)}(x) B_{(j,m)}(y) \\
&= \mathbf{B}(x)\mathbf{K}\mathbf{B}(y).
\end{aligned}$$

حيث : $\mathbf{K}$ مصفوفة من البعد $(n+1)*(m+1)$ معرفة بـ:

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}^{-1}\langle \mathbf{B}(x), \langle k(x,y)\rangle, \mathbf{B}(x)\rangle Q^{-1}$$

و $k_{i,j}$ عناصر المصفوفة $\mathbf{K}$ نحصل عليها بالشكل ::

$$k_{i,j} = \frac{\left\langle B_{(i,n)}(x)., \left\langle k(x,y), B_{(j,m)}(y)\right\rangle\right\rangle}{\left\langle B_{(i,n)}(x)., B_{(i,n)}(y)\right\rangle \left\langle B_{(j,m)}(x), B_{(j,m)}(y)\right\rangle} \tag{11.1}$$

3.1.1.1 برنشتاين المتعامدة المتجانسة OBPs

بإستخدام خوارزمية غرام شميدت يمكن تعيين كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة و المتجانسة OBPs من الدرجة m و المعرفة على المجال $[0,1]$ بالشكل العام التالي: [1, 3, 53].

$$OB_{j,m}(x) = \sqrt{2(m-j)+1}(1-x)^{m-j}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{2m+1-k}{j-k}\binom{j}{k}x^{j-k}.$$

كما يمكن التعبير عن علاقة OBPs بحدود BPs بالصيغة :

$$OB_{j,m}(x) = \sqrt{2(m-j)+1}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\frac{\binom{2m+1-k}{j-k}\binom{j}{k}}{\binom{m-k}{j-k}}B_{j-k,m-k}(x) \qquad (12.1)$$

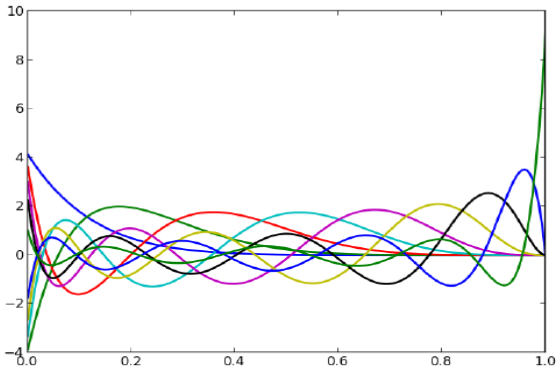
إن OBPs متعامدة بالنسبة لدالة الوزن $w(x)=1$. أي:

$$\int_0^x OB_{i,m}(x)\,OB_{j,m}(x)\,dt = \delta_{ij}, \quad i,j=0,\ldots,m,$$

و كذلك مجموعة OBPs مستقلة خطيا و تامة في الفضاء $L^2([0,1])$.

مثال 1.1.1 حدود *OBPs* من أجل $m=5$ تعطى بالشكل :

$$\begin{aligned}
OB_{0,5}(x) &= \sqrt{11}\,(1-x)^5, \quad OB_{1,5}(x) = 3\,(11x-1)\,(1-x)^4\\
OB_{2,5}(x) &= \sqrt{7}\,\left(55x^2-20x+1\right)(1-x)^3\\
OB_{3,5}(x) &= \sqrt{5}\,\left(165x^3-135x^2+27x-1\right)(1-x)^2\\
OB_{4,5}(x) &= \sqrt{3}\,\left(330x^4-480x^3+216x^2-32x+1\right)(1-x)\\
OB_{5,5}(x) &= 462x^5-1050x^4+840x^3-280x^2+35x-1
\end{aligned}$$



شكل 2.1: كثيرات حدود برنشتاين المتعامد المتجانس OBPs من أجل $n=8$.

2.1.1 كثيرات حدود جاكوبي JPs

من أبرز كثيرات الحدود المتعامدة التي حضيت باهتمام العلماء, كثيرات حدود جاكوبي JPs التي تعرف على المجال $[-1,1]$ و مرفقة بتابع الوزن: $w^{(\alpha,\beta)}(z)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ و تعطى من خلال العلاقة التراجعية التالية: [11, 12, 13, 14]

$$P_{i+1}^{(\alpha,\beta)}(z)=A(\alpha,\beta,i)\,P_i^{(\alpha,\beta)}(z)+zB(\alpha,\beta,i)\,P_i^{(\alpha,\beta)}(z)-D(\alpha,\beta,i)\,P_{i-1}^{(\alpha,\beta)}(z)$$

حيث: $i=0,1,\ldots$ و صيغة كلا من $A(\alpha,\beta,i)$, $B(\alpha,\beta,i)$, $D(\alpha,\beta,i)$ هي:

$$\begin{aligned}A(\alpha,\beta,i) &= \frac{(2i+\alpha+\beta+1)\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{2(i+1)(i+\alpha+\beta+1)(2i+\alpha+\beta)}\\ B(\alpha,\beta,i) &= \frac{(2i+\alpha+\beta+2)(2i+\alpha+\beta+1)}{2(i+1)(i+\alpha+\beta+1)}\\ D(\alpha,\beta,i) &= \frac{(\alpha+i)(i+\beta)(2i+\alpha+\beta+2)}{(i+1)(i+\alpha+\beta+1)(2i+\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

مع: $P_0^{(\alpha,\beta)}(z)=1$ و $P_1^{(\alpha\beta)}(z)=\frac{(\alpha+\beta+1)}{2}z+\frac{\alpha-\beta}{2}$ كماأن كثيرات حدود جاكوبي JPs تتمتع بالخواص التالية:

1. متعامدة على المجال $[-1,1]$ بالنسبة لتابع الوزن $w^{(\alpha,\beta)}(z)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, اي JPs تحقق علاقة التعامد التالية :

$$\int_{-1}^{1}P_j^{(\alpha,\beta)}(z)\,P_k^{(\alpha,\beta)}(z)\,w^{(\alpha,\beta)}(z)\,dz=h_k\delta_{jk}$$

حيث:

$$h_k=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{(2k+\alpha+\beta+1)\,k!\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}$$

2. يمكن إعطاء JPs إعتمادا على المشتق وفق العلاقة التالية:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}}{2^n n!}D^n\left[(x-1)^{n+\alpha}(x+1)^{n+\beta}\right],\quad x\in[-1,1]$$

3. يمكننا التعبير عن JPs كذلك بالشكل:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\frac{\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+r+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+r+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(n-r)!r!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^r$$

عن طريق تبديل المتغير التالي:

$$z=2x-1,\quad x\in[0,1]$$

يتم الحصول على كثيرات حدود جاكوبي المعدلة على المجال $x\in[0,1]$.

تعريف 3.1.1 كثيرات حدود جاكوبي المعدلة على $[0,1]$ تصاغ من خلال العلاقة التراجعية التالية :

$$P_{i+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = A(\alpha,\beta,i)P_i^{(\alpha,\beta)}(x) + (2x-1)B(\alpha,\beta,i)P_i^{(\alpha,\beta)}(x) - D(\alpha,\beta,i)P_{i-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

حيث : $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1, \quad P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+\beta+2)(2x-1)}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$

و بذلك يصبح شرط التعامد على المجال $[0,1]$, بالنسبة لتابع الوزن المعدل $w^{(\alpha,\beta)}(z) = (1-x)^{\alpha}x^{\beta}$ كالتالي :

$$\int_0^1 P_i^{(\alpha,\beta)}(x)P_j^{(\alpha,\beta)}(x)\omega^{(\alpha,\beta)}(x)dx = \theta_i\delta_{ij}$$

حيث :

$$\theta_i = \frac{\Gamma(i+\alpha+1)\Gamma(i+\beta+1)}{(2i+\alpha+\beta+1)i!\Gamma(i+\alpha+\beta+1)}$$

و سلسلة القوى لكثيرات حدود جاكوبي المعدلة تأخذ الصيغة الموالية :

$$P_i^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^{(i-k)}\Gamma(i+\beta+1)\Gamma(i+k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+\beta+1)\Gamma(i+\alpha+\beta+1)(i-k)!k!}x^k, \quad i = 0,1,\ldots$$

خواص 3.1.1 على المجال $[0,1]$ كثيرات حدود جاكوبي المعدلة تحقق : [20 ,12]

1. $P_i^{(\alpha,\beta)}(0) = (-1)^n \frac{\Gamma(i+\beta+1)}{i!\Gamma(\beta+1)}$
2. $P_i^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(i+\alpha+1)}{i!\Gamma(\alpha+1)}$
3. $\frac{d^n}{dx^n}P_i^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(i+\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(i+\alpha+\beta+1)}P_{i-n}^{(\alpha+n,\beta+n)}(x)$

تعريف 4.1.1 ليكن $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ سلسلة دوال كثيرات حدود جاكوبي المعدلة بمتغير واحد $= [0,1]$ D . كثيرات حدود جاكوبي بمتغيرين 2D-JPs معرف على النطاق $D^2 = [0,1][0,1]$ بالعلاقة :

$$P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y) = P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(y), \quad (x,y) \in D^2$$

و هي متعامدة على النطاق D^2 وفق تابع الوزن $w^{(\alpha,\beta)}(x,y) = w^{(\alpha,\beta)}(x)w^{(\alpha,\beta)}(y)$

البرهان 1.2.1 لدينا :

$$\int_0^1\int_0^1 P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y)\,P_{k,l}^{(\alpha,\beta)}(x,y)\,w^{(\alpha,\beta)}(x,y)dxdy$$
$$= \int_0^1 P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_k^{(\alpha,\beta)}(y)\,w^{(\alpha,\beta)}(x)dx \times \int_0^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_l^{(\alpha,\beta)}(y)\,w^{(\alpha,\beta)}(y)$$
$$= \begin{cases} \theta_m\theta_n & (m,n) = (k,l) \\ 0, & (m,n) \neq (k,l) \text{ or } m \neq k, n \neq l \end{cases}$$

1.2.1.1 تقريب تابع وفق اساس *JPs*

ليكن الفضاء الهلبرتي $L^2_{w^{(\alpha,\beta)}}[0,1]$ المزود بالجداء السلمي و النظيم الموالين : [21]

$$(u,v)_{w^{(\alpha,\beta)}} = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, w^{(\alpha,\beta)} dx, \quad \|u\| = (u,v)^{\frac{1}{2}}_{w^{(\alpha,\beta)}}$$

ليكن : $P_n^{(\alpha,\beta)} = Span\left\{P_0^{(\alpha,\beta)}(x), P_1^{(\alpha,\beta)}(x), ..., P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}$ و $f(x) \in L^2_{w^{(\alpha,\beta)}}[0,1]$.
بما أن : $P_n^{(\alpha,\beta)}$ فضاء شعاعي جزئي ذو بعد منتهي و مغلق ، فإنه يوجد أحسن تقريب f_m للدالة f في $P_n^{(\alpha,\beta)}$ و يكون وحيد أي :

$$\forall u \in P_n^{(\alpha,\beta)},\ \exists!\ f_m \in P_n^{(\alpha,\beta)}\ :\ \|f - f_m\| \leq \|f - u\|$$

(انظر [22]) . و بما أن $f_m \in P_n^{(\alpha,\beta)}$ فإن :

$$f(x) \simeq f_m(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j P_j^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{13.1}$$

$$= C^T \Phi(x) \tag{14.1}$$

حيث $C^T = [c_0, c_1, ..., c_n]$ و $\Phi(x) = \left[P_0^{(\alpha,\beta)}(x), P_1^{(\alpha,\beta)}(x), ..., P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]$
المعاملات c_j تحسب من خلال العلاقة :

$$c_j = \frac{1}{\theta_j} \int_0^1 w^{(\alpha,\beta)} f(x)\, P_j^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx \tag{15.1}$$

بفرض أن $f \in C^{(n+1)}[0,1)$ فإن:

$$\|f - f_m\|_{L^2_{w^{(\alpha,\beta)}}[0,1]} \leq \frac{\max_{x\in[0,1)} |f^{(n+1)}(x)|}{(m+1)!} \sqrt{\frac{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(3+2m+\beta)}{\Gamma(4+2m+\alpha+\beta)}} \tag{16.1}$$

تقريب تابع بمتغيرين $k(x,y)$ من $L^2_{w^{(\alpha,\beta)}}[0,1) * [0,1)$ وفق أساس *2B-JPs* يعطى بالصيغة التالية:

$$k(x,t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} g_{ij} P_i^{(\alpha,\beta)}(x) P_j^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{17.1}$$

$$= \Phi^T(x)\mathbf{G}\Phi(t). \tag{18.1}$$

حيث $\mathbf{G}$ مصفوفة من البعد $(n+1)*(m+1)$ عناصرها k_{ij} معرفة بـ:

$$k_{ij} = \frac{1}{\theta_i \theta_j} \int_0^1 \int_0^1 g(x,t) P_i^{(\alpha,\beta)}(x) P_j^{(\alpha,\beta)}(x) \omega^{(\alpha,\beta)}(x) dx \tag{19.1}$$

حيث: $i=0,1,...,m$ $j=0,1,...,m$

3.1.1 نتائج من JPs لوجندر LPs و تشيبيشاف

فيما يأتي سنذكر نتائج من JPs و الأمر متعلق بكثيرات حدود متعامدة مرتبطة بـ JPs, إما كحالة خاصة منها أو بعلاقات و هي على التوالي كثيرات حدود لوجندر LPs و تشيبيشاف من النوع الأول TPs و من النوع الثاني UPs

1.3.1.1 كثيرات حدود لوجندر المعدل LPs

في كثيرات حدود جاكوبي عند وضع $\alpha = \beta = 0$ نجد أن $P_i^{(\alpha,\beta)}(x) = L_i(x)$, حيث . $L_i(x)$ هو كثيرات حدود لوجندر LPs المعروفة و المعدلة على المجال $[0,1]$. أي أننا يمكننا القول أن JPs ما هي إلا تعميم لكثيرات حدود لوجندر و منه ينتج لدينا العلاقة التراجعية لـ LPs كالتالي :

$$\begin{aligned} L_{i+1}(x) &= A(0,0,i)\,L_i(x) + (2x-1)\,B(0,0,i)\,L_i(x) - D(0,0,i)\,L_{i-1}(x) \\ &= \frac{2k+1}{k+1}(2x-1)\,L_i(x) - \frac{k}{k+1}L_{i-1}(x) \end{aligned} \tag{20.1}$$

حيث : $L_0(x) = 1, L_1(x) = 2x-1$

و شرط التعامد بالنسبة لتابع الوزن $w^{(0,0)}(x) = 1$ محقق أي: $\int_0^1 L_i(x)\,L_k(x)\,dx = \frac{1}{2i+1}\delta_{ik}$

سلسلة القوى لـ LPs تصاغ بـ : $L_i(x) = \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}\begin{pmatrix} i+k \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}x^k$

و إذا كان التابع $f(x) \in L^2[0,1]$ فان تقريبه وفق أساس LPs يعطي الشكل:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} l_j L_j(x) \tag{21.1}$$

حيث معاملات لوجندر تحسب بالعلاقة : $l_j = (2j+1)\int_0^1 L_j(x)\,f(x)\,dx, \quad j = 0,...,m$

ملاحظة 2.1.1 يمكن الإنتقال بين الأساسين BPs و LPs وفق العلاقات التالية:

$B_{k,m}(x) = \sum_{k=0}^{m} w_{k,i}L_i(x)$, و $L_k(x) = \sum_{j=0}^{m}\Lambda_{k,i}B_{j,m}(x)$ حيث :

$$w_{k,j} = \frac{(2j+1)}{m+j+1}\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}\frac{\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} m+j \\ k+i \end{pmatrix}}, \quad k,i = 0,...,m, \tag{22.1}$$

$$\Lambda_{k,j} = \frac{1}{\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}}\sum_{i=r}^{\min\{j,k\}}(-1)^{k+i}\binom{k}{i}^2\binom{m-k}{j-i}, r = \max\{0, j+k-m\} \tag{23.1}$$

2.3.1.1 كثيرات حدود تشيبيشاف من النوع الأول TPs و من النوع الثاني UPs

من أكثر كثيرات الحدود المتعامدة شيوعا كثيرات حدود تشيبيشاف من النوع الأول TPs و تشيبيشاف من النوع الثاني UPs و التي تعتبر حالة خاصة من كثيرات حدود جاكوبي JPs و ترتبط معها من خلال العلاقات التالية:

$$T_i(x)\frac{i!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right)}P_i^{\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)}(x), \quad U_i(x)\frac{(i+1)!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(i+\frac{3}{2}\right)}P_i^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)$$

و منه ينتج لنا أن كثيرات حدود تشيبيشاف من النوع الأول معرف على المجال $[0,1]$ بالشكل :

$$T_n(x) = 2(2x-1)T_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{24.1}$$

حيث : $T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = 2x-1$,
و متعامدة وفق تابع الوزن $w(x) = (x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ أي:

$$\int_0^1 T_j(x)T_k(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ \pi, & j=k=0 \\ \frac{\pi}{2}, & j=k\neq 0 \end{cases}, 0 \leq j,k \leq i \tag{25.1}$$

يمكننا كتابة TPs على شكل سلسلة قوى كما يلي :

$$T_i(x) = i\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\frac{2^{2k}(i+k-1)!}{(2k)!(i-k)!}x^k, \quad i>0 \tag{26.1}$$

أما بالنسبة لتشيبيشاف من النوع الثاني UPs تكون معرفة على المجال $[0,1]$ بالعلاقة التراجعية:

$$U_{i+1}(x) = 2(2x-1)U_i(x) - U_{n-1}(x) \tag{27.1}$$

حيث: $U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 4x-2$
و متعامدة وفق تابع الوزن $w(x) = \sqrt{x-x^2}$ أي:

$$\int_0^1 U_j(x)U_k(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ \frac{\pi}{8}, & j=k \end{cases}$$

يمكننا كتابة UPs على شكل سلسلة قوى كما يلي:

$$U_i(x) = \sum_{k=0}^{i}(-1)^k\frac{2^{2i-2k}\Gamma(i+k-1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2i-2k+2)}x^{i-k}, \quad i>0$$

2.1 لمحة في المويجات

1.2.1 المويجات

ان تطبيقات المويجات ظاهر في جميع الميادين مثل علم الفلك و الاتصالات و البصريات و الزلازل .... و للمويجات تطبيقات رياضية بحتة مثل حل المعادلات التفاضلية الجزئية و المعادلات التكاملية و التفاضلية-التكاملية كما ان المويجات تشكل أساسا قابل للعد في الفضاء $L^2(\mathbb{R})$ و التي أعطت نتائج جيدة في مجال تمثيل و تقريب التوابع .

تعرف المويجات بأنها توابع ذات قيم حقيقية او عقدية و متغير حقيقي (الزمن) [28, 25, 26]

$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ و تحقق: $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, dx = 0$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2\, dx < \infty$

يسمى ψ المويجة الأم او مويجة

من جهة اخرى تعرف أسرة التوابع $\psi_{a,b}(x)$ المولدة من تابع المويجة بالعلاقة :

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right), a \in \mathbb{R}^*, a \in \mathbb{R} \qquad (28.1)$$

حيث a يدل على المقاس scale و دوره قياس درجة انضغاط الدالة وأما b وسيط يدل على الإنسحاب على محور الزمن. بأخذ قيم خاصة للعدين a و b بالشكل $a = a_0^{-j}, b = ka_0^{-j}b_0$ نحصل على :

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a_0^{-j}}}\psi\left(\frac{x - ka_0^{-j}b_0}{a_0^{-j}}\right) \qquad (29.1)$$

$$= a_0^{\frac{j}{2}}\psi\left(a_0^j x - kb_0\right), a_0 > 1, b_0 > 0 \qquad (30.1)$$

و حسب العالم shanoo غالبا ما نأخذ $a_0 = 2, b_0 = 1$ فتصبح التوابع المولدة من المويجات هي :

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi\left(2^j x - k\right) \qquad (31.1)$$

2.2.1 التحليل متعدد الدقة Multi-Resolution Analysis (MRA)

شهدت نظرية المويجات تطورا مهما بفضل العالم ملاط في عام 1989 م حيث عرف التحليل متعدد الدقة MRA [24, 23, 26, 27] و هو عبارة عن متتالية $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ من الفضاءات الجزئية من الفضاء $L^2(\mathbb{R})$ تحقق الشروط التالية :

1. الفضاءات متداخلة اي :

$$\forall j \in \mathbb{Z} : V_j \subset V_{j+1} \qquad (32.1)$$

2. إتحاد هذه الفضاءات كثيفة في $L^2(\mathbb{R})$ اي :

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \tag{33.1}$$

3. تقاطع هذه الفضاءات يقتصر فقط على العنصر الصفري اي :

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\} \tag{34.1}$$

4. تحقق العلاقة التالية :

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1} \Leftrightarrow f\left(2^{-j}x\right) \in V_0 \tag{35.1}$$

5. يوجد تابع $\varphi \in V_0$ بحيث تشكل المجموعة $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ أساسا متعامدا متجانسا للفضاء $L^2(\mathbb{R})$.

يسمى φ تابع المقاس المرتبط بالتحليل متعدد الدقة $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ أو تابع مويجة الأب .

نتائج 1.2.1

من تعريف *MRA* لدينا مايلي :

1. الأسرة $\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi\left(2^j x - k\right)$ تشكل أساسا متعامد متجانس للفضاء V_j

2. ليكن ψ المويجة الأم فإنه يكون لدينا :

$$\psi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(2x-n) \tag{36.1}$$

مويجة متعامدة متجانسة

3. تشكل الأسرة

$$\left\{\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi\left(2^j x - k\right), k \in \mathbb{Z}\right\} \tag{37.1}$$

أساس متعامد متجانس للفضاء W_j من أجل j مثبت حيث :

$$W_j = \overline{spm\left\{\psi_{j,k}(x)\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}} \tag{38.1}$$

4. تشكل الجملة $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ أساسا متعامدا متجانسا قابل للعد في للفضاء $L^2(\mathbb{R})$.
ذلك لان $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ و نستطيع كتابة : $\bigcup_j V_j = \bigcup_j W_j$
و من تعريف *MRA* لدينا

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_j V_j} = \overline{\bigcup_j W_j} \tag{39.1}$$

3.1 مقدمة في المعادلات التكاملية- التفاضلية *IDEs*

1.3.1 المعادلات التكاملية- التفاضلية *IDEs*

التداخل الحاصل في السنوات الأخيرة بين مختلف العلوم أدى الى تعقدها و تطورها بشكل رهيب جدا و بدأ العلماء بدراسة الظواهر الطبيعية سواء كانت فيزيائية ، كيميائيه، بيولوجيه أو هندسية , كان للمعادلات التكاملية بمختلف أنواعها دورا بارزاً في تفسير هذه الظواهر و إيجاد الحلول المختلفة لها سواء كانت تحليليه أو عددية. و للمعادلات التكاملية أهميتها الخاصة بين أفرع العلوم الرياضية المختلفة مثل المعادلات التفاضلية الجزئية و العادية و التحليل الدالي . و من جهة أخرى كانت المعادلات التكاملية-التفاضلية *IDEs* مادة أساسية في فهم العديد من المسائل الفيزيائية والرياضية. ففي مطلع القرن العشرين شرع كل من العالم الإيطالي فولتيرا *(V. Volterra)* والعالم السويدي فريدهولم *(I.Fredholm)* في وضع هذه المعادلات أي المعادلات التكاملية-التفاضلية واستخدامها في دراستهما، فكان أثرهما كبيراًفي تطوير المعادلات التكاملية-التفاضلية و التي كان لها دور بارز في بناء التحليل الرياضي والدالي . و بالرغم ان معظم المسائل الفيزيائية تصاغ بمعادلات تفاضلية إلا أننا يمكن إستبدال تلك المعادلات التفاضلية الى معادلات تكاملية سواءا كانت خطية أو غير خطية كي يكون حلها أكثر كفاءة و دقة و بطرق أبسط .

تعريف 1.3.1 المعادلة التفاضلية-التكاملية *(integro-differential equation)* هي معادلة تحتوي على التفاضل و التكامل، وتكون من الشكل: [29]

$$\mathsf{y}^{(n)}(x) = \mathsf{F}\left(x, \mathsf{y}(x), \ldots, \mathsf{y}^{(n-1)}(x), \lambda \int_{\Omega} \mathsf{k}\left(x, t, \mathsf{y}(t), \ldots, \mathsf{y}^{(n-1)}(t)\right) dt\right) \quad (40.1)$$

أو من الشكل: [30, 31]

$$L_x(\mathsf{y}) = \lambda \int_{\Omega} \mathsf{k}(x,t) M_t(\mathsf{y}) + \mathsf{g}(x) \quad (41.1)$$

حيث:

1. $\mathsf{k}(x,t)$ دالة معلومة، تسمى نواة المعادلة التفاضلية التكاملية.
2. Ω مجموعة جزئية مفتوحة من R.
3. $L_x(\mathsf{y}) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\mathsf{y}^{(i)}(x)$ و $M_t(\mathsf{y}) = \sum_{j=0}^{m} d_j(t)\mathsf{y}^{(j)}(t)$
4. $a_i(x), d_j(x), \mathsf{g}(x)$ دوال معلومة محتواة في $L^2(\Omega)$.

و بما أن هذه المعادلة تحتوي على التفاضل فإنه من الضروري وجود الشروط الإبتدائية التالية:

$$\mathsf{y}(\alpha) = \beta_0, \quad \mathsf{y}'(\alpha) = \beta_1, \quad \mathsf{y}''(\alpha) = \beta_2, \quad \ldots \quad \mathsf{y}^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1}$$

حيث $\alpha \in \Omega$ و β_i ثوابت، $i = 0, \ldots, n-1$.

2.3.1 تصنيفات *IDEs*

تصنف المعادلات التفاضلية التكاملية من حيث:

1. **طرفي التكامل :** [34 ,33 ,32] إذا كان طرفي التكامل عبارة عن ثابتين فإن المعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم وهي تأخذ الشكل التالي

$$L_x(\mathsf{y}) = \lambda \int_a^b \mathsf{k}(x,t) M_t(\mathsf{y}) + \mathsf{g}(x) \qquad (42.1)$$

و إذا كان أحد أطراف التكامل عبارة عن متغير x فإن المعادلة التفاضلية التكاملية لفلتيرا و تكون على الشكل التالي : [35]:

$$L_x(\mathsf{y}) = \lambda \int_a^x \mathsf{k}(x,t) M_t(\mathsf{y}) + \mathsf{g}(x) \qquad (43.1)$$

و إذا وجد كل من تكامل فريدهولم و تكامل فلتيرا في نفس المعادلة، فإن المعادلة التفاضلية-التكاملية لفريدهولم-فولتيرا و شكلها كما يلي : [36 ,37]:

$$L_x(\mathsf{y}) = \lambda_1 \int_a^b \mathsf{k}_1(x,t) M_t(\mathsf{y}) + \lambda_2 \int_a^x \mathsf{k}_2(x,t) M_t(\mathsf{y}) + \mathsf{g}(x) \qquad (44.1)$$

2. **رتبة المعادلة التفاضلية التكاملية:** رتبة المعادلة التفاضلية التكاملية هي رتبة أعلى مشتق في المعادلة.

3. **خطية أو غير خطية:** يقال عن المعادلة التفاضلية- التكاملية أنها خطية إذا كانت من الشكل (41.1)، و غير خطية إذا كانت من الشكل (40.1).

4. **من النوع الأول أو الثاني:** إذا كان الجزء التفاضلي معدوم تكون المعادلة التفاضلية التكاملية من النوع الأول [35]، أما إذا كان غير معدوم تكون المعادلة من النوع الثاني [31].

5. **متجانسة أو غير متجانسة:** إذا كانت $\mathsf{g}(x) = 0$ فإن المعادلة التفاضلية التكاملية متجانسة، أما إذا كانت $\mathsf{g}(x)$ غير معدومة تكون المعادلة غير متجانسة.

6. **شاذة أو غير شاذة:** يقال عن المعادلة التفاضلية التكاملية أنها شاذة إذا تحقق على الأقل أحد الشرطين التاليين:
   1. أحد طرفي التكامل أو كلاهما يساوي ∞.
   2. النواة غير منتهية بجوار نقطة أو أكثر من مجال التكامل.

   أما إذا لم يتحقق أي شرط من الشرطين السابقين، تكون المعادلة غير شاذة.

7. **عدد المتغيرات للدالة المجهولة:** يقال عن المعادلة التفاضلية-التكاملية أنها عادية إذا كانت الدالة المجهولة متعلقة بمتغير مستقل واحد، أما إذا كانت متعلقة بمتغيرين مستقلين أو أكثر تكون المعادلة التفاضلية التكاملية جزئية [38].

الفصل الثاني

صياغة تقنية عددية لحل IDEs نوع القطع المكافئ ذات شروط غير محلية باستعمال OBPs

قائمة المحتويـــــــات

1.2 مقدمة 23
2.2 بناء OM مصفوفات العمليات الجديدة لأساس OBPs 24
1.2.2 مصفوفة العمليات للتكامل OMI 25
2.2.2 مصفوفة العمليات للتفاضل OMD 27
3.2.2 التمثيل المصفوفي للجداء OMP 28
4.2.2 تطبيقات في فاعلية OM 29
3.2 تقنية عددية لحل IDEs نوع القطع المكافئ ذات شروط غير محلية 34
1.3.2 المسألة المكافئة متجانسة الشروط 35
2.3.2 التقنية العددية لمعالجة المسألة 35
3.3.2 تطبيق عددي 40
4.2 الإستنتاج 42

1.2 مقدمة

إنشاء مصفوفات العمليات *OM* لعب دورا حيويا في تطوير تقنيات جديدة لحل المسائل من خلال خوارزميات مناسبة للحواسيب الرقمية. تكمن أهمية *OM* في إزالة تعقيدات عبارات المسائل و المحافظة على أساس التقريب في القسم الأول من هذا الفصل إعتمدنا على برنشتاين المتعامد المتجانس *OBPs* و على غرار ما قدمه: *[S.A. YouseÖ, M.Behroozifar]* في [39] قمنا نحن بدورنا بإنشاء مصفوفة العمليات الجديدة للتكامل P و للتفاضل D, و للجداء $\hat{C}$ المعرفة كما يلي : [39]

$$\int_0^x OB(t)\,dt \simeq P \times OB(x) \quad , \quad \frac{d}{dx}OB(x) \simeq D \times OB(x),$$

$$c^T OB(x)\, OB(x)^T \simeq OB(x)^T \times \hat{C}$$

حيث : $OB(x) = [OB_0(x), OB_1(x), ..., OB_m(x)]^T$ و c شعاع معاملات *OBPs*. و P, $\hat{C}$, D, مصفوفات من البعد $(m+1)\times(m+1)$. تم طرح فكرة مصفوفة العمليات في 1975م من طرف *Chen* و *Hsiao* على دوال *Walsh* [40] ثم أعطيت مصفوفات العمليات للتكامل P لدوال القطع النبضية *BPFs* (أنظر [41 ,43 ,42]) و بدأ العمل بها فقدمت مصفوفات العمليات لكثير حدود لاغير , لوجندر , تشيبيشاف و سلسلة تايلر و فوري (أنظر [48 ,46 ,45 ,47 ,44] و [50 ,52 ,49 ,51]) وقدم *[A. Bencheikh, L. Chiter, H. Abbassi]* مصفوفات العمليات الجديدة لـ *OBPs* و بعض تطبيقاتها [3]. و باستخدام مصفوفات العمليات الجديدة *OM* لأساس *OBPs* سنقدم تقنية عددية للحل التقريبي للمعادلة التكاملية-التفاضلية من نوع القطع المكافئ *PIDEs* ذات الشروط الغير محلية التالية :

$$v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = \int_0^t a(t-\tau)\, v(x,\tau)\, d\tau, 0 < x < 1, 0 < t \leq T \quad (1.2)$$

$$v(x,0) = \Phi(x), \quad 0 < x < 1 \quad (2.2)$$

و بالشروط الغير محلية (شروط التكامل):

$$\int_0^1 v(x,t)\,dx = r(t), \quad \int_0^1 xv(x,t)\,dx = q(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (3.2)$$

تظهر شروط غير محلية عندما ترتبط قيم الدالة على الحدود بالقيم داخل النطاق . حيث اثارت مسائل ذات القيم الحدية الغير محلية إهتمام العلماء حاليا على سبيل المثال (انظر [55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63]) في الأونة الأخيرة تم دراسة مسائل المعادلات التفاضلية الجزئية *PDEs* من هذا النوع في [55, 57, 64, 60, 65, 66, 67] و تم توسيع مفهوم الشروط الغير محلية ليشمل مسائل *IDEs* [61, 68, 69, 63]. و معظم تلك المسائل ناقشت من طرف الباحثين مبدأ الوجود ووحدانية الحل . لذا إرتأينا أن نساهم في عملية المعالجة العددية لنوع من تللك المسائل و هي المسألة (1.2)--(3.2) حيث قدم *(A.Merad,A. Bouziani,C.Ozel)* في [68] معالجة عددية عن طريق تحويل لابلاس و في [68] درست بطريقة *Rothe method*

2.2 بناء OM مصفوفات العمليات الجديدة لأساس OBPs

1.0.2.2 الكتابة وفق أساس تايلر

قبل صياغة مصفوفات العمليات الجديدة السالفة الذكر كان علينا كتابة كثيرات حدود برنشتين المتعامدة المتجانسة *OBPs* وفق أساس تايلر $\{1, x, \ldots, x^m\}$, باستعمال (12.1) يكون لدينا :
من أجل $x \in [0,1]$ و $i = 0, \ldots, m$,

$$\begin{aligned} OB_{j,m}(x) &= \sqrt{2(m-j)+1}\left(\sum_{r=0}^{m-i}\alpha_{i,r}x^r\right)\left(\sum_{j=0}^{i}\beta_{i,j}x^j\right) \\ &= \sqrt{2(m-j)+1}\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{k=\max\{0,j-m+i\}}^{\min\{i,j\}}\alpha_{i,j-k}\beta_{i,k}\right)x^j \end{aligned} \quad (4.2)$$

حيث:

$$\alpha_{i,r} = (-1)^r\binom{m-i}{r}, \quad r = 0, \ldots, m-i, \quad (5.2)$$

$$\beta_{i,j} = (-1)^{i-j}\binom{2m+1-i+j}{j}\binom{i}{i-j}, \quad j = 0, \ldots, i. \quad (6.2)$$

إذن ينتج لنا الشكل المصفوفي لأساس *OBPs* و فق أساس تايلر :

$$OB(x) = MT_m(x), \quad x \in [0,1], \quad (7.2)$$

حيث M مصفوفة من البعد $(n+1)\times(n+1)$ عناصرها معرفة بالصيغة :

$$M_{i,j} = \sqrt{2(m-j)+1}\sum_{k=\max 0,j-m+i}^{\min i,j}\alpha_{i,j-k}\beta_{i,k}, \quad i,j = 0, \ldots, m \quad (8.2)$$

مع $T_m(x) = [1, x, \ldots, x^m]^T$. و $OB(x) = [OB_{0,m}(x), OB_{1,m}(x), \ldots, OB_{m,m}(x)]^T$
بالنسبة لتقريب تابع وفق أساس *OBPs* لدينا :
إذا كان التابع $f(x) \in L^2[0,1]$ فإن تقريبه وفق أساس *OBPs* يعطي الشكل :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} c_{j,m}OB_{j,m}(x) \quad (9.2)$$

$$= C^T OB(x) \quad (10.2)$$

حيث $C = [c_{0,m}, c_{1,m}, \ldots, c_{m,m}]^T$ شعاع معاملات التحليل و فق أساس *OBPs* و يعين من خلال:

$$C =< f(x).OB(x) > \quad (11.2)$$

1.2.2 مصفوفة العمليات للتكامل *OMI*

سنقوم ببناء P مصفوفة العمليات للتكامل ذات البعد $(m+1)\times(m+1)$ و التي تحقق :

$$\int_0^x OB(t)dt \simeq P\cdot \mathbf{OB}(\mathbf{x}),\quad 0\leq x\leq 1. \tag{12.2}$$

من العلاقة (46.2) , لدينا

$$\int_0^x OB\left(t\right)dt = M\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{m+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ x^2\\ \vdots\\ x^{m+1}\end{bmatrix} \tag{13.2}$$

$$= M\Lambda X, \tag{14.2}$$

حيث : $X=\begin{bmatrix} x & x^2 & \cdots & x^{m+1}\end{bmatrix}^T$ و Λ مصفوفة من البعد $(m+1)\times(m+1)$ معرفة بـ :

$$\Lambda=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{m+1}\end{bmatrix} \tag{15.2}$$

نقوم بتقريب مركبات الشعاع X وفق الأساس $\{OB_{j,m}\}_{j=0}^{m}$
من العلاقة (46.2) لدينا :

$$T_m\left(x\right)=M^{-1}OB\left(x\right) \tag{16.2}$$

و منه من أجل $k=0,1,\ldots,m$ يكون :

$$x^k=M_{k+1}^{-1}OB\left(x\right), \tag{17.2}$$

حيث M_{k+1}^{-1} هو السطر $(k+1)^{th}$ للمصفوفة M^{-1} و المكتوبة بالشكل :

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} M_1^{-1}\\ M_2^{-1}\\ \vdots\\ M_{k+1}^{-1}\end{bmatrix}. \tag{18.2}$$

من أجل $k=0,1,\ldots,m$, يبقى لنا التابع x^{m+1}. هو الاخر علينا تقريبه وفق أساس *OBPs* وذلك بإستعمال (9.1), نجد أن :

$$x^{m+1}=c_{m+1}^{T}OB\left(x\right) \tag{19.2}$$

حيث

$$c_{m+1} = \int_0^1 x^{m+1} OB\,(t)\,dt. \tag{20.2}$$

و منه الشعاع X يكتب بدلالة المصفوفة M كما يلي :

$$X = \begin{bmatrix} M_2^{-1} \\ M_3^{-1} \\ \vdots \\ M_{m+1}^{-1} \\ c_{m+1}^T \end{bmatrix} OB\,(x)\,. \tag{21.2}$$

و بوضع :

$$B = \begin{bmatrix} M_2^{-1} \\ M_3^{-1} \\ \vdots \\ M_{m+1}^{-1} \\ c_{m+1}^T \end{bmatrix}, \tag{22.2}$$

ينتج لدينا التمثيل المصفوفي للتكامل P المعرف كما يلي :

$$\int_0^x OB\,(t)\,dt = M\Lambda B \cdot OB\,(x) \tag{23.2}$$

$$= P \cdot OB(x) \tag{24.2}$$

و بذلك اعطينا صياغة لـ P مصفوفة العمليات الجديدة للتكامل *OMI* وفق أساس برنشتاين المتعامد المتجانس *OBPs*

مثال 1.2.2

من أجل $m = 5$

$$P_5 = \begin{bmatrix} \frac{11}{72} & \frac{23}{264}\sqrt{11} & \frac{109}{3960}\sqrt{77} & \frac{331}{11\,880}\sqrt{55} & \frac{659}{23\,760}\sqrt{33} & \frac{925}{33\,264}\sqrt{11} \\ -\frac{1}{264}\sqrt{11} & \frac{1}{8} & \frac{11}{120}\sqrt{7} & \frac{29}{360}\sqrt{5} & \frac{61}{720}\sqrt{3} & \frac{83}{1008} \\ \frac{1}{3960}\sqrt{77} & -\frac{1}{120}\sqrt{7} & \frac{7}{72} & \frac{7}{216}\sqrt{35} & \frac{11}{432}\sqrt{21} & \frac{89}{3024}\sqrt{7} \\ -\frac{1}{11\,880}\sqrt{55} & \frac{1}{360}\sqrt{5} & -\frac{1}{216}\sqrt{35} & \frac{5}{72} & \frac{5}{144}\sqrt{15} & \frac{23}{1008}\sqrt{5} \\ \frac{1}{23\,760}\sqrt{33} & -\frac{1}{720}\sqrt{3} & \frac{1}{432}\sqrt{21} & -\frac{1}{144}\sqrt{15} & \frac{1}{24} & \frac{19}{504}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{33\,264}\sqrt{11} & \frac{1}{1008} & -\frac{5}{3024}\sqrt{7} & \frac{5}{1008}\sqrt{5} & -\frac{5}{504}\sqrt{3} & \frac{1}{72} \end{bmatrix}$$

2.2.2 مصفوفة العمليات للتفاضل OMD

في هذه الفقرة نريد إنشاء D مصفوفة العمليات للتفاضل ذات البعد $(m+1)\times(m+1)$ و التي تحقق :

$$\frac{d}{dx}OB\left(x\right)\simeq D\cdot OB\left(x\right),,\quad 0\leq x\leq 1. \tag{25.2}$$

من المعلوم أن : $OB\left(x\right)=MT_m\left(x\right)$, إذن :

$$\frac{d}{dx}OB\left(x\right) = M\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&0\\0&2&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\x\\\vdots\\x^{m-1}\end{bmatrix} \tag{26.2}$$

$$= M\Lambda' X', \tag{27.2}$$

حيث : $X'=\begin{bmatrix}1&x&x^2&\cdots&x^{m-1}\end{bmatrix}^T$ و Λ' مصفوفة من البعد $(m+1)\times m$

$$\Lambda'=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&0\\0&2&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&m\end{bmatrix} \tag{28.2}$$

و الان نقوم بتقريب الشعاع X' وفق الأساس $\{OB_{j,m}\}_{j=0}^{m}$. بإستعمال (17.2) يمكن كتابة : $X'=B'OB\left(x\right)$, حيث

$$B'=\begin{bmatrix}M_1^{-1}\\M_2^{-1}\\M_3^{-1}\\\vdots\\M_m^{-1}\end{bmatrix}, \tag{29.2}$$

و منه

$$\frac{d}{dx}OB\left(x\right)=M\Lambda' B'\cdot OB\left(x\right). \tag{30.2}$$

إذن تنتج لنا مصفوفة العمليات للتفاضل و المعرفة بالصيغة :

$$D=M\Lambda' B'. \tag{31.2}$$

مثال 2.2.2

من أجل $m=5$

$$D_5=\begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{19}{6}\sqrt{11} & -\frac{9}{2} & -\frac{10}{21}\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{7}\sqrt{11} & \frac{73}{21}\sqrt{7} & -\frac{7}{2} & -\frac{27}{70}\sqrt{35} & 0 & 0 \\ \sqrt{5}\sqrt{11} & -3\sqrt{5} & \frac{97}{70}\sqrt{35} & -\frac{5}{2} & -\frac{16}{15}\sqrt{15} & 0 \\ -\sqrt{3}\sqrt{11} & 3\sqrt{3} & -\sqrt{21} & \frac{31}{15}\sqrt{15} & -\frac{3}{2} & -\frac{35}{6}\sqrt{3} \\ \sqrt{11} & -3 & \sqrt{7} & -\sqrt{5} & \frac{41}{6}\sqrt{3} & \frac{35}{2} \end{bmatrix}$$

3.2.2 التمثيل المصفوفي للجداء *OMP*

في هذه الفقرة نريد أن نعطي تمثيلا مصفوفيا لعبارة الجداء التالي $c^TOB(x)\,OB(x)^T$ حيث c شعاع معاملات *OBPs* ذو البعد $(m+1)\times 1$ أي نريد إيجاد المصفوفة $\hat{C}$ ذات البعد $(m+1)\times(m+1)$ و التي تدعى مصفوفة العمليات للجداء و التي تحقق :

$$c^TOB(x)\,OB(x)^T \simeq OB(x)^T.\hat{C} \tag{32.2}$$

من (46.2) و $c^TOB(x)=\sum_{j=0}^{m}c_jOB_{j,m}(x)$ لدينا

$$\begin{aligned} & c^TOB(x)OB(x)^T \\ = \; & c^TOB(x)T_m(x)^TM^T \\ = \; & \left[c^TOB(x), x\left(c^TOB(x)\right), x^2\left(c^TOB(x)\right), \ldots, x^m\left(c^TOB(x)\right)\right]M^T \\ = \; & \left[\sum_{k=0}^{m}c_kOB_{k,m}(x), \sum_{k=0}^{m}c_kxOB_{k,m}(x), \ldots, \sum_{k=0}^{m}c_kx^mOB_{k,m}(x)\right]M^T. \end{aligned}$$

و من خلال (48.2) و (9.1), و بوضع :

$$e_{j,k}=\begin{bmatrix} e_0^{j,k} \\ e_1^{j,k} \\ \vdots \\ e_m^{j,k} \end{bmatrix}. \tag{33.2}$$

نحصل على تقريب التابع $x^jOB_{k,m}(x)$ وفق الأساس $\{OB_{j,m}\}_{j=0}^{m}$. كما يلي :

$$x^jOB_{k,m}(x)=e_{j,k}^TOB(x), \quad j,k=0,1,\ldots,m. \tag{34.2}$$

وهكذا، نحصل على

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} c_k x^j OB_{k,m}(x) &= \sum_{k=0}^{m} c_k \left(\sum_{i=0}^{m} e_{i,k}^T OB_{i,m}(x) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m} OB_{i,m}(x) \left(\sum_{k=0}^{m} c_k e_{i,k}^T \right) \\ &= OB(x)^T \left[e_{j,0}, e_{j,1}, \ldots, e_{j,m} \right] c \\ &= OB(x)^T \hat{E}_{j+i}, \end{aligned} \tag{35.2}$$

حيث

$$\hat{E}_{j+i} = \left[e_{j,0}, e_{j,1}, \ldots, e_{j,m} \right] c$$

لنعرف المصفوفة

$$\hat{E} = \left[\hat{E} \right]_{(m+1)\times(m+1)} = \left[\hat{E}_1, \hat{E}_2, \ldots, \hat{E}_m \right] \tag{36.2}$$

و بتعويض (33.2) في (35.2), نجد

$$c^T OB(x) OB(x)^T \simeq OB(x)^T \hat{E} M^T, \tag{37.2}$$

و منه

$$\hat{C} = \hat{E} M^T. \tag{38.2}$$

4.2.2 تطبيقات في فاعلية *OM*

في هذه الفقرة سنورد أمثلة على تطبيقات *OM* مصفوفات العمليات لكثير حدود برنشتاين المتعامد المتحانس و كفائتها في تقريب حلول بعض المسائل من خلال أمثلة تطبيقية في المعادلات التفاضلية و المعادلات التكاملية-التفاضلية

1.4.2.2 تطبيق في حل معادلة *Emden--Fowler*

نعتبر معادلة *Emden--Fowler* (أنظر [54]) :

$$y''(x) + \frac{k}{x} y\prime(x) + x^r y^n(x) = 0, \ 0 < x \leq 1, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{39.2}$$

و الشروط الإبتدائية

$$y(0) = 1, \ y'(0) = 0. \tag{40.2}$$

نضع التقريب التالي : $y''(x) = c^T OB(x)$

بإستعمال (12.2) و الشروط الإبتدائية (40.2) يكون لدينا:

$$y'(x) = c^T P \times OB(x),\ y(x) = c^T P^2 \times OB(x) + d^T OB(x) = h^T OB(x) \quad (41.2)$$

حيث $d^T OB(x) = 1$ و $h = \left(P^T\right)^2 c + d$ and. بإستعمال (41.2) و (32.2) نجد

$$y^2(x) = h^T OB(x) OB(x)^T h \simeq OB(x)^T \hat{h} h \quad (42.2)$$

مع

$$y^3(x) = h^T OB(x) OB(x)^T \hat{h} h \simeq OB(x)^T \hat{h}^2 h \quad (43.2)$$

ومنه بصفة عامة ينتج :

$$y^n(x) \simeq OB(x)^T \hat{h}^{n-1} h,\ n \in \mathbb{N} \quad (44.2)$$

حيث $\hat{h}$ مصفوفة العمليات الجداء.

من جهة أخرى لديتا :

$$x = e^T OB(x),\ x^{r+1} = k^T OB(x) \quad (45.2)$$

بتعويض (45.2) في (39.2) نجد :

$$e^T OB(x) OB(x)^T c + 2c^T P \times OB(x) + k^T OB(t) OB(x)^T \hat{h}^{n-1} h = 0 \quad (46.2)$$

بإستعمال (32.2) نحصل على :

$$e^T OB(x) OB(x)^T = OB(x)^T \hat{E} \quad (47.2)$$

و

$$k^T OB(x) OB(x)^T = OB(x)^T \hat{K} \quad (48.2)$$

بتعويض (48.2) و (47.2) في (46.2) نجد :

$$OB(x)^T \hat{E} c + 2OB(x)^T P^T c + OB(x)^T \hat{K} \hat{h}^{n-1} h = 0 \quad (49.2)$$

و أخيرا نتحصل على الشكل الموالي :

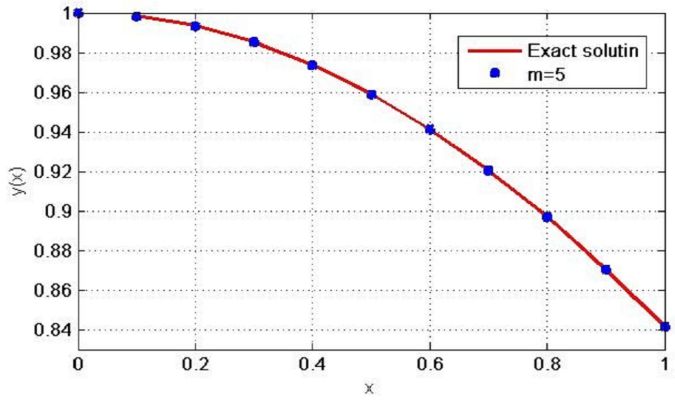
$$\hat{E} c + 2P^T c + \hat{K} \hat{h}^{n-1} h = 0 \quad (50.2)$$

المعادلة (50.2) عبارة عن جملة معادلات جبرية بمجاهيل معاملات الشعاع c .

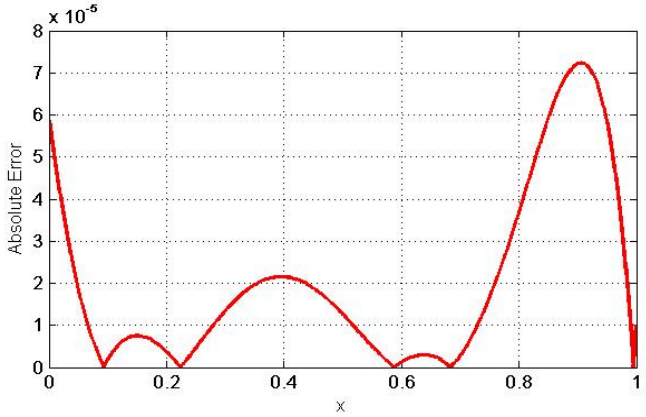
مثال 3.2.2 الجدول (1.2) التالي يمثل المعادلة من أجل $r = 0, n = 1$ و الحل التقريبي من أجل $m = 3, m = 5$ مع الحل الدقيق $y(x) = \frac{sin(x)}{x}$ و الشكل (1.2) منحني الحل الدقيق و الحل التقريبي من أجل $m = 5$ و الشكل (2.2) منحني الخطأ المطلق من أجل $m = 3$

جدول 1.2: الحل الدقيق و التقريبي من أجل $m = 3$ و $m = 5$ للمثال (3.2.2)

الحل الدقيق	عرض نتيجة الطريقة من أجل $n = 3$	$n = 5$	x
0.9983341664682815	0.998 37	0.998 31	0.1
0.9933466539753061	0.993 40	0.993 32	0.2
0.9850673555377986	0.985 09	0.985 05	0.3
0.9735458557716263	0.973 52	0.973 54	0.4
0.958851077208406	0.958 81	0.958 85	0.5
0.9410707889917257	0.941 04	0.941 08	0.6
0.9203109817681301	0.920 31	0.920 33	0.7
0.8966951136244035	0.896 72	0.896 72	0.8
0.8703632329194261	0.870 37	0.870 37	0.9
0.8414709848078965	0.841 36	0.841 44	1.0



شكل 1.2: منحني الحل الدقيق و الحل التقريبي من أجل $m = 5$ للمثال (3.2.2)



شكل 2.2: منحني الخطأ المطلق من أجل $m = 5$ للمثال (3.2.2)

2.4.2.2 تطبيق في حل معادلة تكاملية-تفاضلية لفريدهولم خطية

لنعتبر المعادلة التكاملية-التفاضلية لفريدهولم الخطية التالية :

$$y'(x) = f(x) + y(x) + \int_0^1 k(x,s)\, y(s)\, ds, 0 \leq x < 1 \quad (51.2)$$

$$y(0) = y_0 \quad (52.2)$$

حيث $f(x) \in L^2(0,1)$, و النواة $k(x,s) \in L^2([0,1] \times [0,1])$
بوضع التقريب للدوال في المعادلة السابقة وفق أساس $OBPs$ تكون لدينا :

$$\begin{aligned} y'(x) &= Y'^T OB(x) \\ y(0) &= Y_0^T OB(x) \\ f(x) &= F^T OB(x) \\ k(x,s) &= OB(x)^T KOB(s), \end{aligned}$$

حيث $K_{i;j} =< OB_{i,m}(x) . < k(x,s) . OB_{j,m}(s) >>$. و بالتكامل و إستعمال مصفوفة العمليات للتكامل P نحصل على :

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x y'(s)\, ds + y(0) \\ &= \int_0^x Y'^T OB(s)\, ds + Y_0^T OB(x) \\ &= \left(Y'^T P + Y_0^T\right) OB(x) \end{aligned}$$

بالتعويض في (51.2) نجد :

$$\begin{aligned} OB(x)^T Y' &= OB(x)^T F + OB(x)^T \left(P^T Y' + Y_0\right) \\ &\quad + \int_0^1 OB(x)^T KOB(s)\, OB(s)^T \left(P^T Y' + Y_0\right) ds \\ &= OB(x)^T F + OB(x)^T \left(P^T Y' + Y_0\right) \\ &\quad + OB(x)^T K \left(P^T Y' + Y_0\right) \end{aligned}$$

و بذلك نستنتج الشعاع Y' بالشكل :

$$Y' = F + \left(P^T Y' + Y_0\right) + K\left(P^T Y' + Y_0\right) \quad (53.2)$$

إذن نتشكل لنا جملة معادلات جبرية بمجاهيل معاملات الشعاع Y' التالية :

$$Y' = \left(I - KP^T - P^T\right)^{-1} (KY_0 + Y_0 + F) \quad (54.2)$$

من خلال حل جملة المعادلات الجبرية الخطية أعلاه يمكننا العثور على معاملات الشعاع Y', و بذلك نتحصل على معاملات Y عن طريق العلاقة :

$$Y^T = Y'^T P + Y_0^T \tag{55.2}$$

و منه يكون الحل التقريبي للمعادلة التكاملية-التفاضلية لفريدهولم هو: $y(x) = Y^T OB(x)$

مثال 4.2.2

لنعتبر المعادلة التكاملية-التفاضلية لفريدهولم الخطية التالية :

$$y\prime(x) = xe^x + e^x - x + \int_0^1 xy(s)\,ds \tag{56.2}$$

$$y(0) = 0 \tag{57.2}$$

الحل الدقيق للمعادلة هو : $y(x) = xe^x$. بتطبيق الطريقة المذكورة أعلاه و من أجل $m = 3$ نجد الحل التقريب للمعادلة (56.2)

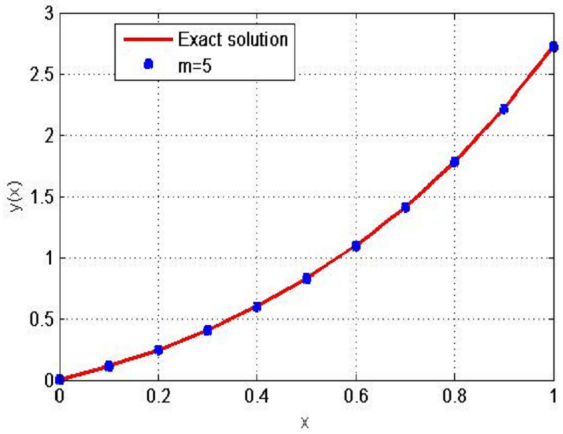
$$y_3(x) = 0.980\,90x^3 + 0.683\,26x^2 + 1.065\,1x - 2.825\,8 \times 10^{-3}$$

و من أجل $m = 5$ نجد الحل التقريب للمعادلة (56.2) كالتالي :

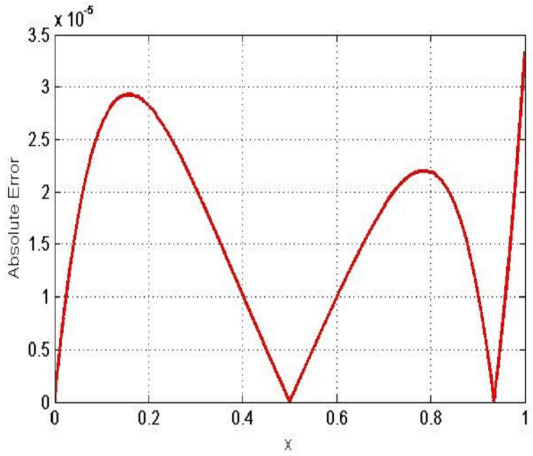
$$\begin{aligned} y_5(x) &= 6.342\,3 \times 10^{-2}x^5 + 0.155\,68x^4 + 0.495\,34x^3 \\ &+ 1.004\,8x^2 + 0.998\,97x + 5.587\,6 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

جدول 2.2: الحل التقريبي والحل الدقيق للمثال (4.2.2)

الحل المظبوط *Exactsolution*	الطريقة من أجل $n = 3,$	$n = 5$	x
0.110 517091807565	0.111 50	0.110 51	0.1
0.244 280551632034	0.245 37	0.244 27	0.2
0.404 957642272801	0.404 68	0.404 97	0.3
0.596 739879056508	0.595 31	0.596 75	0.4
0.824 360635350064	0.823 15	0.824 37	0.5
1.093 271280234305	1.094 1	1.093 3	0.6
1.409 626895229334	1.414 0	1.409 6	0.7
1.780 432742793974	1.788 8	1.780 5	0.8
2.213 642800041255	2.224 3	2.213 7	0.9
2.718281828459046	2.726 4	2.718 3	1.0



شكل 3.2: منحني الحل الدقيق و الحل التقريبي من أجل $m = 5$ للمثال (4.2.2)



شكل 4.2: منحني الخطأ المطلق أجل $m = 5$ للمثال (4.2.2)

3.2 تقنية عددية لحل *IDEs* نوع القطع المكافئ ذات شروط غير محلية

بعد تشكيل مصفوفات العمليات الجديدة لأساس كثيرات حدود برنشتين المتعامد المتجانس سنطبق تلك التقنية العددية على المسألة (58.2)--(60.2) التالية :

$$v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = \int_0^t a(t-\tau)\, v(x,\tau)\, d\tau, \quad 0 < t \leq T \qquad (58.2)$$

$$v(x,0) = \Phi(x), \quad 0 < x < 1 \qquad (59.2)$$

و شروط التكامل :

$$\int_0^1 v(x,t)\, dx = r(t), \quad \int_0^1 xv(x,t)\, dx = q(t), \quad 0 < t \leq T. \qquad (60.2)$$

1.3.2 المسألة المكافئة متجانسة الشروط

لتسهيل التقنية العددية لحل المسالة (58.2)--(60.2) من الأحسن جعل شروط التكامل للمسألة متجانسة لذا نقوم بتبديل المتغير التالي :

$$u(x,t) = v(x,t) - w(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \tag{61.2}$$

حيث

$$w(x,t) = 6\left(2q(t) - r(t)\right)x - 2\left(3q(t) - 2r(t)\right). \tag{62.2}$$

و بذلك تكون لدينا مسألة مكافئة للمسألة (58.2)--(60.2) ذات المجهول u و متجانسة الشروط الغير محلية و تأخذ الشكل :

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \int_0^t a(t-\tau)\,u(x,\tau)\,d\tau, 0 < t \leq T, \tag{63.2}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{64.2}$$

و تصبح شروط التكامل متجانسة كما يلي :

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = 0, \quad \int_0^1 xu(x,t)\,dx = 0, \quad 0 < t \leq T, \tag{65.2}$$

حيث

$$f(x) = \Phi(x) - w(x,0).$$

2.3.2 التقنية العددية لمعالجة المسألة

أولا نبدأ بالتكامل بالنسبة للمتغير x للعبارة التالية :

$$u_{xx}(x,t) = u_t(x,t) - \int_0^t a(t-\tau)\,u(x,\tau)\,d\tau \tag{66.2}$$

نحصل على :

$$u_x(x,t) = u_x(0,t) + \int_0^x u_{xx}(s,t)\,ds \tag{67.2}$$

$$= \int_0^x \left[u_t(s,t) - \int_0^t a(t-\tau)\,u(s,\tau)\,d\tau\right]ds, \tag{68.2}$$

و من جهة أخرى لدينا :

$$u(x,t) = u(0,t) + \int_0^x u_x(s,t)\,ds. \tag{69.2}$$

و بالتعويض فيما سبق تنتج الصيغة التالية لـ $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(0,t)+xu_x(0,t) \qquad (70.2)\\ &+ \int_0^x\int_0^s\left[u_t(s,t)-\int_0^t a(t-\tau)u(x,\tau)d\tau\right]dsds \\ &= u(0,t)+xu_x(0,t)+z(x,t), \qquad (71.2)\end{aligned}$$

و ذلك بوضع :

$$z(x,t)=\int_0^x\int_0^s\left[u_t(s,t)-\int_0^t a(t-\tau)u(x,\tau)d\tau\right]dsds. \qquad (72.2)$$

و بإستعمال شروط التكامل (65.2) و (70.2), نجد :

$$u(0,t)+\frac{1}{2}u_x(0,t)+\int_0^1 z(x,t)dx=0 \qquad (73.2)$$

وأيضا:

$$\frac{1}{2}u(0,t)+\frac{1}{3}u_x(0,t)+\int_0^1 xz(x,t)dx=0. \qquad (74.2)$$

مما يؤدي إلى صياغة عبارة الشرطين الإبتدائين $u(0,t)$ و $u_x(0,t)$ كما يلي :

$$u(0,t)=6\int_0^1 xz(x,t)dx-4\int_0^1 z(x,t)dx \qquad (75.2)$$

و كذلك

$$u_x(0,t)=-12\int_0^1 xz(x,t)dx+6\int_0^1 z(x,t)dx. \qquad (76.2)$$

بتعويض العلاقة (75.2) و (76.2) في (70.2), نحصل على :

$$u(x,t)=(6-12x)\int_0^1 xz(x,t)dx+(-4+6x)\int_0^1 z(x,t)dx+z(x,t) \qquad (77.2)$$

نفاضل $u(x,t)$ بالنسبة للمتغير t :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[(6-12x)\int_0^1 xz(x,t)dx\right.\\ &\left.+(-4+6x)\int_0^1 z(x,t)dx+z(x,t)\right] \qquad (78.2)\end{aligned}$$

ثم نكامل العبارة (78.2) بالنسبة للمتغير t فنحصل :

$$u(x,t)-u(x,0) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left[(6-12x)\int_0^1 xz(x,t)\,dx + (-4+6x)\int_0^1 z(x,t)\,dx + z(x,t)\right]dt \quad (79.2)$$

إذن تم تعين عبارة $u(x,t)$ الحل مع إدخال كل الشروط الإبتدائية و شروط التكامل على النحو التالي :

$$u(x,t) = u(x,0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left[(6-12x)\int_0^1 xz(x,t)\,dx + (-4+6x)\int_0^1 z(x,t)\,dx + z(x,t)\right]dt \quad (80.2)$$

و الان نقوم بتقريب التوابع الواردة في العبارة الأخيرة (80.2) بإستعمال أساس كثير حدود برنشتاين المتعامد المتجانس $OBPs$, إذن من (9.2) :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= OB^T(x)\cdot C\cdot OB(t), \\ f(x) &= OB^T(x)\cdot F\cdot OB(t), \\ 6-12x &= OB^T(x)\cdot e_1, \\ -4+6x &= OB^T(x)\cdot e_2, \\ x &= e_3^T\cdot OB(x), \\ \int_0^1 OB(x)\,OB^T(x)\,dx &= 1, \end{aligned}$$

حيث C و F مصفوفات ذات البعد $(m+1)\times(m+1)$, e_1 ,e_2 ,و e_3 أشعة من البعد $(m+1)\times 1$, C مصفوفة المجاهيل المطلوبة .

و الان نعطي تقريبا للتابع $z(x,t)$ as وفق أساس $OBPs$, لدينا :

$$\begin{aligned} z(x,t) &= \int_0^x\int_0^s\left[u_t(s,t)-\int_0^t a(t-\tau)\,u(x,\tau)\,d\tau\right]dsds \\ &= \int_0^x\int_0^s\left[OB^T(x)\cdot CD\cdot OB(t)-OB^T(x)\right. \\ &\quad \left.\times C\cdot\int_0^t a(t-\tau)\,OB(\tau)\,d\tau\right]dsds \end{aligned}$$

إذن يأخذ $z(x,t)$ الشكل :

$$\begin{aligned} z(x,t) &= OB^T(x)\cdot\left(P^2\right)^T CD\cdot OB(t) \\ &\quad -OB^T(x)\left(P^2\right)^T\cdot C\cdot\begin{bmatrix}\int_0^t a(t-s)\,OB_{0,m}(s)\,ds\\ \int_0^t a(t-s)\,OB_{1,m}(s)\,ds\\ \vdots\\ \int_0^t a(t-s)\,OB_{m,m}(s)\,ds\end{bmatrix}, \end{aligned}$$

لنسمى $M=[m_j]_{(m+1)\times(m+1)}$ مصفوفة من البعد $(m+1)\times(m+1)$ التي أعمدتها شعاع معاملات تحليل العبارة $\int_0^t a(t-s)\,OB_{j,m}(s)\,ds$ وفق أساس $OBPs$ أي:

$$\int_0^t a(t-s)\,OB_{j,m}(s)\,ds = m_j^T OB(t)$$

حيث :

$$m_j=\int_0^1\left(\int_0^t a(t-s)\,OB_{j,m}(s)\,ds\right)OB(t)\,dt,\quad j=0,1,\ldots,m.$$

و بذلك يكون :

$$\begin{aligned} z(x,t) &= OB^T(x)\cdot\left(P^2\right)^T CD\cdot OB(t)-OB^T(x)\cdot\left(P^2\right)^T CM\cdot OB(t)\\ &= OB^T(x)\left(P^2\right)^T C(D-M)OB(t). \end{aligned} \tag{81.2}$$

بإدخال مصفوفات العمليات للتكامل P و للتفاضل D في العبارة التالية :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left[(6-12x)\int_0^1 xz(x,t)\,dx\right.\\ &\quad \left.+(-4+6x)\int_0^1 z(x,t)\,dx+z(x,t)\right]dt \end{aligned}$$

نتحصل على :

$$\begin{aligned} OB^T(x)\cdot C\cdot OB(t) &= OB^T(x)\cdot F\cdot OB(t)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left[OB^T(x)\,e_1\times\right.\\ &\quad \int_0^1 e_3^T OB(x)\,OB^T(x)\left(P^2\right)^T C(D-M)OB(t)\,dx\\ &\quad +OB^T(x)\,e_2\int_0^1 OB^T(x)\left(P^2\right)^T C(D-M)OB(t)\,dx\\ &\quad \left.+OB^T(x)\left(P^2\right)^T C(D-M)OB(t)\right]dt \end{aligned}$$

و بذلك يكون :

$$\begin{aligned}
OB^T(x)\cdot C\cdot OB(t) &= OB^T(x)\cdot F\cdot OB(t)\\
&\quad+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left[OB^T(x)\,e_1e_3^T\times\right.\\
&\quad\left(\int_0^1 OB(x)\,OB^T(x)\,dx\right)\left(P^2\right)^T C(D-M)\,OB(t)\\
&\quad+OB^T(x)\,e_2\left(\int_0^1 OB^T(x)\,dx\right)\left(P^2\right)^T C(D-M)\,OB(t)\\
&\quad\left.+\,OB^T(x)\left(P^2\right)^T C(D-M)\,OB(t)\right]dt\\
&= OB^T(x)\cdot F\cdot OB(t)\\
&\quad+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left[OB^T(x)\,e_1e_3^T\left(P^2\right)^T C(D-M)\,OB(t)\right.\\
&\quad+OB^T(x)\,e_2OB^T(1)\left(P^3\right)^T C(D-M)\,OB(t)\\
&\quad\left.+\,OB^T(x)\left(P^2\right)^T C(D-M)\,OB(t)\right]dt\\
&= OB^T(x)\cdot F\cdot OB(t)\\
&\quad+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left[OB^T(x)\,(e_1e_3^T\left(P^2\right)^T C(D-M)\right.\\
&\quad+e_2OB^T(1)\left(P^3\right)^T C(D-M)\\
&\quad\left.+\left(P^2\right)^T C(D-M))OB(t)\right]dt
\end{aligned}$$

مرة أخرى ندخل مصفوفات العمليات لـ *OBPs* فنحصل على :

$$\begin{aligned}
OB^T(x)\cdot C\cdot OB(t) &= OB^T(x)\cdot F\cdot OB(t)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left[OB^T(x)\cdot Y\cdot OB(t)\right]dt\\
&= OB^T(x)\cdot F\cdot OB(t)+OB^T(x)\,Y\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}OB(t)\,dt\\
&= OB^T(x)\cdot F\cdot OB(t)+OB^T(x)\cdot DPY\cdot OB(t)\\
&= OB^T(x)\left[F+DPY\right]OB(t) \qquad (82.2)
\end{aligned}$$

حيث

$$Y=e_1e_3^T\left(P^2\right)^T C(D-M)+e_2OB^T(1)\left(P^3\right)^T C(D-M)+\left(P^2\right)^T C(D-M)$$

وأخيرا و هذا المراد يتم الحصول على جملة معادلات جبرية بالمجاهيل عناصر المصفوفة C معاملات تحليل المجهول $u(x,t)$ و نأخذ هذه الجملة الشكل :

$$C=F+DPY \qquad (83.2)$$

3.3.2 تطبيق عددي

مثال 1.3.2

لنعتبر المعادلة التكاملية -التفاضلية من نوع القطع المكافئ :

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \int_0^t \exp(t-\tau)\, u(x,\tau)\, d\tau, \quad 0 < t \leq T \tag{84.2}$$

$$u(x,0) = \sin(x), \quad 0 < x < 1 \tag{85.2}$$

$$\int_0^1 u(x,t)\, dx = 0, \quad 0 < t \leq T \tag{86.2}$$

$$\int_0^1 xu(x,t) = 0, \quad 0 < t \leq T$$

الحل الدقيق للمسألة هو:

$$u(x,t) = \exp(-t).\cos(t).\sin(x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T$$

بتطبيق التقنية العددية من أجل $m = 3$, نحصل على :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 2.3812 \\ -0.67082 \\ -1.9053 \\ -1.5 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} -1.852 \\ -0.22361 \\ 0.51962 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0.13229 \\ 0.33541 \\ 0.37528 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

مصفوفة العمليات للتكامل P :

$$P = \begin{bmatrix} 0.21875 & 0.39617 & 0.27959 & 0.16772 \\ -2.6411 \times 10^{-2} & 0.15625 & 0.28241 & 0.12578 \\ 6.8193 \times 10^{-3} & -4.0344 \times 10^{-2} & 0.09375 & 0.14073 \\ -2.3623 \times 10^{-3} & 1.3975 \times 10^{-2} & -3.2476 \times 10^{-2} & 0.03125 \end{bmatrix}$$

مصفوفة العمليات للتكامل D :

$$D = \begin{bmatrix} -3.5 & -0.59161 & 0 & 0 \\ 6.5077 & -2.5 & -1.5492 & 0 \\ -4.5826 & 5.4222 & -1.5 & -4.3301 \\ 2.6458 & -2.2361 & 6.0622 & 7.5 \end{bmatrix}$$

و المصفوفات F و M :

$$F = \begin{bmatrix} 8.5445 \times 10^{-2} & 7.2214 \times 10^{-2} & 5.5937 \times 10^{-2} & 3.2295 \times 10^{-2} \\ 0.20979 & 0.17731 & 0.13734 & 7.9294 \times 10^{-2} \\ 0.22053 & 0.18638 & 0.14437 & 8.3353 \times 10^{-2} \\ 0.13909 & 0.11756 & 9.1058 \times 10^{-2} & 5.2573 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.26433 & 0.57333 & 0.55523 & 0.37407 \\ -3.6565 \times 10^{-2} & 0.15451 & 0.34229 & 0.19266 \\ 1.0311 \times 10^{-2} & -4.3573 \times 10^{-2} & 8.5504 \times 10^{-2} & 0.15559 \\ -3.7303 \times 10^{-3} & 1.5763 \times 10^{-2} & -3.0933 \times 10^{-2} & 2.7258 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

و بعد حل جملة المعادلات الجبرية نجد المصفوفة C :

$$C = \begin{bmatrix} 8.4506 \times 10^{-2} & 6.9541 \times 10^{-2} & 5.2441 \times 10^{-2} & 2.9737 \times 10^{-2} \\ 0.2117 & 0.18275 & 0.14446 & 8.4504 \times 10^{-2} \\ 0.22034 & 0.18583 & 0.14364 & 8.2820 \times 10^{-2} \\ 0.13732 & 0.11251 & 8.4455 \times 10^{-2} & 4.7742 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

الجدول 6.3 يظهر الأخطاء المطلقة بين الحلول التقريبية التي تم الحصول عليها من اجل $m = 3$ و $m = 5$ بإستعمال مصفوفة العمليات لكثير حدود برنشتاين المتعامد المتجانس و قيم الحل الدقيق .

جدول 3.2: الخطأ المطلق في تقريب $v(x,t)$ في المثال (1.3.2)

$v(x,t)$	من أجل $m = 3$	من أجل $m = 5$
$(0.1, 0.1)$	7.9930×10^{-3}	2.2160×10^{-8}
$(0.2, 0.2)$	3.8124×10^{-2}	3.1023×10^{-7}
$(0.3, 0.3)$	8.8430×10^{-2}	4.3415×10^{-7}
$(0.4, 0.4)$	1.5591×10^{-2}	4.7789×10^{-7}
$(0.5, 0.5)$	2.3634×10^{-2}	5.3743×10^{-7}
$(0.6, 0.6)$	3.2429×10^{-2}	4.6544×10^{-6}
$(0.7, 0.7)$	4.1306×10^{-2}	5.6646×10^{-6}
$(0.8, 0.8)$	4.9465×10^{-2}	3.6602×10^{-6}
$(0.9, 0.9)$	5.5956×10^{-2}	3.0332×10^{-6}
$(1.0, 1.0)$	5.9662×10^{-2}	5.2351×10^{-6}

4.2 الإستنتاج

في هذه الفصل و في مستهله وبتطبيق غرام شميت على كثير حدود برنشتاين *BPs* تم لنا الحصول على برنشتاين المتعامد و المتجانس *OBPs*. و إستطعنا بناء مصفوفات العمليات الجديدة وفق أساس *OBPs* و استنتجنا كلا من مصفوفة العمليات للتكامل P،و التفاضل D و ناتج الجداء $\hat{C}$. حيث تم إعطاء إجراء عام لتشكيل هذه المصفوفات. تلك المصفوفات يمكن إستخدامها لحل المسائل الرياضياتية مثل المسائل الناشئة في حساب التفاضل والتكامل، المعادلة التكاملية-التفاضلية، المعادلات التفاضلية والمعادلات التكاملية، و معادلات أخرى. حيث كان دورها التخلص من العبارات المعقدة في المسائل من تكامل و تفاضل و جداءات . و تبين لنا أن هذه الطريقة سهلة التنفيذ، وتنتج نتائج دقيقة جدا. وعلاوة على ذلك هناك حاجة إلى عدد قليل من القواعد للحصول على نتيجة عددية مرضية. تم تضمين هذه التقنية أمثلة تبين كيف تم تحويل المشكلة إلى جمل من المعادلات الجبرية التي من السهل حلها. النتائج التي تم الحصول عليها هي دقيقة جدا . وفي القسم الثاني تم عرض تقنية عددية لإعطاء الحل التقريبي للمعادلة تكاملية-تفاضلية من نوع القطع المكافئ ذات شروط غير محلية حيث تعاملنا مع شروط حدية غير عادية . وتستند هذه الطريقة على التقريب بكثيرات حدود برنشتاين المتعامد المتجالنس *OBPs* للحصول على الحل التقريبي. و بإستخدام مصفوفة العمليات للتكامل والمشتق، أمكن تخفيض المسألة إلى جملة من المعادلات الجبرية أعطت لنا القدرة على حلها و برمجتها . عدديا تم تضمين مثال لإثبات صحة وإمكانية تطبيق هذه الطريقة، والنتائج من التطبيق العددي بالنظر إلى 6.3 أن الحلول التي تم الحصول عليها من قبل الطريقة الحالية متطابقة تقريبا مع الحلول الدقيقة. ومن الواضح أن زيادة قيمة m تؤدي إلى نتائج دقيقة للغاية. مما كشف لنا أنها طريقة فعالة جدا واضحة، بسيطة، ويمكن تطبيقها على أنواع مختلفة من المسائل ذات الشروط الغير محلية.

الفصل الثالث

الحل العددي لـ VIDEs الناتجة من مسألة Emden-Fowler بطريقتي BPs و UW

قائمة المحتويـــــــات

1.3 مقدمة 44
2.3 طريقة BPs لحل VIDEs لمعادلة Emden-Fowler الشاذة 45
1.2.3 المشكلة VIDEs من معادلة Emden-Fowler 45
2.2.3 خوارزمية الحل باستعمال BPs 46
3.2.3 تطبيق عددي 48
3.3 طريقة UW لحل VIDEs لمعادلة Lane-Emden الشاذة 52
1.3.3 المشكلة VIDEs من معادلة Lane-Emden 52
2.3.3 خصائص UW و تقريب تابع 53
3.3.3 خوارزمية الحل باستعمال UW 54
4.3.3 تطبيق عددي 55
4.3 الاستنتاج 57

1.3 مقدمة

في الفيزياء الرياضية يوجد توصيفات كثيرة من النماذج المعبر عنهم على شكل معادلات تفاضلية غير الخطية عادية و شاذة و التي تكمن الصعوبة فيها في عدم وجود طرق لإيجاد حل تحليلي دقيق . [70, 71]. من بين هذه المعادلات التي تصف هذا النوع و التي سنتطرق إليها في القسم الأول من هذا الفصل معادلة *Emden-Fowler* ذات القيم الإبتدائية الشاذة المعرفة كما يلي :

$$y''(x)+\frac{k}{x}y'(x)+\alpha h\left(x\right)g(y(x))=0.\quad k>1,\quad \alpha>0 \tag{1.3}$$

و الشروط الإبتدائية :

$$y\left(0\right)=a,\quad y'\left(0\right)=0. \tag{2.3}$$

حيث h و g دوال معلومة و $y(x)$ المجهول . كما سبق لنا الإشارة في المقدمة العامة فإن لهذه المعادلة تطبيقات في الفيزياء الفلكية . عولجت معادلات *Emden-Fowler* بعدة طرق (أنظر [72, 70, 71, 74]) و قد أعطى *Wazwaz* دراسة عامة لها (أنظر [77, 78, 80]). و ذلك بإستعمال طريقة أدومان التحليلية *ADM* و طريقة السلاسل . و قدم *Yousefi* دراسة للمسألة عن طريق دوال مويجات ليجندر *LWM* [79]. و على حد علمنا لم تعالج معادلات *Emden-Fowler* بإستخدام كثير حدود برنشتاين *BPs* و هذا ما جعلنا تقدم على ذلك (أنظر [2])

من جهة أخرى يوجد نوع اخر من تلك المعادلات التفاضلية الشاذة الغير خطية و تمثل حالة خاصة من *Emden-Fowler* تسمى معادلة *Lane-Emden* و للإطلاع أكثر على تطبيقاتها الفيزيائية يمكن الرجوع إلى [81, 82, 83, 84, 85, 86, 87].

تناولنا في الجزء الثاني من هذا الفصل دراسة الشكل الموالي من مسألة *Lane-Emden* : (أنظر [92])

$$y''\left(x\right)+\frac{k}{x}y\left(x\right)+p\left(x\right)y\left(x\right)=g\left(x\right),\quad 0<x\leq 1,\quad k\geq 0$$

مع الشروط الإبتدائية التالية :

$$y\left(0\right)=A,\quad y'\left(0\right)=B$$

في الآونة الأخيرة تم تطوير العديد من التقنيات العددية لتقريب حل معادلة *Lane-Emden* نذكر منها على سبيل المثال طريقة مويجات لوجندر *LWM* [91] , كثير حدود تشيبيشاف [89] طريقة التكرار التغايري [90] و طريقة الهوموتوبي الإضطرابية [88] و طريقة أدومان التحليلية [80, 87] . في هذه الفقرة نعرض معالجة عددية لمسالة *Lane-Emden* عن طريق مويجات تشيبيشاف *UW* (دراسة و عرض تحليلي للمقالة [92]) . و ذلك بمعالجة معادلة تكاملية-تفاضلية لفولترا *VIEDs* المشكلة منها حيث نجد أنفسنا أمام جمل معادلات جبرية تحل بطرق معروفة . كل تلك التقنيات تهدف الى التغلب على مشكل الشذوذ في المسألة عند القيمة $x=0$ و الحصول على حلول أكثر دقة .

2.3 طريقة BPs لحل VIDEs لمعادلة Emden-Fowler الشاذة

في هذه الفقرة نقوم بتشكيل معادلة فولترا تكاملية-تفاضلية VIDEs المكافئة لمعادلة Emden-fowler ذات القيم الإبتدائية الشاذة التالية :

$$y''(x)+\frac{k}{x}y(x)+\alpha f(x)\,g(y(x))=0,,\quad k\geq 0,,\quad \alpha\geq 0. \tag{3.3}$$

مع الشروط الابتدائية :

$$y(0)=a,\quad y'(0)=0,,\quad 0<x\leq 1 \tag{4.3}$$

و بالتالي يصبح امامنا معالجة معادلة تكاملية-تفاضلية بدلا من معادلة تفاضلية .

1.2.3 المشكلة VIDEs من معادلة Emden-Fowler

أولا بتكامل (3.3) و استعمال الشروط الإبتدائية نحصل على الشكل التكاملي التالي :

$$y(x)=a-\frac{\alpha}{k-1}\int_0^x t\left(1-\frac{t^{k-1}}{x^{k-1}}\right)h(t)\,g(y(t))\,dt \tag{5.3}$$

بتفاضل (5.3) مرتين, و باستعمال قاعدة لبنيتز رول , تنتج لنا المعادلة التكاملية-التفاضلية لفولترا VIDEs المشكلة من معادلة Emden-fowler بالصيغة :

$$y'(x)=-\alpha\int_0^x\left(\frac{t^k}{x^k}\right)h(t)\,g(y(t))\,dt \tag{6.3}$$

و كذلك :

$$y''(x)=\alpha h(x)\,g(y(x))-\alpha\int_0^x k\left(\frac{t^k}{x^{k+1}}\right)f(t)\,g(y(t))\,dt \tag{7.3}$$

من جهة أخرى , من أجل $k=1$ التكامل يعطى بالشكل :

$$y(x)=a-\alpha\int_0^x t\ln\left(\frac{t}{x}\right)h(t)\,g(y(t))\,dt \tag{8.3}$$

و بذلك نحصل على شكل المعادلات التكاملية الناتجة من معادلة Emden-fowler كما يلي :

$$y(x)=\begin{cases}a-\alpha\int_0^x t\ln\left(\frac{t}{x}\right)h(t)\,g(y(t))\,dt\ for\ \ k=1\\ a-\frac{\alpha}{k-1}\int_0^x t\left(1-\frac{t^{k-1}}{x^{k-1}}\right)hf(t)\,g(y(t))\,dt\ for\ \ k>1\end{cases} \tag{9.3}$$

2.2.3 خوارزمية الحل باستعمال *BPs*

لنعتبر معادلة فولترا التكاملية-التفاضلية *VIDEs* المعرفة في (9.3) و الناتجة من معادلة *Emden-Fowler* المعرفة في (3.3) . لنطبق طريقة *BPs*,
نقوم بتقريب التابع المجهول $y(x)$ بإستعمال أساس كثير حدود برنشتاين *BPs* كما يلي

$$y(x) = \sum_{s=1}^{n} c_i B_{i,n}(x) \tag{10.3}$$
$$= C^T \mathbf{B}(x) \tag{11.3}$$
$$= C^T \times A_n \times T_n(x) \tag{12.3}$$

حيث $C^T = [c_0, c_1 ..., c_n]$ والذي يحسب بالعلاقة التالية :

$$C = Q^{-1}(y(x), \mathbf{B}(x)) \tag{13.3}$$

و كما سبق الذكر في الفصل الأول فإن, Q مصفوفة ذات البعد $(n+1) \times (n+1)$ عناصرها $Q_{i+1,j+1}$ حيث :

$$Q_{i+1,j+1} = \int_0^1 B_{i,n}(x) B_{j,n}(x) dx$$
$$= \binom{n}{i}\binom{n}{j} \int_0^1 (1-x)^{2n-i-j} x^{i+j} dx$$
$$= \frac{\binom{n}{i}\binom{n}{j}}{(2n+1)\binom{2n}{i+j}}$$

مع $i, j = 0, 1, ..., n.$,
و بالنسبة لتقريب التابع المركب : $g(y(x))$: وفق أساس *BPs* فيكون :

$$g(y(x)) \simeq g\left(C^T \mathbf{B}(x)\right) \tag{14.3}$$
$$= G^T \mathbf{B}(x) \tag{15.3}$$

حيث شعاع المعاملات . $G^T = [d_0, d_1, ..., d_n]$ و يحسب بالصيغة :

$$G = Q^{-1} \int_0^1 g\left(C^T \mathbf{B}(x)\right) \mathbf{B}^T(x) dx \tag{16.3}$$

بتكامل (6.3) و بإستعمال الشروط الإبتدائية $y(0)=1$, نجد:

$$y(x)=a-\alpha\int_0^x\left[\int_0^z\left(\frac{t^k}{z^k}\right)h(t)\,g(y(t))\,dt\right]dz\quad k\geq 1 \tag{17.3}$$

و بإستخدام كلا من (10.3) و (17.3) نحصل على :

$$C^TA_nT_n(x) = a-\alpha\int_0^x\left[\int_0^z\left(\frac{t^k}{z^k}\right)h(t)\,g\left(C^T\mathbf{B}(t)\right)dt\right]dz\quad k\geq 1 \tag{18.3}$$

$$= a-\alpha G^TA_n\int_0^x\int_0^z\left(\frac{t^k}{z^k}\right)h(t)\,T_n(t)\,dt \tag{19.3}$$

$$= a-\alpha G^TA_n\int_0^x H(z)\,dz \tag{20.3}$$

حيث: $H(z)=\int_0^z\left(\frac{t^k}{z^k}\right)h(t)\,T_n(t)\,dt.$

بإختيار نقاط التجميع التالية $x_i=\frac{i}{2n-1},\quad i=1,2,....n$ يكون لدينا:

$$C^TA_nT_n(x_i)=1-\alpha G^TA_n\int_0^{x_i}H(z)\,dz \tag{21.3}$$

و وفقا لشروط إستخدام طريقة غوص للتكامل علينا تبديل حدود التكامل من المجال $[0,x_i]$ الى المجال $[-1,1]$ عن طريق تبديل المتغير التالي : $\tau=\frac{2}{x_i}z-1.$ و منه المعادلة (21.3) تأخذ الشكل الموالي :

$$C^TA_nT_n(x_i)=a-\frac{\alpha x_i}{2}G^TA_n\int_{-1}^{1}H\left(\frac{x_i}{2}(\tau+1)\right)d\tau \tag{22.3}$$

و بتطبيق شكل غوص للتكامل نحصل على :

$$C^TA_nT_n(x_i)=a-\frac{\alpha x_i}{2}G^TA_n\sum_{j=1}^{s}\omega_jH\left(\frac{x_i}{2}(\tau_j+1)\right) \tag{23.3}$$

جيث τ_j هي أصفار كثير حدود لوجندر P_{s+1} و ω_j هي الأوزان المقابلة. من المعلوم أن طريقة غوص للتكامل دقيقة على كثيرات الحدود من درجة أقل أو تساوي $2s+1$. المعادلة (23.3) تشكل لنا جملة من $n+1$ معادلات جبرية بمجاهيل تمثل معاهلات شعاع برنشتاين C. و بطريقة نيوتن كوتس المعروفة في حل الجمل الجبرية الغير خطية يمكن إيجاد C, بعد ذلك يمكن الحصول على الحل التقريبي للمسألة من الشكل $y(x)=C^TB(x).$

3.2.3 تطبيق عددي

مثال 1.2.3

لنعتبر معادلة *Emden-Fowler* في حالة $f(x)=x^p$, $g(y)=y^n$ و $k=2$,[78]

$$y''(x)+\frac{k}{x}y\prime(x)+x^p y^m(x)=0 \tag{24.3}$$
$$y(0)=1.,\ y'(0)=0, 0<x\leq 1 \tag{25.3}$$

هذه المعادلة تكافئ المعادلة التكاملية-التفاضلية لفولترا *VIDEs* التالية :

$$y'(x)=-\int_0^x\left(\frac{t^k}{x^k}\right)t^p y^m(t)\,dt \quad y(0)=1 \tag{26.3}$$

الحالة1. من أجل $p=m=0$ و $k=2$ المعادلة (24.3) حلها الدقيق هو : $y(x)=1-\frac{1}{3!}x^2$
بتطبيق الطريقة و بأخذ $n=2$ نحصل على :

$$y(x) = C^T\mathbf{B}(x)=C^T A_2 T_2(x)=[c_1,c_2,c_3]\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\x^2\end{bmatrix}$$

وبإختيار نقاط التجميع يكون :

$$C^T A_2 T_2(x_I)=1-\frac{x_i}{2}G^T A_2\sum_{j=1}^{s}\omega_j H\left(\frac{x_i}{2}(\tau_j+1)\right),$$

المعادلة تكافئ :

$$[c_0,c_1,c_2]\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\x^2\end{bmatrix}=$$
$$1-\frac{x_i}{2}[1,1,1]\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\sum_{j=1}^{s}\omega_j H\left(\frac{x_i}{2}(\tau_j+1)\right).$$

من المعلوم أنه من أجل $j=2$ لدينا $\omega_j=1$ و $\tau_j=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ ومنه :

$$(31)\Leftrightarrow c_0\left(1-2x_i+x_i^2\right)+c_1\left(2x_i-2x_i^2\right)+c_2x_i^2=1-\frac{1}{6}x_i^2.$$

في النهاية نتحصل على جملة معادلات جبرية حلها : $c_0 = 1. c_1 = 1, c_2 = \frac{5}{6}$, بالتالي نستنتج حل المعادلة :

$$y(x) = C^T \mathbf{B}(x) = \left(1, 1, \frac{5}{6}\right) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} = 1 - \frac{1}{3!}x^2$$

و هو بالضبط الحل الدقيق للمعادلة .

الحالة2. من أجل $p = 0, m = 1$ و $k = 2$, المعادلة (24.3) تكافئ *VIDEs* التالية :

$$y'(x) = -\int_0^x \left(\frac{t^2}{x^2}\right) y(t)\, dt \quad y(0) = 1 \qquad (27.3)$$

الحل الدقيق و نشره وفق سلسلة تايلر هو :

$$y(t) = \frac{sinx}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + ...$$

بتطبيق الخوارزمية من أجل $n = 4$, نحصل على جملة المعادلات الخطية التالية و يكون حلها:

$$C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.97222 \\ 0.91669 \\ 0.84154 \end{bmatrix}$$

و بالتالي نحصل على الحل التقريبي:

$$y_4(t) = 1 + 2.8018 \times 10^{-6}x - 0.16671x^2 + 1.7196 \times 10^{-4}x^3 + 0721 \times 10^{-3}x^4$$

مرة ثانية , بتطبيق هذه الطريقة من أجل $n = 5$ نحصل على :

$$C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.98889 \\ 0.96667 \\ 0.93389 \\ 0.89167 \\ 0.84147 \end{bmatrix}$$

في هذه الحالة الحل التقريبي :

$$\begin{aligned} y_6(t) &= 1 - 2.1171 \times 10^{-9}x - 0.16667x^2 - 5.4837 \times 10^{-7}x^3 \\ &\quad +8.3359 \times 10^{-3}x^4 - 6.0401 \times 10^{-6}x^5 - 1.9239 \times 10^{-4}x^6 \end{aligned}$$

يمكن ملاحظة أنه كلما زدنا في قيمة التكرارات n زادت دقة الحل التقريبي.

جدول 1.3: الحل الدقيق و قيم الحل التقريبي و الخطأ المطلق للمثال (1.2.3)

x	عرض نتيجة الطريقة من أجل $n=3$	$n=5$	الحل الدقيق	الخطأ المطلق من اجل n=4	الخطأ المطلق من أجل n=4
0.0	1.00000	1.00000	1.00000	0 .	0
0.1	0.99833	0.99833	0.99833	3.6836×10^{-8}	2.9575×10^{-12}
0.2	0.99335	0.99335	0.99334	2.6704×10^{-8}	2.3597×10^{-12}
0.3	0.98507	0.98507	0.98506	7.8329×10^{-9}	2.9622×10^{-12}
0.4	0.97355	0.97355	0.97354	2.0436×10^{-8}	6.1969×10^{-12}
0.5	0.95885	0.94107	0.95885	7.3683×10^{-8}	2.7311×10^{-11}
0.6	0.94107	0.94107	0.94107	1.6722×10^{-7}	5.3400×10^{-10}
0.7	0.92031	0.92031	0.92031	2.3365×10^{-6}	8.5175×10^{-9}
0.8	0.89671	0.89670	0.89669	9.9332×10^{-6}	5.2005×10^{-8}
0.9	0.87039	0.87036	0.87036	2.9239×10^{-5}	2.1082×10^{-7}
1.0	0.84154	0.84147	0.84147	7.0313×10^{-5}	6.6921×10^{-7}

مثال 2.2.3

في هذا المثال نأخذ معادلة *Emden--Fowler* في حالة

$$\alpha = -2, h(x) = 2x^2 + 3, g(y(x)) = y(x)$$

أي لنعتبر معادلة *Emden-Fowler* المعرفة في [72, 75, 76] بالشكل :

$$y''(x) + \frac{2}{x}y\prime(x) - 2\left(2x^2+3\right)y(x) = 0 \quad 0 < x \leq 1 \tag{28.3}$$

$$y(0) = 1. \quad y'(0) = 0. \tag{29.3}$$

المعادلة التكاملية-التفاضلية لفولترا الناتجة منها معرفة كما يلي :

$$y'(x) = 2\int_0^x \left(\frac{t^2}{x^2}\right)\left(2t^2+3\right)y(t)\,dt \quad y(0) = 1 \tag{30.3}$$

الحل الدقيق لهذه المسألة هو : $y(x)=e^{x^2}$.
بعد إجراء طريقة *BPs* نصل الى الحل التقريبي من أجل $n=4$ من الشكل :

$$y_4(t) = 0.753\,64x^4 - 0.171\,29x^3 + 1.039\,4x^2 - 2.869\,5\times 10^{-3}x + 1$$

من أجل $n=6$ الحل التقريبي :

$$y_6(t) = 0.272\,40t^6 - 0.109\,01t^5 + 0.547\,31t^4 - 1.017\,9\times 10^{-2}t^3 + 1.001t^2 - 3.983\,7\times 10^{-5}t + 1.$$

للمقارنة مع الحل الدقيق, $y(x)=e^{x^2}$ علينا نشره وفق سلسلة تاير كما يلي :

$$y(x)=e^{x^2}=1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{4!}x^8+\frac{1}{5!}x^{10}....$$

جدول 2.3: قيم الحل التقريبي و الحل الدقيق و الخطأ المطلق للمثال (2.2.3)

error Absolute $n=6$	*error Absolute* $n=4$	*Exact solution*	*with method Present* $n=4$,	$n=6$,	x
0	0 .	1.0000	1.0000	1.0000	0.0
$5.283\,0\times 10^{-8}$	$3.903\,3\times 10^{-5}$	1.010 1	1.0100	1.010 1	0.1
$4.929\,7\times 10^{-8}$	$2.688\,3\times 10^{-5}$	1.040 8	1.040 8	1.040 8	0.2
5.463×10^{-8}	$9.331\,5\times 10^{-6}$	1.094 2	1.094 2	1.094 2	0.3
$1.288\,7\times 10^{-7}$	$2.372\,2\times 10^{-5}$	1.173 5	1.173 5	1.173 5	0.4
$5.600\,6\times 10^{-7}$	$8.170\,8\times 10^{-5}$	1.2840	1.284 1	1.2840	0.5
$1.134\,8\times 10^{-5}$	$1.929\,1\times 10^{-4}$	1.433 3	1.433 1	1.433 3	0.6
$1.874\,5\times 10^{-4}$	$2.820\,6\times 10^{-3}$	1.632 3	1.629 5	1.632 3	0.7
$1.189\,4\times 10^{-3}$	$1.256\,7\times 10^{-2}$	1.896 5	1.883 9	1.896 5	0.8
$5.032\,9\times 10^{-3}$	$3.897\,9\times 10^{-2}$	2.247 9	2.208 9	2.247 9	0.9
$1.675\,7\times 10^{-2}$	$9.939\,5\times 10^{-2}$	2.718 3	2.618 9	2.718 3	1.0

ملاحظة 1.2.3

عبارة الخطأ المطلق *Absolute error* يحسب كما يلي :

$$|e_i| = \left| y(x_i) - \sum_{s=1}^{n} c_i B_{i,n}(x_i) \right|, i=0,1,...,s \qquad (31.3)$$

من خلال نتائج الجداول (1.3) و (2.3) أعلاه نلاحظ أنه كلما زادت قيمة التكرار n زاد دقة الحل التقريبي نحو الحل الدقيق و قلت قيمة الخطأ المطلق بشكل كبير .

3.3 طريقة UW لحل VIDEs لمعادلة Lane-Emden الشاذة

في هذه الفقرة نتطرق الي طريقة للحصول على الحل التقريبي لمسالة Lane-Emden (أنظر [92]) و ذلك بالإعتماد على مويجات تشيبيشاف من النوع الثاني UW و بشكل مختلف مع مسألة Emden-Fowler سنعرض طريقة (P. K. Sahu and S. Saha Ray [92]) لإيجاد VIDEs مكافئة لمسألة Lane-Emden :

$$y''(x)+\frac{k}{x}y(x)+p(x)\,y(x)=g(x),\quad 0<x\leq 1,\quad k\geq 0 \tag{32.3}$$

تحت الشروط الإبتدائية التالية :

$$y(0)=A,\quad y'(0)=B \tag{33.3}$$

1.3.3 VIDEs المشكلة من معادلة Lane-Emden

أولا لنضع : $y''(x)=u(x)$ و بالتكامل مرتين من 0 الى x نحصل على : [92]

$$y(x)=A+Bx+\int_0^x (x-t)\,u(t)\,dt \tag{34.3}$$

بتعويض المعادلة (34.3) في المعادلة (32.3) نجد :

$$u(x)=f(x)-\int_0^x k(x,t)\,u(t)\,dt \tag{35.3}$$

حيث :

$$f(x)=g(x)-B\left(\frac{k}{x}\right)-Ap(x)-Bxp(x) \tag{36.3}$$

و ايضا :

$$k(x,t)=\frac{k}{x}+p(x)(x-t) \tag{37.3}$$

بإشتقاق المعادلة (35.3) بالنسبة للمتغير x و تطبيق قاعدة ليبنيتز رول نتحصل على [92] :

$$u\prime(x)+\frac{k}{x}u(x)=F(x)-\int_0^x K(x,t)\,u(t)\,dt, u(0)=u_0 \tag{38.3}$$

حيث : $F(x)=f'(x),\quad K(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}k(x,t)$

المعادلة (38.3) تمثل معادلة فولترا التكاملية-التاقضلية VIDEs الناتجة من مسألة Lane--Emden المعرفة في (32.3) و المراد الحصول عليها.

2.3.3 خصائص *UW* و تقريب تابع

بهدف إستعمال التقريب بمويجات تشيبيشاف من النوع الثاني *UW* سنعرض لمحة موجة حول تعريف و بعض خواص *UW* و كذلك صيغة نقريب التوابع وفق أساس *UW*

تعريف 1.3.3 تعرف مويجات تشيبيشاف من النوع الثاني *UW* على المجال $[0,1)$ بالشكل : [92]

$$\psi_{n,m}=\begin{cases}2^{\frac{k}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}U_m\left(2^kt-2n+1\right), & \frac{n-1}{2^{k-1}}\leq x<\frac{n}{2^{k-1}}\\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{39.3}$$

حيث : $m=0,1,...,M-1$ و $n=1,2,...,2^{k-1}.$, $a=2^{-k}$ يدل على المقاس *scale* و $b=(2n-1)2^{-k}$ وسيط يدل على الإنسحاب على محور الزمن و $U_m(t)$ كثير حدود تشيبيشاف من النوع الثاني *UPs* المعرف على المجال $[-1,1]$ و المتعامد وفق تابع الوزن $w(x)=\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}$ و علاقاته التراجعية تعرف بالصيغة: $U_{m+1}(t)=2tU_m(t)-U_{m-1}(t)$ حيث : $U_0(t)=1,\quad U_1(t)=2t$
لاحظ أنه في التعامل مع مويجات تشيبيشيف ، تابع الوزن يصبح: $w_n(x)=w(2^kt-2n+1)$

إن نشر التابع $u(x)\in L^2_{w_n(x)}[0,1]$ بواسطة مويجات تشيبيشاف *UW* يعطى بالشكل:

$$u(x)=\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\sum_{m=0}^{M-1}c_{n,m}\psi_{n,m}(x)=C^T\Psi(x) \tag{40.3}$$

حيث : $c_{n,m}=\langle u(x),\psi_{n,m}(x)\rangle_{w_n}=\int_0^1 w_n(x)\,u(x)\,\psi_{n,m}(x)\,dx$
و كلا من C و $\Psi(x)$ مصفوفات أشعة من البعد $(2^{k-1}M\times 1)$ معرفين كما يلي :

$$C=\left[c_{1,0},c_{1,1},...,c_{1,M-1},c_{2,0},...,c_{2,M-1},c_{2^{k-1},0},...,c_{2^{k-1},M-1}\right]^T$$
$$\Psi(x)=\left[\psi_{1,0}(x),\psi_{1,1}(x),...,\psi_{1,M-1}(x),...,\psi_{2^{k-1},0}(x),...,\psi_{2^{k-1},M-1}(x)\right]^T$$

نظرية 3.1.3 إذا كان $u(x)\in L^2_{w_n(x)}[0,1]$ و تقريبه وفق أساس *UW* التالي :

$$u(x)=u_{n,m}(x=\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\sum_{m=0}^{M-1}c_{n,m}\psi_{n,m}(x)$$

لنعتبر : $M>2$ و العدد N يحقق $|u''(x)|\leq N$, تقدير خطأ التقريب بـ *UW* يعطى كما يلي :

$$\|u-u_{n,m}\|<\sqrt{N^2\pi\times\frac{1}{2^{5.2^{k-1}-3}5\ln 2}\times\frac{4M-(M^2-4)\left(\log\left[\frac{M-2}{M+2}\right]\right)}{32\,(M^2-4)}}$$

البرهان 3.1.3 (أنظر [92])

3.3.3 خوارزمية الحل باستعمال *UW*

لنعتبر المعادلة التكاملية-التفاضلية لفولترا *VIDEs* المعرفة في (38.3) و الناتجة من مسألة *Lane–Emden* المعرفة في (32.3) , من أجل تطبيق طريقة مويجات تشيبيشاف *UW* علينا أولا تقريب التابع المجهول $u(x)$ على النحو [92]: $u(x) = C^T \Psi(x)$. حيث C معرفة في (40.3)
نكامل بالنسبة للمتغير x طرفي المعادلة (38.3) من 0 الى x و بإستعمال الشرط $u(0) = u_0$ نحصل على :

$$u(x) = u_0 - \int_0^x \frac{k}{x} u(x)\, dx + \int_0^x F(x)\, dx - \int_0^x \left[\int_0^x K(x,t)\, u(x)\, dt \right] dx$$

بتعويض تقريب المجهول $u(x)$, ينتج لنا :

$$\begin{aligned} C^T \Psi(x) &= u_0 - \int_0^x \frac{k}{x} C^T \Psi(x)\, dx + \int_0^x F(x)\, dx \\ &- \int_0^x \left[\int_0^x K(x,t)\, C^T \Psi(x)\, dt \right] dx \\ &= G(x) + \int_0^x H_1(x)\, dx + \int_0^x H_2(x)\, dx \end{aligned} \qquad (41.3)$$

حيث :

$$G(x) = u_0 + \int_0^x F(x)\, dx, H_1(x) = \frac{k}{x} C^T \Psi(x), H_2(x) = \int_0^x K(x,t)\, C^T \Psi(x)\, dt$$

بإختيار من نقاط التجميع التالية : $x_i = \frac{2i-1}{2^k M}, i = 1, 2, ..., 2^k M$ و التعويض في المعادلة الأخيرة يكون :

$$C^T \Psi(x_i) = G(x_i) - \int_0^x H_1(x_i)\, dx - \int_0^x H_2(x_i)\, dx \qquad (42.3)$$

لإستعمال طريقة تكامل غوص في (42.3) تغير حدود التكامل من $[0, x]$ الى $[0, 1]$ عن طريق تبديل المتغير التالي : $\tau = \frac{2}{x_i} x - 1$. و بالتالي المعادلة تأخذ الشكل التالي [92]:

$$C^T \Psi(x_i) \cong G(x_i) - \frac{x_i}{2} \int_{-1}^{+1} H_1\left(\frac{x_i}{2}(\tau + 1) \right) dx - \frac{x_i}{2} \int_{-1}^{+1} H_2\left(\frac{x_i}{2}(\tau + 1) \right) dx$$

بإستخدام صيغة تكامل غوس، نحصل على

$$C^T \Psi(x_i) \cong G(x_i) - \frac{x_i}{2} \sum_{j_1=1}^{s_1} \omega_{j_1} H_1\left(\frac{x_i}{2}(\tau_{J_1+1}) \right) dx - \frac{x_i}{2} \sum_{j_2=1}^{s_2} \omega_{j_2} H_2\left(\frac{x_i}{2}(\tau_{J_2} + 1) \right) dx$$

حيث τ_{J_1} , τ_{J_1} تمثل أصفار كثيري حدود لوجندر P_{s_1+1} , P_{s_2+1} و ω_{j_1} , ω_{j_2} الأوزان المرفقة بها . ان المعادلة الأخيرة تشكل لنا جملة من $2^{k-1}M$ معادلة جبرية بمجاهيل معاملات المصفوفة C. و بذلك يمكن الحصول على الحل التقريبي للمسألة من الشكل $u(x) = C^T \Psi(x)$.

4.3.3 تطبيق عددي

مثال 1.3.3 لتكن مسالة *Lane–Emden* [86, 87, 92]

$$y''(x)+\frac{8}{x}y'(x)+xy(x) = x^5-x^4+44x^2-30x, 0<x\leq 1$$

مع الشروط الإبتدائية : $y(0)=y'(0)=0$. لدينا شكل *VIDEs* الناتج منها هو :

$$u'(x)+\frac{8}{x}u(x) = 5x^4-4x^3+88x-30-\int_0^x\left(-\frac{8}{x}+2x-t\right)u(t)\,dt$$

و $u(0)=0$, لدينا الحل الدقيق للمسالة هو $y(x)=x^4-x^3$. الحلول التقريبية التي تم الحصول عليها من قبل بتطبيق طريقة *UW* من أجل القيم $(M=6\ k=1)$ مع مقارنة بطريقة مويجات لوجندر *LW* من أجل نفس القيم $(M=6\ k=1)$ 11 نعرضها في الجدول المقابل :

جدول 3.3: مقارنة بين طريقتي *UW* و *LW* للمثال (1.3.3)

x	*UWM*	*LWM*	*Exact*	الخطأ في *UWM*	الخطأ في *LWM*
0.1	−0.0009	−0.0009	−0.0009	$1.4962E-17$	$1.6E-11$
0.2	−0.0064	−0.0064	−0.0064	$4.59702E-17$	$1.5E-11$
0.3	−0.0189	−0.0189	−0.0189	$6.245E-17$	0
0.4	−0.0384	−0.0384	−0.0384	$6.245E-17$	$1.0E-11$
0.5	−0.0625	−0.0625	−0.0625	$1.04083E-16$	$4.0E-11$
0.6	−0.0864	−0.0864	−0.0864	$1.94289E-16$	$1.0E-11$
0.7	−0.1029	−0.1029	−0.1029	$3.33067E-16$	$1.0E-10$
0.8	−0.1024	−0.1024	−0.1024	$4.30211E-16$	$2.0E-10$
0.9	−0.0729	−0.0729	−0.0729	$4.85723E-16$	$3.3E-10$

جدول 4.3: الخطأ L_2 و L_∞ الناتجة من طريقتي *UW* و *LW* للمثال (1.3.3)

الخطأ	*UWM*	*LWM*
L_2	$1.05492E-7$	$5.59398E-6$
L_∞	$1.03058E-7$	$5.59068E-6$

حيث الخطأ المطلق *Absolute error* يحسب كما يلي :

$$|e_i| = \left| y(x_i)-\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\sum_{m=0}^{M-1} c_{n,m}\psi_{n,m}(x)\right|, i=0,1,...,s$$

و عبارة الخطأ L_2 و L_∞ يحسبان بالشكل : $L_\infty=\max\limits_{0\leq i\leq s}|e_i|$, $L_2=\sqrt{\sum_{i=0}^{s}|e_i|^2}$

مثال 2.3.3

لتكن مسألة *Lane–Emden* [92 ,87]

$$y''(x)+\frac{2}{x}y'(x)+y(x) = x^3+x^2+12x+6, 0<x\leq 1$$

مع الشروط الإبتدائية :

$$y(0) = y'(0)=0$$

. لدينا شكل *VIDEs* الناتج منها هو [92]:

$$\begin{aligned} u'(x)+\frac{2}{x}u(x) &= 3x^2+2x+12-\int_0^x\left(-\frac{2}{x}+1\right)u(t)\,dt \\ u(0) &= 2 \end{aligned}$$

لدينا الحل الدقيق لهذه المعادلة هو : $y(x)=x^2+x^3$
نتائج الحلول التقريبية التي تم الحصول عليها من قبل بتطبيق طريقة *UW* من أجل القيم $(M=8\ k=1)$ مع مقارنة بطريقة أدومان التحليلية *ADM* من أجل نفس القيم $(M=8\ k=1)$ 11 نعرضها في الجدول المقابل :

جدول 5.3: مقارنة بين طريقتي *ADM* و *UWM* للمثال (2.3.3)

x	*UWM*	*ADM*	*Exact*
0.1	0.011	0.011	0.011
0.2	0.048	0.048	0.048
0.3	0.117	0.117	0.117
0.4	0.224	0.224	0.224
0.5	0.375	0.375	0.375
0.6	0.576	0.576	0.576
0.7	0.833	0.833	0.833
0.8	1.152	1.152	1.152
0.9	1.539	1.539	1.539

جدول 6.3: الخطأ L_2 و L_∞ الناتجة من طريقتي *UWM* و *ADM* للمثال (2.3.3)

الخطأ	*UWM*	*ADM*
L_2	$5.66647E-14$	$1.30900E-12$
L_∞	$2.02061E-14$	$1.28586E-12$

4.3 الاستنتاج

تم في هذه الفصل و في قسمه الأول ، صياغة معادلة فولتيرا التكاملية-التفاضلية *VIDEs* الناتجة من معادلة *Emden-Fowler* ذات القيمة الابتدائية الشاذة. و بإستعمال التقريب بكثير حدود برنشتاين *BPs* سهل لناالعمل لإيجاد الحل العددي للمسألة *Emden-Fowler* و , و بذلك أمكن التغلب على صعوبة السلوك الشاذ في القيمة $x = 0$. و بإستخدام هذا الإجراء تم تبسيط المسألة بحيث نجد أنفسنا أمام جمل معادلات جبرية يمكن حلها بطرق معروفة و سهلة البرمجة . وقد تم تدعيم هذه الطريقة بأمثلة عددية توضيحية لإظهار دقة و كفاءة الطريقة الحالية و بهذا يستنتج أنه يمكن تطبيقها على مسائل أخرى .

و في قسمه الثاني تم كذلك كتابة المعادلة التكاملية-التفاضلية لفولترا *VIDEs* المكافئة لمسألة *Lane-Emden* الشاذة و بشكل مختلف عن الطريقة بالقسم الاول و بالإعتماد على المجهول $u(x)$ تبديل المتغير $y''(x) = u(x)$ و عن طريق التقريب بمويجات تشيبيشاف من النوع الثاني *UW* بسطت عملية معالجة مسألة *Lane-Emden* بحيث أصبحنا أمام جمل معادلات جبرية غير خطية تحل بطرق معروفة كطريقة نيوتن و بذلك أمكن التغلب على مشكل السلوك الشاذ في القيمة $x = 0$. و من خلال أمثلة عددية تبين مدى دقة هذه الطريقة مقارنة بطرق أخرى سبق دراستها , لكن يبقى عيب في الطريقة و هو إختيار القيمة الإبتدائية لطريقة نيوتن التكرارية لحل الجمل الغير خطية . و برغم ذلك ذلك يجعلنا تستنتج فاعلية هذه الطريقة في حل مسائل أخرى من نفس المنوال .

الفصل الرابع

معالجة عددية لـ IDEs ذات الرتب الكسرية باستخدام JPs و LW

قائمة المحتويـــــــات

1.4 مقدمة 59
1.1.4 الحساب الكسري 60
2.1.4 دوال القطع النبضية BPFs 60
2.4 طريقة LW في معالجة عددية لـ IDEs من رتب كسرية 61
1.2.4 خصائص LW و تقريب تابع 61
2.2.4 مصفوفة العمليات للتفاضل الكسري وفق اساس LW 62
3.2.4 خوارزمية حل IDEs 63
4.2.4 تقدير خطأ التقريب 65
5.2.4 تطبيقات عددية 66
3.4 طريقة JPs المهجن في معالجة عددية لـ IDEs من رتب كسرية 70
1.3.4 JPs المهجن بتابع القطع النبضية BPFs 70
2.3.4 مصفوفات العمليات الكسرية 71
3.3.4 الطريقة لحل IDEs كسرية غير الخطية 73
4.3.4 تطبيقات عددية 75
4.4 الاستنتاج 79

1.4 مقدمة

إن حساب التفاضل والتكامل الكسري رغم أنه ظهر قديما يعود إلى حوالي 300 سنة تقريبا إلا أنه يعتبر حديثا لأنه إكتسب رواجا وأهمية كبيرة في العقود الثلاث الأخيرة فعدد المنشورات و الملتقيات العلمية التي كرست لأجله تشهد على أهمية المسائل التي يثيرها هذا الموضوع من الناحتين النظرية و التطبيقية حيث تظهر تطبيقاته في مختلف مجالات العلوم و الهندسة مثل التحليل العددي , المعادلات التفاضلية , الدارات الكهربائية , نظرية الإحتمالات و الإحصاء , الكيمياء , البيولوجيا ... الخ. و قد كرست دراسات عديد من أجل إيجاد طرق عددية بهدف الحصول على حلول تقريبية دقيقة للمعادلات التفاضلية و المعادلات التكاملية و التكاملية-التفاضلية من رتب كسرية *FIDEs* على سبيل المثال طريقة أدومان التحليلية *ADM* [95 ,94] . بالمويجات [102, 97, 100, 110] و طريقة دوال القطع النبضية *BPFs* , كثيرات حدود لوجندر *LPs*, تشيبيشاف , برنولي , لاقير و مويجات هار [103, 104, 105, 106, 107, 109]
في هذا الفصل سيتم التطرق الى معالجة عددية عن طريق بناء مصفوفة العمليات الكسرية للتكامل لمويجات لوجندر *LW* لإيجاد حلول تقريبية للمعادلة التكاملية-التفاضلية ذات الرتب الكسرية *FIDEs* الخطية (عرض و تحليل للمقالة [93]) و المعرفة كما يلي :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}f(x) &= \lambda_1 \int_0^x u_1(x,y) f(y)dy + \lambda_2 \int_0^1 u_2(x,y) f(y)dy + g(x) \\ f^{(s)}(0) &= 0, s = 0,1,...,r-1, r-1 < s \leq r, r \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

و *FIDEs* الغير خطية المعرفة كما يلي : [93]

$$\begin{aligned} D^{\alpha}f(x) &= \lambda_1 \int_0^x u_1(x,y) [f(y)]^p dy + \lambda_2 \int_0^1 u_2(x,y) [f(y)]^q dy + g(x) \\ f^{(s)}(0) &= 0, \quad p,q \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

حيث $f^{(s)}(x)$ المشتق من الرتبة s للتابع المجهول $f(x)$, $D^{\alpha}(.)$ المشتق الكسري بمفهوم *caputo* و $g(x)$, $u_2(x,y)$, $u_1(x,y)$ توابع معلومة . λ_1 و λ_2 أعداد حقيقية .
أيضا يتم إنشاء مصفوفة العمليات لكثير حدود جاكوبي *JPs* المهجن (المزج) بدوال القطع النبضية *BPFs* من أجل إيجاد حلول تقريبية لمعادلات التكاملية-التفاضلية من رتب كسرية *FIDEs* من الشكل : [101]

$$\begin{aligned} D^{\alpha}f(x) &- \int_0^1 k(x,y) [f(y)]^q dy = g(x) \\ f^{(s)}(0) &= a_s, s = 0,1,...,r-1, r-1 < s \leq r, r \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

حيث $f^{(s)}(x)$ المشتق من الرتبة s للتابع المجهول $f(x)$, $D^{\alpha}(.)$ المشتق الكسري بمفهوم *caputo* و $g(x)$ تابع معلوم .

1.1.4 الحساب الكسري

تعريف 1.1.4 يعرف التكامل الكسري للتابع $f(x)$ من الرتبة α بمفهوم *Riemann–Liouville* كما يلي :

$$J^{\alpha}f\left(x\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{0}^{x}\left(x-\tau\right)^{\alpha-1}f\left(\tau\right)d\tau, \quad \alpha>0 \tag{1.4}$$

$$J^{0}f\left(x\right) = f\left(x\right) \tag{2.4}$$

تعريف 2.1.4 يعرف التفاضل الكسري للتابع $f(x)$ من الرتبة α بمفهوم *Caputo* كما يلي :

$$D^{\alpha}f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{d^{r}f(x)}{dr}, & r=\alpha\in\mathbb{N}\\ \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)}\int_{0}^{x}\frac{f^{(r)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-r-1}}d\tau, & ,0\leq r-1\leq\alpha\leq1\end{cases} \tag{3.4}$$

خاصية 1.1.4 المؤثران J^{α} و D^{α} يحققان العلاقة التالية :

1. $J^{\alpha}x^{p}=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\alpha+1)}x^{\alpha+p}$
2. $D^{\alpha}f\left(x\right)=J^{r-\alpha}D^{r}f\left(x\right)$. حيث D^{r} التفاضل من رتب صحيحة المعتاد .
3. $D^{\alpha}J^{\alpha}f\left(x\right)=f\left(x\right)$
4. $J^{\alpha}D^{\alpha}f\left(x\right)=f\left(x\right)-\sum_{k=0}^{r-1}f^{(k)}\left(0^{+}\right)\frac{x^{k}}{k\downarrow}, x>0$

2.1.4 دوال القطع النبضية *BPFs*

تعريف 3.1.4 [111] دوال القطع النبضية *(block pulse functions)* هي الدوال المعرفة على المجال $[0,1)$ كما يلي:

$$b_{j}(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[\frac{j-1}{m},\frac{jT}{m}\right)\\ 0 & x\notin\left[\frac{j-1}{m},\frac{jT}{m}\right)\end{cases} \tag{4.4}$$

حيث $j=1,2,\ldots,m$ و m عدد صحيح موجب .

دوال القطع النبضية *BPFs* تحقق الخواص التالية أي :

$$b_{j}(x)b_{i}(x) = \begin{cases}b_{j}(x) & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{5.4}$$

$$\int_{0}^{1}b_{i}(x)b_{j}(x)dx = h\delta_{ij} \tag{6.4}$$

حيث $i,j=1,2,\ldots,m$. و $h=\frac{1}{m}$, δ_{ij} هي دلتا كرونكر.

2.4 طريقة *LW* في معالجة عددية لـ *IDEs* من رتب كسرية

1.2.4 خصائص *LW* و تقريب تابع

تعريف 1.2.4 تعرف مويجات لوجندر LW على المجال $[0,1)$ بالشكل : [96]

$$\varphi_{nm}=\begin{cases}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}2^{\frac{k}{2}}L_m\left(2^kx-\hat{n}\right), \frac{\hat{n}-1}{2^k}\leq x<\frac{\hat{n}+1}{2^k}\\ 0, otherwise\end{cases}$$

حيث $m=0,1,...,M-1$ و $k=1,2,...,\hat{n}=2n+1, n=1,2,...,2^k$. و $L_m(x)$ كثير حدود لوجندر LPs من الدرجة m المذكور تفاصيله في الفصل 1

إن تقريب التابع $f(x)\in L^2_{w_n(x)}[0,1]$ بواسطة مويجات لوجندر LW يعطى بالشكل :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{2^k}\sum_{m=0}^{M-1}c_{n,m}\varphi_{n,m}(x)=C^T\Phi(x) \tag{7.4}$$

حيث , C و $\Phi(x)$ مصفوفتان من البعد $(\hat{m}=2^{k-1}M\times 1)$ معرفتان كما يلي :

$$C = \left[c_{1,0},c_{1,1},...,c_{1,M-1},c_{2,0},...,c_{2,M-1},c_{2^{k-1},0},...,c_{2^{k-1},M-1}\right]^T \tag{8.4}$$
$$\Phi(x) = \left[\varphi_{1,0},\varphi_{1,1},...,\varphi_{1,M-1},...,\varphi_{2^{k-1},0},...,\varphi_{2^{k-1},M-1}\right]^T \tag{9.4}$$

و المعاملات : $c_{n,m}=\langle f(x),\varphi_{n,m}(x)\rangle_{w_n}=\int_0^1 w_n(x)f(x)\varphi_{n,m}(x)dx$ للتبسيط , يمكن كتابة العلاقة الأخيرة بالشكل التالي :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\hat{m}}c_i\varphi_i(x)=C^T\Phi(x) \tag{10.4}$$

حيث, $c_i=c_{nm}$ و $\varphi_i=\varphi_{nm}$ و الدليل $i=M(n-1)+m+1$ و بالتالي يصبح :

$$C = \left[c_1,c_1,...,c_{M+1},...,c_{2M},...,c_{M(2^{k-1}-1)+1},...,c_{\hat{m}}\right]^T \tag{11.4}$$
$$\Phi(x) = \left[\varphi_1,\varphi_1,...,\varphi_{M+1},...,\varphi_{2M},...,\varphi_{M(2^{k-1}-1)+1},...,\varphi_{\hat{m}}\right]^T \tag{12.4}$$

بنفس الطريقة , إذا كان $u(x,y)\in L^2[0,1]\times[0,1]$ فإن تقريبه وفق أساس مويجات LW بمتغيرين يكون بالشكل التالي :

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{\hat{m}}\sum_{j=1}^{\hat{m}}u_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(y)=\Phi^T(x)U\Phi(y) \tag{13.4}$$

حيث $U=[u_{ij}]$ و $u_{ij}=\langle\varphi_i(x),\langle u(x,y),\varphi_j(y)\rangle\rangle$

2.2.4 مصفوفة العمليات للتفاضل الكسري وفق اساس *LW*

نود عرض كيفية بناء مصفوفات العمليات للتكامل الكسري P^{α} لمويجات لوجندر LW التي تحقق :

$$J^{\alpha}\Phi(x) \simeq P^{\alpha}\Phi(x) \tag{14.4}$$

لذا علينا الإستعانة بدوال القطع النبضية $BPFs$

مبرهنة 1.1.4 (أنظر [98])

نرمز بـ $\Pi(x)$ لشعاع دوال $BPFs$ حيث : $\Pi(x) = [b_0(x), b_1(x), ..., b_{m-1}(x)]^T$
مصفوفات العمليات للتكامل الكسري لدوال القطع النبضية $BPFs$ و التي نرمز لها بـ: F^{α} و تحقق : $J^{\alpha}\Pi(x) \simeq F^{\alpha}\Pi(x)$ تعرف كما يلي :

$$F^{\alpha} = h^{\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{m-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \dots & \xi_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \xi_{m-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{15.4}$$

حيث : $\xi_k = (k+1)^{\alpha+1} - 2k^{\alpha+1} + (k-1)^{\alpha+1}, \quad k = 1, 2; ...; m-1$

مبرهنة 2.2.4 (أنظر [99])

العلاقة التي تربط بين دوال القطع النبضية $BPFs$ و مويجات لوجندر UW هي :

$$\Phi(x) = \Omega(x)\Pi(x) \tag{16.4}$$

حيث : $\Omega(x) = [\Phi(x_0), \Phi(x_1), ..., \Phi(x_{m-1})]^T, x_i = i/m, i = 0, 1, .., m-1$ من المبرهنتين السابقتين نتحصل على شكل التكامل الكسري لشعاع LW وفق شعاع $BPFs$ كما يلي :

$$\begin{aligned} J^{\alpha}\Phi(x) &= J^{\alpha}\Omega(x)\Pi(x) \\ &= \Omega(x)J^{\alpha}\Pi(x) \\ &= \Omega(x)F^{\alpha}\Pi(x) \end{aligned}$$

و من خلال ما سبق يمكننا إستنتاج صيغة مصفوفة العمليات للتكامل OMI الكسري لـ LW , لدينا :

$$\begin{aligned} P^{\alpha}\Phi(x) &= P^{\alpha}\Omega(x)\Pi(x) \\ &= \Omega(x)F^{\alpha}\Pi(x) \\ &= \Omega(x)F^{\alpha}\Omega(x)^{-1}\Phi(x) \end{aligned}$$

و منه المصفوفة P^{α} تعرف بالصيغة :

$$P^{\alpha} = \Omega(x)F^{\alpha}\Omega(x)^{-1} \tag{17.4}$$

3.2.4 خوارزمية حل IDEs

1.3.2.4 IDEs الخطية

بإستعمال مويجات لوجندر LW نورد خوارزمية لإيجاد حلول تقريبية للمعادلة التكاملية-التفاضلية الكسرية الخطية المعرفة كما يلي : *(Z.Menga, L.Wanga, H.Lib , W.Zhangb [93])* $FIDEs$

$$D^{\alpha}f(x) = \lambda_1 \int_0^x u_1(x,y) f(y)dy + \lambda_2 \int_0^1 u_2(x,y) f(y)dy + g(x) \quad (18.4)$$

$$f^{(s)}(0) = 0, s = 0,1,...,r-1, r-1 < s \leq r, r \in \mathbb{N} \quad (19.4)$$

حيث $f^{(s)}(x)$ المشتق من الرتبة s للتابع المجهول $f(x)$, $D^{\alpha}(.)$ المشتق الكسري بمفهوم *caputo* و $g(x)$, $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ توابع معلومة . λ_1 و λ_2 أعداد حقيقية .

أولا نقوم بتقريب التوابع $D^{\alpha}f(x)$, $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$, و $g(x)$ و وفق أساس LW كما يلي :

$$D^{\alpha}f(x) = C^T \Phi(x) \quad (20.4)$$

$$u_1(x,y) = \Phi^T(x) U_1 \Phi(y) \quad (21.4)$$

$$u_2(x,y) = \Phi^T(x) U_2 \Phi(y) \quad (22.4)$$

$$g(x) = G^T \Phi(x) \quad (23.4)$$

حيث :

$$U_1 = \left[u_{ij}^{(1)}\right], \quad U_2 = \left[u_{ij}^{(2)}\right], i,j = 1,2,...,\hat{m}, \quad G = [g_1, g_2, ..., g_{\hat{m}}]^T$$

بإستعمال خواص الحساب الكسري و العلاقة (20.4) نحصل على :

$$f(x) = J^{\alpha}D^{\alpha}f(x) = J^{\alpha}\left(C^T\Phi(x)\right) = C^T P^{\alpha}\Phi(x) = C^T P^{\alpha}\Omega\Pi(x)$$

بوضع : $E = [e_0, e_1, ..., e_{\hat{m}-1}] = C^T P^{\alpha}\Omega$ يكون لدينا:

$$\begin{aligned}
\int_0^x u_1(x,y) f(y) dy &= \int_0^x \Phi^T(x) U_1 \Phi(y) \Phi^T(y) \left[C^T P^{\alpha}\right]^T dy \\
&= \Phi^T(x) U_1 \int_0^x \Omega\Pi(y) \Pi^T(y) \left[C^T P^{\alpha}\Omega\right]^T dy \\
&= \Phi^T(x) U_1\Omega \int_0^x \Pi(y) \Pi^T(y) [E]^T dy \\
&= \Phi^T(x) U_1\Omega \int_0^x diag(E) \Pi^T(y) dy \\
&= \Pi^T(x) \Omega^T U_1 \Omega diag(E) F^1 \Pi(x) \\
&= \hat{Q}^T \Pi(x)
\end{aligned}$$

حيث $\hat{Q}$ شعاع من $\hat{m}$ مركباته و التي تمثل عناصر القطر للمصفوفة التالية :

$$Q = \Omega^T U_1 \Omega diag\left(E\right) F^1 \tag{24.4}$$

أما التكامل لفريدهولم من المعادلة (18.4) فإنه يأخذ الصيغة التالية :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u_2\left(x,y\right) f\left(y\right) dy &= \int_0^1 \Phi^T\left(x\right) U_2 \Phi\left(y\right) \Phi^T\left(y\right) \left[C^T P^\alpha\right]^T dy \\
&= \Phi^T\left(x\right) U_2 \int_0^x \Omega\Pi\left(y\right) \Pi^T\left(y\right) \left[C^T P^\alpha \Omega\right]^T dy \\
&= \Phi^T\left(x\right) U_2 \Omega \int_0^x \Pi\left(y\right) \Pi^T\left(y\right) dy E^T \\
&= \frac{1}{\hat{m}} \Phi^T\left(x\right) U_2 \Omega E^T \\
&= \frac{1}{\hat{m}} \Pi^T\left(x\right) \Omega^T U_2 \Omega E^T \\
&= \frac{1}{\hat{m}} E \Omega^T U_2^Y \Omega\Pi\left(x\right)
\end{aligned}$$

و منه بالتعويض في المعادلة (18.4) نحصل على الشكل :

$$C^T \Omega\Pi\left(x\right) = \lambda_1 \hat{Q}^T \ \Pi\left(x\right) + \lambda_2 \frac{1}{\hat{m}} E \Omega^T U_2^Y \Omega\Pi\left(x\right) + G^T \Omega\Pi\left(x\right) \tag{25.4}$$

و بالتالي تتحول لنا المسألة *FIDEs* الخطية إلى الشكل :

$$C^T \Omega = \lambda_1 \hat{Q}^T \ + \lambda_2 \frac{1}{\hat{m}} E \Omega^T U_2^Y \Omega + G^T \Omega \tag{26.4}$$

وهي جملة معادلات جبرية خطية و حلها بالطرق المعروفة و بذلك نحصل على الحل التقريبي للمسألة (18.4)

2.3.2.4 *IDEs* غير الخطية

على نفس المنوال السابق و بإستعمال طريقة *LW* سنعالج *FIDEs* الغير الخطية التالية : [93]

$$D^\alpha f\left(x\right) = \lambda_1 \int_0^x u_1\left(x,y\right) \left[f\left(y\right)\right]^p dy + \lambda_2 \int_0^1 u_2\left(x,y\right) \left[f\left(y\right)\right]^q dy + g\left(x\right),$$

و لنعتبر الشروط الإبتدائية : $f^{(s)}(0) = 0$ حيث $p, q \in \mathbb{N}$

نلاحظ أن التقريبات للتوابع المعلومة والمجهولة وفق اساس *LW* بنفس الشكل في الفقرة السابقة , يبقى لنا فقط تقريب التابعين $[f(y)^p$ و $f(y)^q]$ وفق أساس *LW* و منه نعلم أنه :

$$\begin{aligned}
f\left(x\right) &= C^T \Phi\left(x\right) \\
&= C^T P^\alpha \Omega\Pi\left(x\right) \\
&= E\Pi\left(x\right)
\end{aligned}$$

و منه يكون :

$$\begin{aligned}[f(y)]^P &= \left[C^T\Phi(y)\right]^P \\ &= \left[e_0^p, e_1^p, ..., e_{\hat{m}-1}^p\right]\Phi(y) \\ &= E_p\Pi(x)\end{aligned}$$

و كذلك :

$$\begin{aligned}[f(y)]^q &= \left[C^T\Phi(y)\right]^q \\ &= \left[e_0^q, e_1^q, ..., e_{\hat{m}-1}^q\right]\Phi(y) \\ &= E_q\Pi(x)\end{aligned}$$

و على نفس النهج في الفقرة 1.3.2.4 تتحول مسألة *FIDEs* الغير خطية إلى جملة معادلات جبرية غير خطية من الشكل التالي :

$$C^T\Omega = \lambda_1\hat{W}^T + \lambda_2\frac{1}{\hat{m}}E_q\Omega^T U_2^Y\Omega + G^T\Omega \tag{27.4}$$

حيث $\hat{W}$ شعاع من $\hat{m}$ مركبة و تمثل عناصر القطر للمصفوفة التالية :

$$W = \Omega^T U_1\Omega diag\left(E_p\right)F^1 \tag{28.4}$$

بالطرق التكرارية لنيوتن يمكن حل هذه الجملة الغير خطية و بالتالي نتحصل على الحل التقريبي للمسالة

4.2.4 تقدير خطأ التقريب

نظرية 2.1.4 بفرض أن التابع $D^\alpha f_{kM}(x)$ هو تقريب للتابع $D^\alpha f(x)$ وفق أساس LW و $\left|D^{\alpha+2}f(x)\right| \leq \hat{M}$ مع $\hat{M}$ ثابت موجب إن تقدير خطأ التقريب بـ LW يعطى كما يلي :

$$\left\|D^\alpha f(x) - D^\alpha f_{kM}(x)\right\|_E = \left\|D^\alpha f(x) - \sum_{n=0}^{2^k-1}\sum_{m=0}^{M-1} c_{n,m}\varphi_{n,m}(x)\right\|_E \tag{29.4}$$

$$\leq \sqrt{\left(\frac{\hat{M}^2}{31}\frac{1}{2^{5K+3}}\left(\frac{\Gamma'(M-1.5)}{\Gamma(M-1.5)}\right)'''\right)} \tag{30.4}$$

حيث $\|f(x)\|_E = \left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$, $c_{n,m} = \langle D^\alpha f(x), \varphi_{n,m}(x)\rangle$

و $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ تابع غاما المزدوج .

البرهان 2.1.4 (أنظر [93])

5.2.4 تطبيقات عددية

مثال 1.2.4 لتكن المعدلة التكاملية-التفاضلية الكسرية *FIDEs* الخطية التالية [93]

$$D^{1.7}f(x)=\int_0^x (x-y)\,f(y)dy+\int_0^1 (x+y)\,f(y)dy+g(x) \qquad (31.4)$$

ذات الشروط الإبتدائية : $f'(0)=f(0)=0,$ و :

$$g(x)=\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1.3)}x^{0.3}+\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2.3)}x^{1.3}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^5}{20}-\frac{7x}{12}-\frac{9}{20}$$

الحل الدقيق لهذه المسألة هو : $f(x)=x^2+x^3$. في الجدول 1.4 المقابل مقارنة بين الطريقة المقترحة *LWM* و طريقة مويجات التجب تمام و الجيب *CASW* من أجل القيم مختلفة لـ k و $M=2$

جدول 1.4: مقارنة بين طريقة *LWM* و طريقة التجب تمام و الجيب *CASW* للمثال (1.2.4)

	$k=4$		$k=5$		$k=6$		$k=7$		
x	LWM	CASW	LWM	CASW	LWM	CASW	LWM	CASW	Exact solution
0	0.000024	0.007462	0.000012	0.002743	0.000007	0.000532	0.000000	0.000149	0.00000
1/8	0.015822	0.023571	0.016551	0.021438	0.017198	0.019677	0.017566	0.018642	0.017578
2/8	0.075531	0.093265	0.077098	0.084365	0.077920	0.081325	0.078115	0.079232	0.078125
3/8	0.192880	0.216487	0.193159	0.204620	0.193317	0.200321	0.193351	0.198711	0.193359
4/8	0.361498	0.398469	0.368505	0.392246	0.373205	0.385647	0.374988	0.379050	0.375000
5/8	0.622950	0.652830	0.626293	0.651032	0.631080	0.648892	0.634693	0.642014	0.634765
6/8	0.930901	1.134367	0.963194	0.128764	0.981423	0.122439	0.984162	0.112546	0.984375
7/8	1.391340	1.525654	1.408939	1.498832	1.422946	1.457231	1.434649	1.439672	1.435546

مثال 2.2.4 لتكن المعادلة : [93]

$$D^{2.3}f(x)=\frac{1}{4}\int_0^x (x-y)\,f(y)dy+\frac{1}{2}\int_0^1 xyf(y)dy+g(x) \qquad (32.4)$$

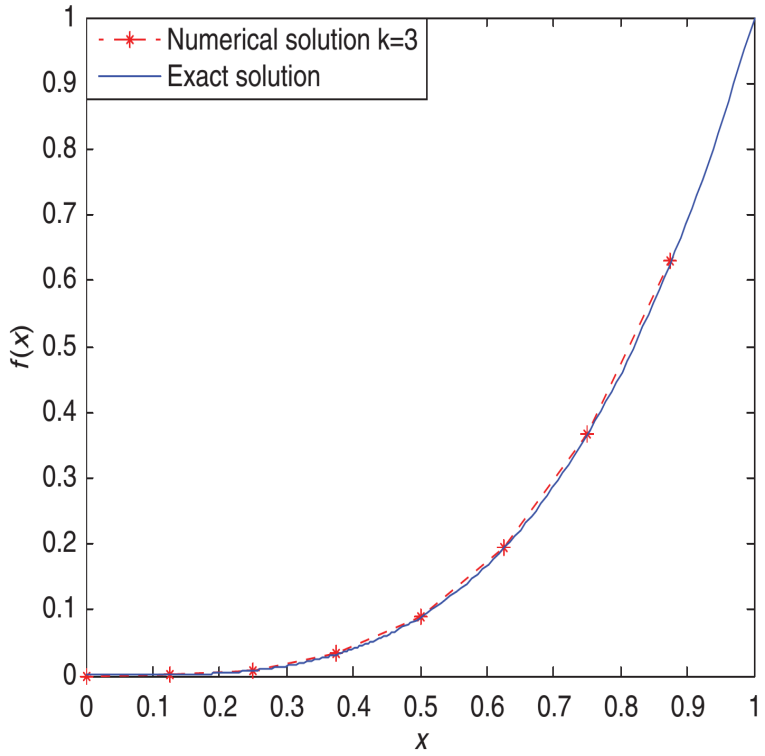
حيث :

$$g(x)=\frac{\Gamma(4.5)}{\Gamma(2.2)}x^{1.2}-\frac{x^{5.5}}{99}-\frac{x}{11} \qquad (33.4)$$

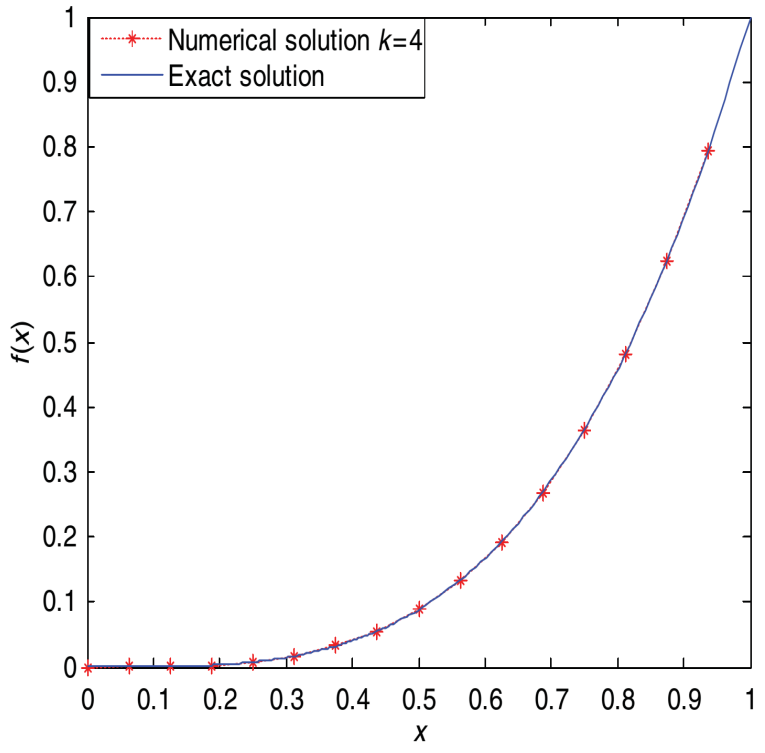
و لنعتبر الشروط التالية : $f''(0)=f'(0)=f(0)=0,$

الحل الدقيق لهذه المسألة هو : $f(x)=x^{\frac{7}{2}}$.

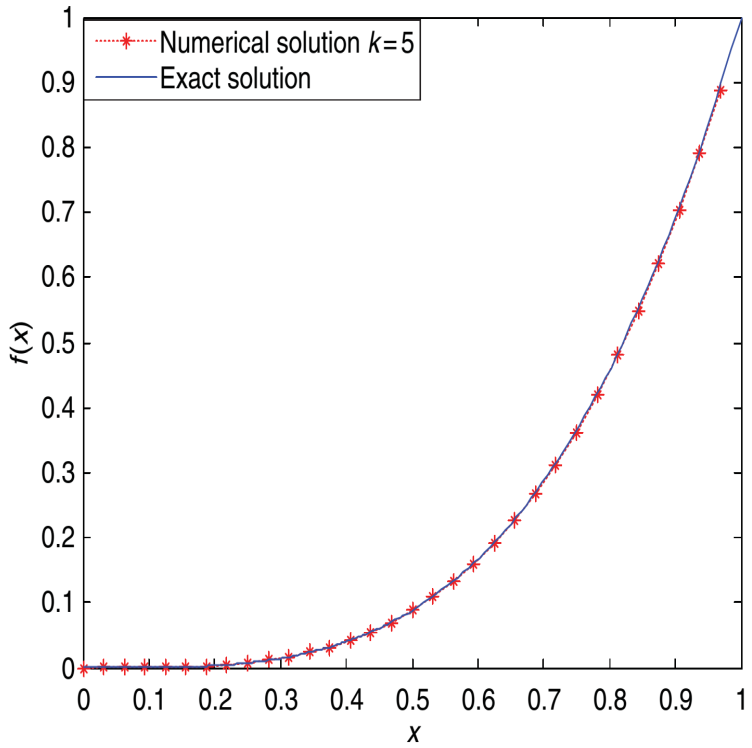
النتائج العددية بطريقة *LW* مقارنة بالحل الدقيق من اجل القيم $k=3,4,5,6$ و $M=2$ موضحة من خلال الأشكال (1.4);(4.4)



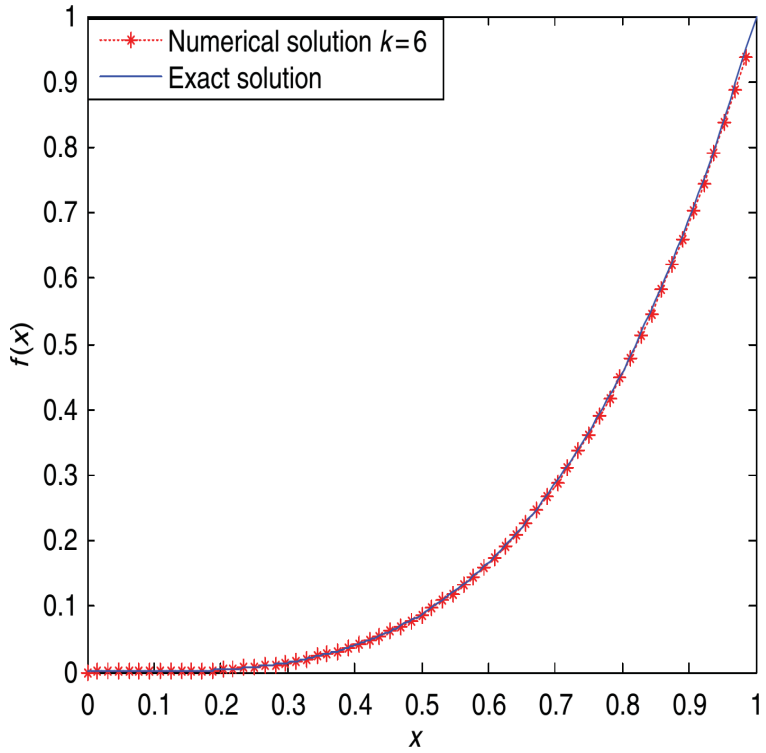
شكل 1.4: طريقة UW و الحل الدقيق من أجل $k = 3$ للمثال (2.2.4)



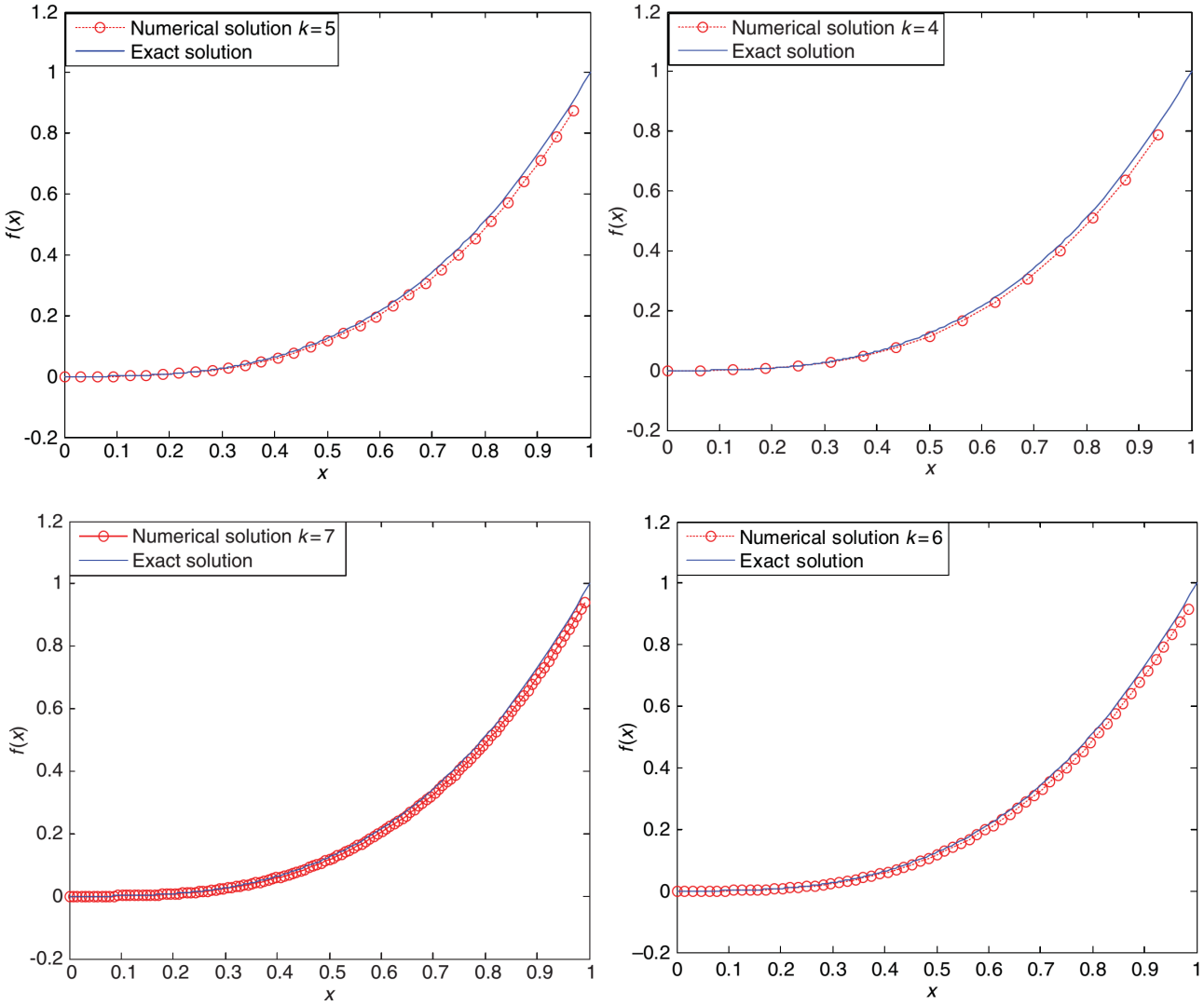
شكل 2.4: طريقة UW و الحل الدقيق من أجل $k = 4$ للمثال (2.2.4)



شكل 3.4: طريقة UW و الحل الدقيق من أجل $k = 5$ للمثال (2.2.4)



شكل 4.4: طريقة UW و الحل الدقيق من أجل $k = 6$ للمثال (2.2.4)



شكل 6.4: الحل الدقيق و الحل التقريبي ب *UWM* من أجل القيم $k = 4, 5, 6, 7$ و $M = 2$. للمثال (3.2.4)

مثال 3.2.4 لتكن المعادلة الغير خطية التالية : [93]

$$D^{2.2} f(x) = \frac{1}{3}\int_0^x (x+y)\,[f(y)]^2 + \frac{1}{4}\int_0^1 (x-y)[f(y)]^3 dy + g(x) \qquad (34.4)$$

حيث :

$$g(x) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(1.8)} x^{0.8} - \frac{5x^8}{99} - \frac{x}{40} + \frac{1}{44}$$

. مع الشروط : $f''(0) = f'(0) = f(0) = 0,$

الحل الدقيق لهذه المسألة هو : $f(x) = x^3$. في الشكل **(4.6)** نوضح مقارنة بين الحل الدقيق للمسألة و الحل التقريبي بإستعمال *LWM* من أجل القيم $k = 4, 5, 6, 7$ و $M = 2$. نلاحظ أنه كلما كانت قيمة k كبيرة كلما كان الحل التقريبي يقترب أكثر من التطابق مع الحل الدقيق

3.4 طريقة JPs المهجن في معالجة عددية لـ IDEs من رتب كسرية

في هذه الفقرة تم التطرق الى معالجة عددية للمعادلات التكاملية-التفاضلية IDEs الغير خطية من رتب كسرية عن طريق كثيرات حدود جاكوبي JPs المهجن بدوال القطع النبضية BPFs

1.3.4 JPs المهجن بتابع القطع النبضية BPFs

التابع المتعامد المهجن بين كثير حدود جاكوبي JPs و دوال القطع النبضية BPFs يرمز له بـ $h_{mn}(x)$, حيث n درجة BPFs و m درجة JPs, معرف على المجال $[0,1)$ كما يلي :

$$h_{mn}(x)=\begin{cases} P_{mn}^{\alpha,\beta}, & \frac{n}{N}\le x<\frac{n+1}{N} \\ 0, & else \end{cases} ,m=0,...,M-1;n=00,...,N-1 \quad (35.4)$$

حيث $P_{mn}^{\alpha,\beta}$ كثير حدود جاكوبي المقتصر غلى المجال $\left[\frac{n}{N},\frac{n+1}{N}\right]$ و الذي يتم الحصول علية من كثير حدود جاكوبي بتبديل المتغير التالي : $t=Nx-n$, و يكون بالشكل التالي :

$$P_{mn}^{\alpha,\beta}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{m-j}c_{ijk}\begin{pmatrix} m+\alpha \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m+\beta \\ m-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m-j \\ k \end{pmatrix}x^k \quad (36.4)$$

حيث $c_{ijk}=(-1)^j(-n)^{m-j-k}N^k$

ان JPs المهجن بـ BPFs التالي $h_{mn}^{\alpha,\beta}(x)$ متعامد بالنسبة لتابع الوزن $w(x)=\left(\frac{n+1}{N}-x\right)^{\alpha}\left(x-\frac{n}{N}\right)^{\beta}$ ذلك لأنه يحقق شرط التعامد أي: $\int_0^1 h_{mn}^{\alpha,\beta}(x)\,h_{qn}^{\alpha,\beta}(x)\,w(x)dx=\varsigma_m\delta_{mq}$ حيث

$$\varsigma_m=\frac{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(m+\beta+1)}{(2m+\alpha+\beta+1)\,m\downarrow\Gamma(m+\alpha+\beta+1)N^{\alpha+\beta+1}} \quad (37.4)$$

إن تقريب التابع $f(x)\in L^2_{w(x)}[0,1]$ بواسطة التابع المهجن $h_{mn}^{\alpha,\beta}(x)$ يعطى بالشكل : [101]

$$f(x)=\sum_{n=1}^{2^k}\sum_{m=0}^{M-1}f_{mn}h_{mn}^{\alpha,\beta}(x)=F^TH(x) \quad (38.4)$$

جيث $F^T=[f_{0,0},f_{0,1},...,f_{0,N-1},...,f_{M-1,0},...,f_{M-1,N-1}]^T$

و $H(x)=[h_{0,0},h_{0,1},...,h_{0,N-1},...,h_{M-1,0},...,h_{M-1,N-1}]^T$.

و للتبسيط نضع : $i=mN+n+1$.

فيكون لدينا $h_{mn}^{\alpha,\beta}(x)=h_i^{\alpha,\beta}(x)$ و

$$F^T = [f_0,f_1,...,f_{0,N-1},...,f_{M-1,0},...,f_{M-1,N-1}]^T \quad (39.4)$$

$$H(x) = [h_1,h_2,...,...,h_{MN}]^T \quad (40.4)$$

2.3.4 مصفوفات العمليات الكسرية

1.2.3.4 مصفوفة تكامل الجداء $H(x)H^T(x)$

باعتبار $M = 2q, q \in Z$ فإن التكامل $int_0^1 H(x)H^T(x)$ ينتج لنا مصفوفة كما يلي : [101]

$$E = \int_0^1 H(x) H^T(x) dx \tag{41.4}$$

$$= \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \frac{2}{2}I & 0 & \frac{2}{4}I & 0 & \dots & \frac{2}{M}I & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}I & 0 & \frac{4}{5}I & 0 & \dots & \frac{4}{M+1}I \\ \frac{2}{4}I & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{4}{5}I & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{2M-4}{M+1}I \\ \frac{2}{M}I & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \frac{4}{M+1}I & \dots & 0 & \frac{2M-4}{M+1}I & 0 & \frac{2M}{M+1}I \end{bmatrix} \tag{42.4}$$

حيث I و 0 هما على الترتيب مصفوفة الوحدة و المصفوفة الصفرية من البعد $N \times N$, واذا كان M فردي فإن بناء المصفوفة E يشبه الحالة السابقة . يكمن الإختلاف مثلا في الصف الأول ينتهي بـ 0 ثم $\frac{2}{M+1}I$ و العمود الأخير ينتهي بـ : $\frac{2}{M+1}I, 0, \frac{6}{M+1}I, \dots$

2.2.3.4 مصفوفة العمليات الكسرية للجداء *POM*

مصفوفة العمليات للجداء *POM* الكسرية و التي ترمز لها بـ $\tilde{B}$ و تحقق

$$H(x) H^T(x) B = \tilde{B} H(x) \tag{43.4}$$

عناصرها $\tilde{B}_{ij}$ معرفة كما يلي : [101]

$$\tilde{B}_{ij} = \frac{1}{\varsigma_m} \sum_{k=1}^{MN} g_{ijk} b_k \tag{44.4}$$

حيث b_k مركبات الشعاع B و g_{ijk} تحسب من خلال :

$$g_{ijk} = \int_0^1 h_i(x) h_k(x) h_j(x) w(x) dx, \tag{45.4}$$

$$h_j(x) = h_{mn}(x), j = mN + n + 1 \tag{46.4}$$

و بماأن $m = 0, 1, ..., M-1$ و $n = 0, 1, .., N-1$
فإن *POM* الكسرية $\tilde{B}$ تكون من البعد $NM \times NM$.

3.2.3.4 مصفوفة العمليات الكسرية للتكامل *OMI*

نسمي I^{α} و التي تحقق

$$J^{\alpha}H(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}H(t)\,dt\simeq\ I^{\alpha}H(x) \tag{47.4}$$

بمصفوفة العمليات الكسرية للتكامل بمفهوم *Riemann--Liouville* لكثيرات جاكوبي المهجن بـ *BPFs*

مبرهنة 1.1.4 [101] I^{α} حيث $\alpha>0$ هي مصفوفة ذات البعد $MN\times MN$ معرفة كما يلي :

$$I^{\alpha}=\left[(E_{mz})_{m,z=0}^{M-1}\right]_{MN\times MN} \tag{48.4}$$

جيث E_{mz} مصفوفة مثلثية علوية من الرتبة $N\times N$ من الشكل :

$$E_{mz}=\begin{bmatrix}\zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \cdots & \zeta_N\\ 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \zeta_2\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \zeta_1\end{bmatrix} \tag{49.4}$$

و العناصر ζ_i معرفة بالشكل :

$$\zeta_i=\frac{1}{\zeta_z}\sum_{l=0}^{m}p_{nm,\alpha\beta}^{l}\sum_{k=0}^{l}t_{kl}\sum_{r=0}^{z}p_{zq,\alpha\beta}^{r}a_i^{lkr} \tag{50.4}$$

حيث :

$$p_{nm,\alpha\beta}^{s}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}d_{ij}^{s}\binom{m+\alpha}{i}\binom{m+\beta}{m-s-i}\binom{i}{j} \tag{51.4}$$

$$d_{ij}^{s}=N^{s}\binom{m+s+\alpha+\beta}{s}(-1)^{i}(-n)^{m-s} \tag{52.4}$$

$$t_{kl}=\frac{l\downarrow}{(l-k)\downarrow\Gamma(k+\alpha+1)} \tag{53.4}$$

$$a_i^{lkr}=\int_{\frac{i}{N}}^{\frac{i+1}{N}}\left(\left(\frac{1}{N}\right)^{l-k}\left(x-\frac{1}{N}\right)^{k+\alpha}-\left(\frac{2}{N}\right)^{l-k}\left(x-\frac{21}{N}\right)\right)x^{r}w^{i}(x)\,dx$$

البرهان 3.1.4 (انظر [101])

3.3.4 الطريقة لحل IDEs كسرية غير الخطية

في هذا القسم الفرعي نستخدم مصفوفة التكامل الكسرية التي تم الحصول عليها في القسم الأخير لحل IDEs كسرية غير خطية من الشكل : *(F. Yousefi, A. Rivaz , W. Chen [101])*

$$D^{\alpha}f(x) - \int_0^1 k(x,y)[f(y)]^q dy = g(x) \quad (54.4)$$

$$f^{(s)}(0) = a_s, s = 0,1,...,r-1, r-1 < s \leq r, r \in \mathbb{N} \quad (55.4)$$

باستعمال أساس جاكوبي المهجن بتابع القطع النبضية يمكن تقريب التوابع المعلومة $k(x,y)$ و $g(x)$ كما يلي :

$$k(x,t) = H^T(x) K H(x) \quad (56.4)$$

$$g(x) = H(x)^T G \quad (57.4)$$

حيث K مصفوفة من البعد $MN \times MN$ و G مصفوفة من البعد $MN \times 1$ و تعين عناصر تلك المصفوفات كما يلي :

$$k_{ij} = \frac{1}{\zeta_m \zeta_p} \int_0^1 \int_0^1 k(x,t) h_{mn}(x) h_{pq}(x) w_s^n(x) w_s^q(t) dx \quad (58.4)$$

$$g_{ijk} = \frac{1}{\zeta_m} \int_0^1 g(x) h_{mn}(x) w_s^n(x) dx \quad (59.4)$$

$$i = mN + n + 1, j = pN + q + 1$$

جيث $m,p = 0,...,M-1$ و $n,q = 0,...,N-1.$

و الأن نضع :

$$D^{\alpha}f(x) = C^T H(x) \quad (60.4)$$

حيث C شعاع المجاهيل . بإستعمال مصفوفة العمليات الكسرية للتكامل نحصل على :

$$f(x) = C^T I^{\alpha} H(x) + \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \quad (61.4)$$

و يمكن كتابته على النحو التالي:

$$f(x) = D^T H(x) \quad (62.4)$$

حيث $D^T = C^T I^{\alpha} + C'^T$ مع C'^T يمثل شعاع معاملات تحليل التابع التالي : $\sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$ و فق أساس التابع جاكوبي المهجن بتابع القطع النبضية

بالنسبة للتابع الغير خطي $[f(x)]^q$ فإن تقريبه وفق أساس التابع المهجن يكون على النحو التالي :

$$[f(x)]^2 = D^T H(x) H^T(x) D \quad (63.4)$$
$$= D^T \tilde{D}.H(x) \quad (64.4)$$
$$= D_2^T H(x) \quad (65.4)$$

حيث $\tilde{D}$ مصفوفة العمليات الجداء بالنسبة للشعاع D. و كذلك:

$$[f(x)]^3 = D^T H(x) H^T(x) D_2 \quad (66.4)$$
$$= D^T \tilde{D}_2.H(x) \quad (67.4)$$
$$= D_3^T H(x) \quad (68.4)$$

و بصفة عامة من أجل قيمة q للأس لدينا :

$$[f(x)]^q = D^T H(x) H^T(x) D_{q-1} \quad (69.4)$$
$$= D^T \tilde{D}_{q-1}.H(x) \quad (70.4)$$
$$= D_q^T H(x) \quad (71.4)$$

حيث $\tilde{D}_{q-1}$ مصفوفة العمليات الجداء بالنسبة للشعاع D_{q-1} و بفرض أن : $[f(x)]^{q-1} = D_{q-1}^T H(x)$
نعوض تلك التقريبات في المسألة (54.4) فنحصل على :

$$C^T H(x) - \int_0^1 \left[H^T(x) K H(t)\right] \left[H^T(x) D_q\right] dt = G^T H(x) \quad (72.4)$$

و التي تكافئ المعادلة التالية:

$$H^T(x) C - H^T(x) K E D_q = H^T(x) G \quad (73.4)$$

حيث

$$E = \int_0^1 H(t) H^R(t) dt \quad (74.4)$$

و أخيرا نتحصل على جملة معادلات جبرية غير خطية على الشكل التالي :

$$C - K E D_q = G \quad (75.4)$$

حيث D_q يتشكل من معاملات الشعاع المجهول C
بإستعمال طرق معلومة كنيوتن يمكن حل الجملة (75.4) عدديا للحصول على معاملات الشعاع المجهول C.

4.3.4 تطبيقات عددية

مثال 1.3.4 لنعتبر معادلة فريدهولم التكاملية-التفاضلية الكسرية الغير خطية التالية : [101, 108]

$$D^{\alpha}f(x)-\int_0^1 xt\left[f(t)\right]^2dt=1-\frac{x}{4}, \tag{76.4}$$

من أجل $\alpha=1$, الحل العددي من أجل القيم $M=3$ و $N=1$ يساوي الحل الدقيق : $f(x)=x$.
الشكل (7.4) يظهر النتائج العددية من اجل $\alpha=0.8,0.9,0.95,1$. بالمقارنة نلاحظ أنه كلما α يقترب 1 الحل التقريبي كذلك يقترب أكثر من الحل الدقيق $f(x)=x$.
من اجل $\alpha=2$ الحل الدقيق هو $f(x)=0.5x^2-0.0355x^3$. الشكل (8.4) يمثل الحلول التقريبية من أجل $1.5\leq\alpha<2$.

مثال 2.3.4 لنعتبر معادلة فريدهولم التكاملية-التفاضلية الكسرية الغير خطية التالية : [101, 107]

$$D^{\frac{1}{2}}f(x)-\int_0^1 xt\left[f(t)\right]^4dt=g(x),\quad 0\leq x<1$$

و لنعتبر الشرط $f(0)=0$ و

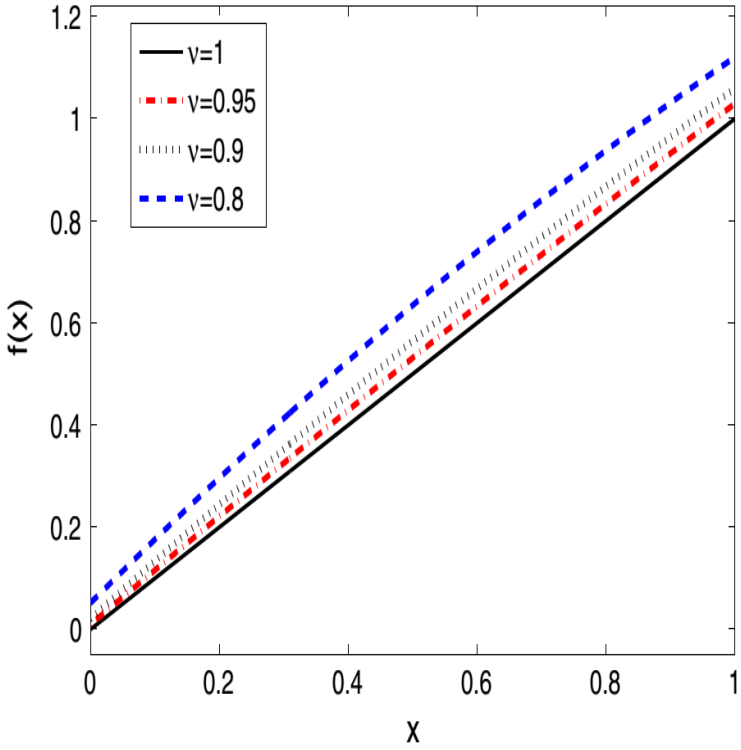
$$g(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{8}{3}\sqrt{x^2}-2\sqrt{x}\right)-\frac{x}{1260}$$

الشكلان (9.4) و (10.4) يظهران الحلول التقريبية تتفق مع الحل الدقيق للمسألة و هو : $f(x)=x^2-x$ من أجل القيم الصغيرة لكلا من M و N. وكذلك, الشكل (11.4) يبين الخطأ المطلق للتابع f على المجال $[0,1]$. نلاحظ أن في الطريقة المقترحة الحل التقربي يكون أكثر دقة و تطابقا مع الحل الدقيق كلما زادت قيمة كلا من M و N وخصيصا عند القيم $M=5$ و $N=2$.

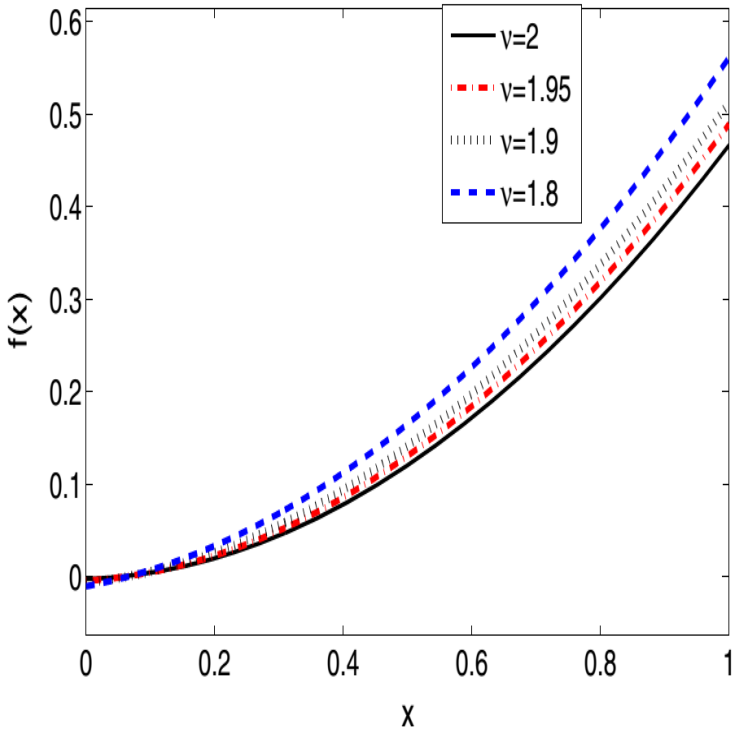
مثال 3.3.4 لنعتبر معادلة فريدهولم التكاملية-التفاضلية الكسرية الغير خطية التالية : [101, 108]

$$D^{\frac{5}{3}}f(x)-\int_0^1 (x+t)^2\left[f(t)\right]^3dt=g(x),\quad 0\leq x<1$$

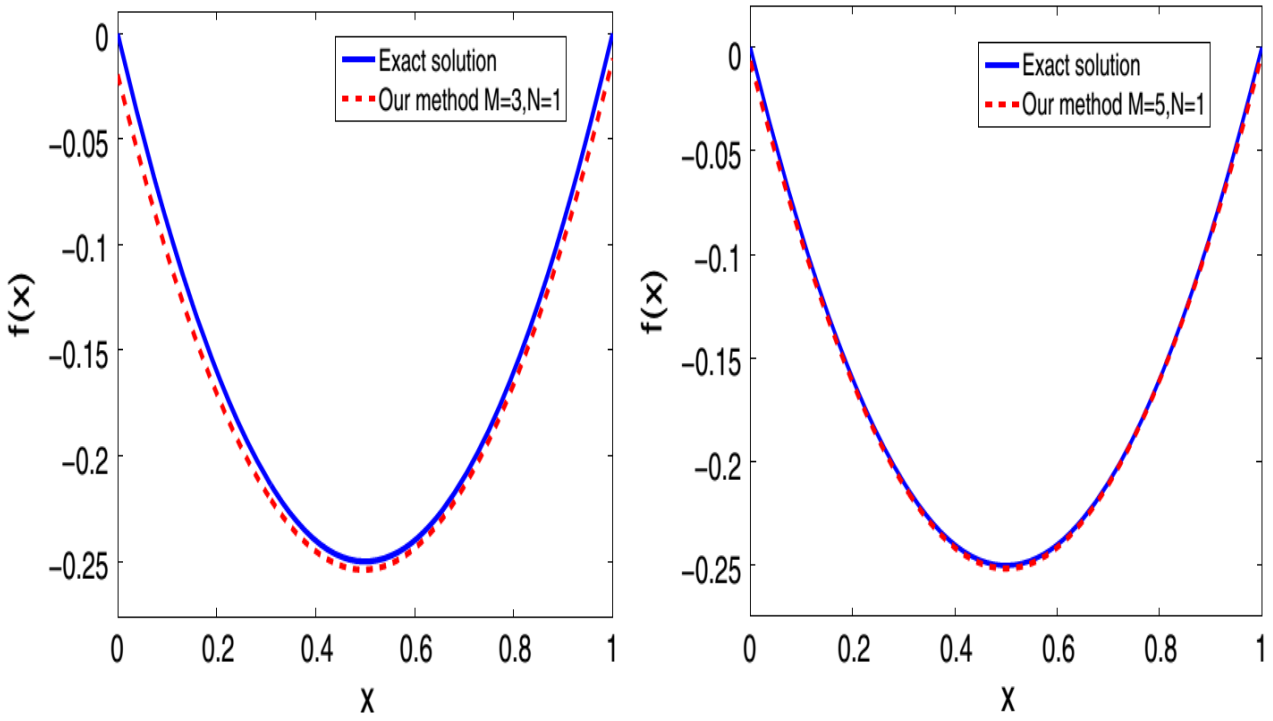
حيث $g(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\sqrt{x^3}-\frac{x^2}{7}-\frac{x}{4}-\frac{1}{9}$ و بإعتبار الشروط التالية : $f(0)=f'(0)=0$. الشكلان (12.4) و (13.4) يظهران النتائج العددية من أجل قيم مختلفة لكلا من M و N, و قيم مختلفة كذلك لـ α و β حيث الحل الدقيق للمسألة هو : $f(x)=x^2$. يمكن ملاحظة أن النتائج الحالية تتفق بشكل جيد مع الحل الحقيقي . و كما سبق الذكر في الفصل الأول أن من أجل $\alpha=\beta=0$ حالة خاصة و هي كثيرات حدود لوجندر LPs.



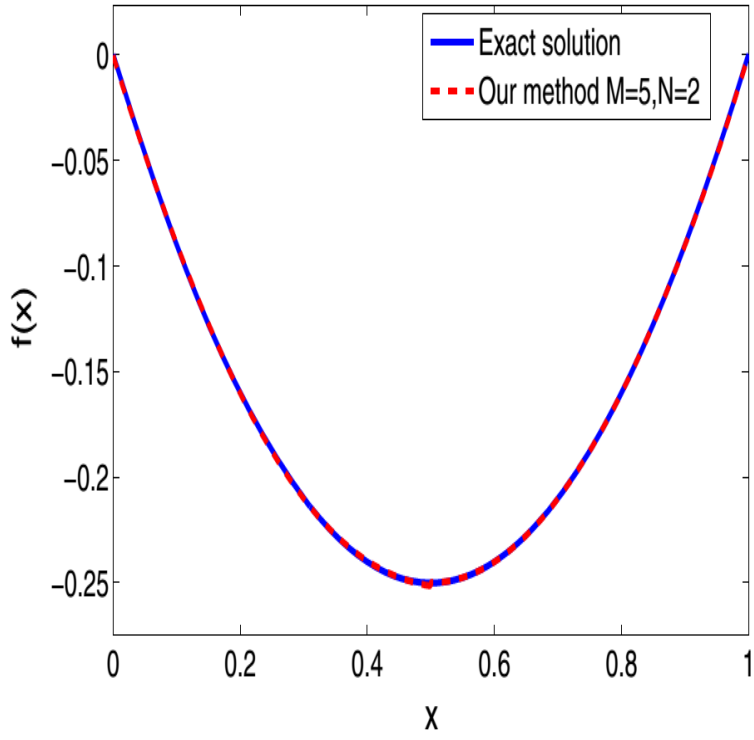
شكل 7.4: الحل التقريبي للمثال (1.3.4) من أجل $M = 3$; $N = 1$ و $0.5 \leq \alpha \leq 1$, $(\alpha = \beta = 1)$



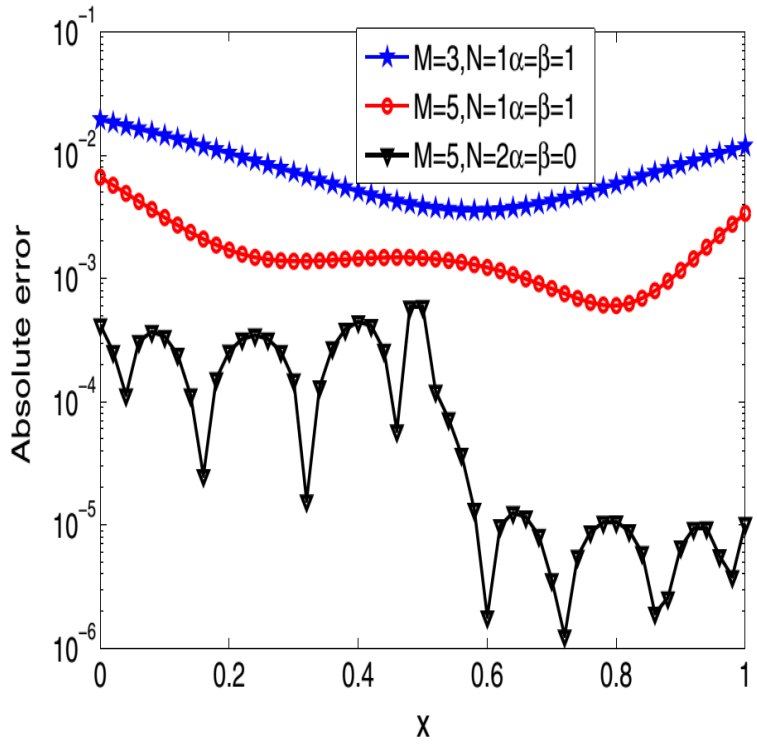
شكل 8.4: النتائج العددية للمثال (1.3.4) من أجل $M = 5$; $N = 1$ و $1.5 \leq \alpha \leq 2$, $(\alpha = \beta = 1)$



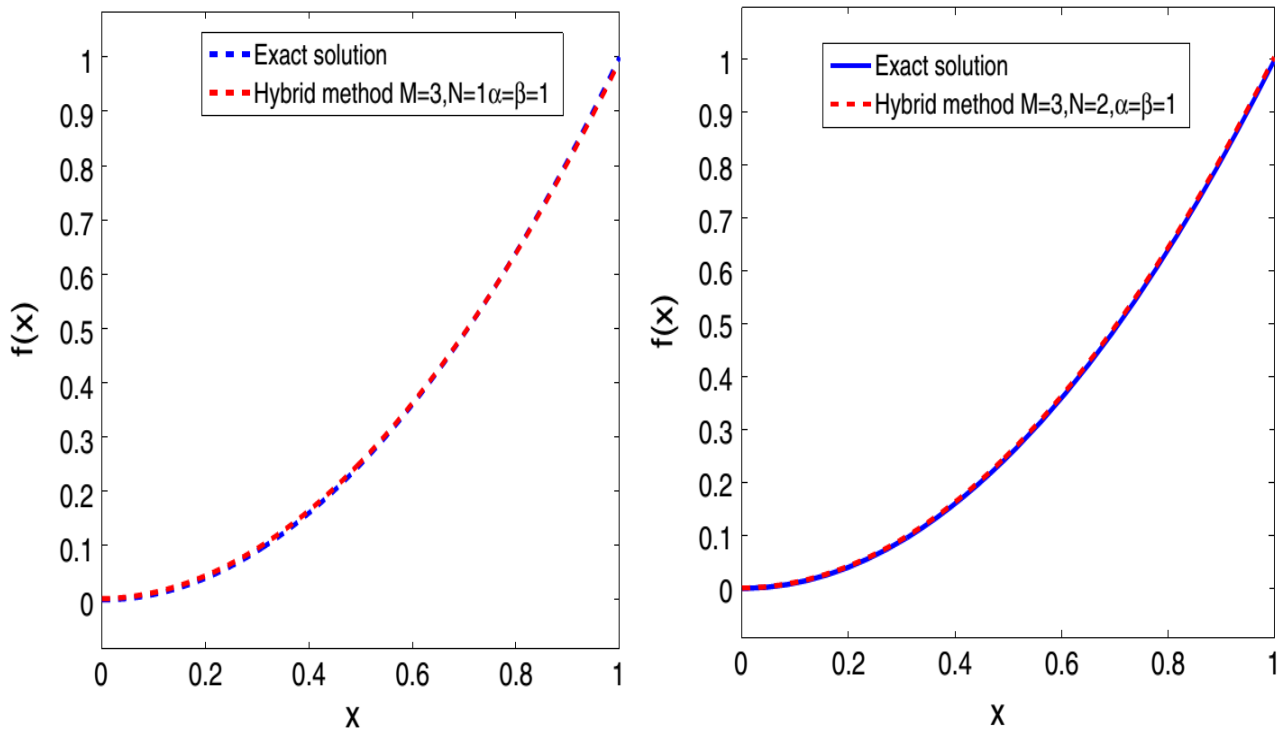
شكل 9.4: مقارنة بين الطريقة و الحل الدقيق للمثال (2.3.4) من أجل $(\alpha = \beta = 1)$



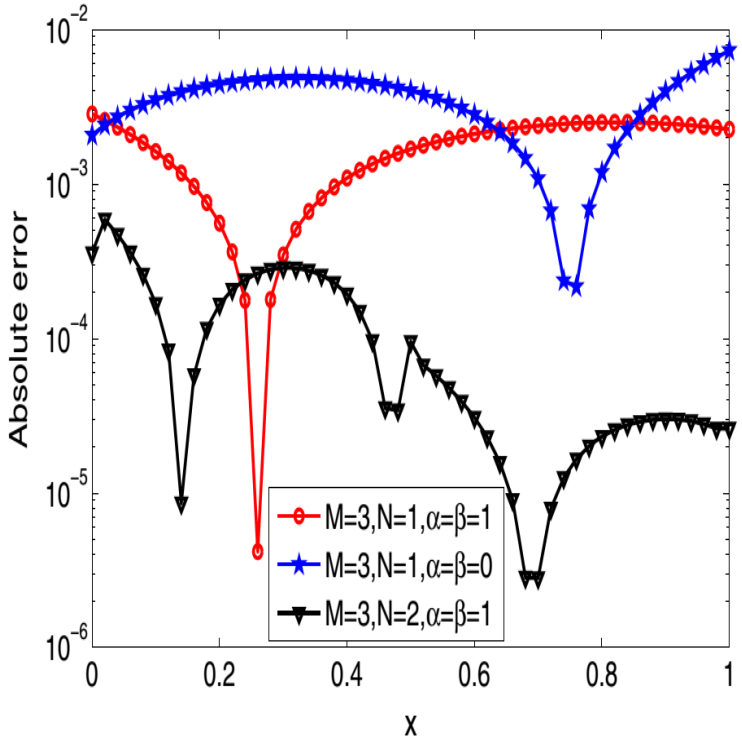
شكل 10.4: لنتائج العددية للمثال (2.3.4) من أجل $N = 2\ ;\ M = 5$ و $(\alpha = \beta = 0)$



شكل 11.4: الخطأ المطلق لـ f على $(0,1)$ للمثال (2.3.4)



شكل 12.4: النتائج العددية للمثال (3.3.4)



شكل 13.4: الخطأ المطلق لـ f على $(0,1)$ للمثال (3.3.4)

4.4 الاستنتاج

تناولنا في هذا الفصل طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية التكاملية الخطية و غير الخطية من رتب كسرية بالإعتماد على التقريب بمويجات لوجندر و كذلك بالتوابع المهجنة من تركيب دوال القطع النبضية مع كثيرات حدود جاكوبي . و تم بناء مصفوفات العمليات الكسرية للتكامل التي كانت دور فعال في تبسيط العبارات الواردة في المسائل . و بوضع مقارنة بين الطريقة المقترحة و بعض الطرق العددية الأخرى لاحظنا أن الحل التقريبي يقترب بسرعة نحو الحل الحقيقي كلما كان التكرار كبيرا ، حيث أظهرت النتائج العددية أن الطريقة المقدمة هي الأكثر كفاءة بالمقارنة مع بقية الطرق العددية الأخرى و ذلك بناءا على الأمثلة التي إستخدمناها. و هذا ما يجعلنا نستنتج انه يمكن تطبيق تلك الطرق على مسائل اخرى .

الخـاتمة

كما هو معلوم يهتم موضوع التحليل العددى و نظرية التقريب بتقديم الطرق التقريبية لحلول المسائل المصاغة رياضياتيا مثل المعادلات التكاملية-التفاضلية *IDEs* حيث أنه هناك العديد من الظواهر الطبيعية التى يمكن وصفها باستخدام هذه المعادلات . لذا كان الهدف الأساسى لهذه البحث تقديم و تطوير خوارزميات جديدة وفعالة و ذلك لإيجاد حلول أكثر دقة لتلك المعادلات و هو ما تم من خلال تقديم تقنيات فعالة في معالجة المعادلات التكاملية- التفاضلية من نوع القطع المكافئ بشروط غير محلية و كذا معادلة *Emden-Fowler* الشاذة بعد تحويلها الى *VIDEs* و أخيرا كان لنا دراسة لتقريب المعادلات التكاملية-التفاضلية الكسرية.
كل ذلك كان باستعمال التقريب بكثيرات الحدود و عن طريق انشاء مصفوفات العمليات التى كان دورها فعال في تبسيط العبارات , حيث أظهرت التطبيقات العددية المقترحة كفاءة عالية و دقة الطرق المقترحة . من خلال البحث توصلنا الى ان الممارسة المستمرة لحل المسائل بتلك الطرق تسهل كيفية إختيار الطريقة المناسبة لحل المسائل الرياضية , و إستعمال كثيرات الحدود في التقريب في حل المسائل يعطي أريحية في العمل لبساطة تركيبه و كذا عملية بناء و تطوير مصفوفات العمليات *OM* يذلل بشكل كبير الصعوبات في المعالجات العددية مما يشكل عملية انشاء مصفوفات العمليات *OM* موضوعا رائع لأبحاث جديدة.

رؤى مستقبلية :

في ضوء دراستنا للتقريب بكثيرات الحدود لبعض انواع المعادلات التكاملية- التفاضلية استخلصنا تفوق التقريب بكثيرات الحدود على طرق اخرى و خاصة عند بناء مصفوفات عمليات جديدة مناسبة مما يفتح الباب واسع لرؤى مستقبلية و تساؤلات يمكن ان تطرح كعناوين لابحات و دراسات جديدة و نلخص هذه الرؤى فيما يلي :

1. التوسع في دراسة مختلف انواع المعادلات التكاملية-التفاضلية ذات المتغيرين او اكثر بتقنيات مصفوفة العمليات و ذلك لبيان أهمية هذه المسائل.
2. التطرق الى استعمال انواع اخرى من كثيرات حدود في تلك المعالجات للمقارنة و بناء مصفوفات عمليات جديدة مناسبة للوصول الى ادق الحلول.
3. دراسة و التعمق في معالجة المعادلات التكاملية-التقاضلية من رتب كسرية باستعمال مصفوفات العمليات من رتب كسرية لكثيرات الحدود. وكذا إستعمال تلك التقنيات على مسائل أخرى قيد الدراسة.

المراجع العلمية

[1] *A. Bencheikh, L. Chiter, Tongxing Li. Solving parabolic integro-differential equations with purely nonlocal conditions by using the operational matrices of Bernstein polynomials . J. Nonlinear Sci. Appl., Volume 11, Issue 5, (2018),pp 624–634*
http://www.isr-publications.com/jnsa

[2] *A. Bencheikh, L. Chiter, H. Abbassi. Bernstein polynomials method for numerical solutions of integro-differential form of the singular Emden-Fowler initial value problems . J. Math. Computer Sci., 17 (2017), 66–75*
http://dx.doi.org/10.22436/jmcs.017.01.06

[3] *A. Bencheikh, L. Chiter, H. Abbassi. A New Operational Matrix of Orthonormal Bernstein Polynomials and Its Applications . Global Journal of Pure and Applied Mathematics 12 (5), 4219-4232, 2016*
http://www.ripublication.com/gjpam16/gjpamv12n5_27.pdf

[4] *S. A. Yousefi, M. Behroozifar, Operational matrices of Bernstein polynomials and their applications, I. J. Sys. Sci., 41(2010) ,709ñ716.*

[5] *T. J. Rivlin, An Introduction to the Approximation of Functions.Dover Publications, NewYork (1969)*

[6] *E. H. Doha, A. H. Bhrawy, M. A. Saker, Integrals of Bernstein polynomials: an application for the solution of high even-order di§erential equations. Appl. Math. Lett., 24 (2011), 559ñ 565.*

[7] *E. H. Doha, A. H. Bhrawy, M. A. Saker, On the derivatives of Bernstein polynomials: an application forthe solution of high even-order di§erential equations, Bound.Value Probl., (2011), doi: 10.1155/2011/829543. Article ID 829-543, p16*

[8] *K. Maleknejad, B. Basirat, E. Hashemizadeh, A Bernstein operational matrix approach for solving a system of high order linear Volterra-Fredholm integro-di§erential equations. Math. Comput. Model., 55 (2012),1363ñ1372.*

[9] *B. N. Mandal, S. Bhattacharya, Numerical solution of some classes of integral equations using Bernstein polynomials. Appl. Math. Comput., 190 (2007),707ñ716.*

[10] *M. I. Bhatti, P. Bracken, Solutions of di§erential equations in a Bernstein polynomial basis, J. Comput. Appl. Math., 205 (2007), 272ñ280*

[11] *T.S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, New York, 1978.*

[12] *E.H. Doha and A.H. Bhrawy, S. S. Ezz-Eldien, A new Jacobi operational matrix :an application for solving fractional differential equations, Appl. Math. Model. 36 (2012), no. 10, 4931–4943.*

[13] *J. Shen and T. Tang, High Order Numerical Methods and Algorithms, Chinese Science Press, Beijing, 2005.*

[14] *G. Szeg¨o, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Providence, RI, 1975.*

[15] *Mason, J.C., Handscomb, D.C.: Chebyshev Polynomials. Chapman and Hall/CRC, New York (2003)*

[16] *Fox, L., Parker, I.B.: Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis. Oxford University Press, London (1968)*

[17] *Rivlin, T.J.: An Introduction to the Approximation of Functions. Dover Publications, Inc., New York (1969)*

[18] *Davis, P.J.: Interpolation and Approximation. Dover Publications, New York (1963)*

[19] *Body, J.P.: Chebyshev and Fourier Spectral Methods. University of Michigan, New York (2000)*

[20] *S. Kazem, An integral operational matrix based on Jacobi polynomials for solving fractional-order differential equations, Appl. Math. Model. 37 (2013), no. 3, 1126–1136.*

[21] *E.H. Doha, A.H. Bhrawy and R.M. Hafez, On shifted Jacobi spectral method for high order multi-point boundary value problems, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 17 (2012), no. 10, 3802–3810.*

[22] *P. Kumar and O.P. Agrawal, An approximate method for numerical solution of fractional differential equations, Signal Process. 86 (2006), no. 10, 2602–2610.*

[23] *Chou E., "Wavelets, Approximation Theory, and Signal Processing", Güntürk, 2010.*

[24] *David F., "An Introduction to Wavelet Analysis", Birkhauser Boston. 1 st Ed, USA, 2002.*

[25] *Debnath L., "Wavelet Transforms and Their Applications" Birkhauser , 2002.*

[26] *Mallat S. , "A Wavelet Tour Of Signal Processing", Second Edition , USA, Elsevier, 1999.*

[27] *Mark A. Pinsky, "Introduction to Fourier Analysis and Wavelets", Wadsworth Group, 2002.*

[28] *Raghuveer M. Rao, Ajit S. Bopardikar, "Wavelet Transforms,Introduction to Theory and Applications", Addison Wesley Longman,Inc ,1998*

[29] *P. Linz, Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations, SIAM, Philadelphia, (1985).*

[30] *M.T.Rashed, Lagrange Interpolation to Compute The Numerical Solutions of Differential Integro-differential Equations, Applied Mathematics and Computation, 869- 878, 2004.*

[31] *M. T. Rashed, Numerical Solution of a Special Type of Integro-differential Equations, Applied Mathematics and Computation, 73-88, 2003.*

[32] *Y. Ordokhani and S. Davaei far, Application of the Bernstein polynomials for solving the nonlinear Fredholm integro-differential equations, Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics, vol. 1, no. 2, pp. 13–31, 2011.*

[33] *S. H. Behiry, H. Hashish, Wavelet methods for the numerical solution of Fredholm integro-differential equations, International Journal of Applied Mathematics, vol. 11, no. 1, pp. 27–35, 2002.*

[34] *S. H. Behiry, Solution of nonlinear Fredholm integro-differential equations using a hybrid of block pulse functions and normalized Bernstein polynomials, Journal of Computational and Applied Mathematics, 260 (2014) 258-265.*

[35] *P. Linz, A simple approximation method for solving Volterra integro-differential equations of the first kind, J. Inst. Maths. Applics., 14 (1974) 211–215.*

[36] *A.Yildirim, N.Sahin, S.Yüzbasi, A collocation approach for solving high-order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations, Mathematical and Computer Modelling, 547-563, 2012.*

[37] *M. Sezer, S. Yalçinbas, A Taylor collocation method for the approximate solution of general linear Fredholm-Volterra integro-differential equations with mixed argument, Applied Mathematics and Computation, 675-690, 2006.*

[38] *P. Linz, A general theory of the approximate solution of operator equations of the second kind, SIAM Journal on Numerical Analysis, 543-554, 1977.*

[39] S. YouseÖ, M. Behroozifar, Operational matrices of Bernstein polynomials and their applications, Int. J. Syst. Sci.41, 709-716, 2010.

[40] I. Lazaro , J. Anzurez , M. Roman M, Parameter estimation of linear systems based on walsh series, The Electronics,Robotics and Automotive Mechanics Conference, 355-360, 2009.

[41] A. Deb, A. Dasgupta, G.Sarkar, A new set of orthogonal functions and its application to the analysis of dynamic systems, J.Frank. Inst. 343, 1-26, 2006.

[42] X. T. Wang, Numerical solutions of optimal control for time delay systems by hybrid of block-pulse functions and Legendre polynomials Applied Mathematics and Computation, 184, 849-856, 2007.

[43] Z. H. Jiang, W. Schaufelberger, Block Pulse Functions and Their Applications in Control Systems, Springer-Verlag, 1992.

[44] M. H. Farahi, M. Dadkhah, Solving Nonlinear Time Delay Control Systems by Fourier series, Int. Journal of Engineering Research and Applications, Vol. 4, Issue 6 , 217-226, 2014

[45] F. C.Kung, and H. Lee, Solution and parameter estimation of linear timeinvariant delay systems using Laguerre polynomial expansion, Journal on Dynamic Systems, Measurement, and Control, 297-301, 1983.

[46] F. Marcellan, and W.V. Assche, Orthogonal Polynomials and Special Functions (a Computation and Applications), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[47] F. Khellat, S. A. YouseÖ, The linear Legendre wavelets operational matrix of integration and its application, J. Frank. Inst. 343, 181-190, 2006.

[48] H. R. Marzban and M. Shahsiah, Solution of piecewise constant delay systems using hybrid of block- pulse and Chebyshev polynomials, Optim. Contr. Appl. Met., Vol. 32, pp.647-659, 2011.

[49] *M. Razzaghi, M. Razzaghi, Fourier series direct method for variational problems, I. J. Control 48 (1988) 887-895.*

[50] *A. Richard . A. Bernatz. Fourier series and numerical methods for partial de§erential equations. John Wiley Sons, Inc., New York, 2010.*

[51] *M. Shaban and S. Kazem and J. A. Rad, A modiÖcation of the homotopy analysis method based on Chebyshev operational matrices, Math. Comput. Model, in press.2013.*

[52] *S. YouseÖ , Legendre wavelets method for solving di erential equations of LaneEmden type, Appl. Math. Comput. 181 (2006) 1417-1422.*

[53] *Michael, A, Bellucci: On the explicit representation of shifted orthonormal Bernstein polynomials. ArXiv Preprint arXiv, (2014), 1404–2293.*

[54] *A. M. Wazwaz, Adomian decomposition method for a reliable treatment of the EmdenñFowler equation, Appl.Math.Comput.161 543ñ560.2005.*

[55] *G. Avalishvili, M. Avalishvili, and D. Gordeziani, On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations, Bulletion of the Georegian National Academy of Sciences, 5(1) (2011), 31–37.*

[56] *G. Avalishvili, M. Avalishvili, and D. Gordeziani, On a nonlocal problem with integral boundary conditions for a multidimensional elliptic equation, Applied Mathematics Letters, 24(4) (2011), 566–571.*

[57] *A. Ashyralyev and F.S.O. Tetikoglu, FDM for elliptic equations with Bitsadze-Samarskii-Dirichlet conditions, Abstract Applied Analysis, 2012 (2013), 1–22. 1*

[58] *G. Berikelashvili and N. Khomeriki, On the convergence of difference schemes for one non-local boundary-value problem. Lithuanian Mathematical Journal, 52(4) (2012), 353–362*

[59] *G. Berikelashvili and N. Khomeriki, On a numerical solution of one nonlocal boundary value problem with mixed Dirichlet-Neumann conditions. Lithuanian Mathematical Journal, 53(4)(2013), 367–380.*

[60] *A. Borhanifar, S. Shahmorad, E. Feizi, A matrix formulated algorithm for solving parabolic equations with nonlocal boundary conditions. Numerical Algorithms, 74(4) (2017), 1203–1221.*

[61] *A. Bouziani, R. Mechri, The Rothe Method to a Parabolic Integrodifferential Equation with a Nonclassical Boundary Conditions. Int. Jour. of Stochastic Analysis, Article ID 519684, (2010), 16 pages. (2010)*

[62] *Y. Liu, Numerical solution of the heat equation with nonlocal boundary conditions. Journal of Computational and Applied Mathematics, 110 (1999), 115–127.*

[63] *E. Tohidi, A. Kılıc¸man, An efficient spectral approximation for solving several types of farabolic PDEs with nonlocal boundary conditions. Mathematical Problems in Engineering, 2014, Article ID 369029, 6 pages (2014), Hindawi Publishing Corporation*

[64] *A. Ashyralyev and O. Yildirim, A note on the second order of accuracy stable difference schemes for the nonlocal boundary value hyperbolic problem, Abstract Applied Analysis, 2012 (2012), 1– 29*

[65] *A. Bouziani, Solution forte d'un probl'eme mixte avec une condition non locale pour une classe d'´equations hyperboliques [Strong solution of a mixed problem with a nonlocal condition for a class of hyperbolic equations. Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci, 8 (1997),53–70*

[66] *S. Mesloub, A. Bouziani, Mixed problem with integral conditions for a certain class of hyperbolic equations. Journal of Applied Mathematics 1(3) (2001), 107–116*

[67] *H. Qin, C. Zhang, T. Li, Y. Chen, Controllability of abstract fractional differential evolution equations with nonlocal conditions. J. Math. Computer Sci, 17 (2017), 293–300*

[68] *A. Merad, A. Bouziani, C. Ozel, Inversion Laplace transform for integrodifferential parabolic equation with purely nonlocal conditions. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 44(5) (2015), 1087–1097.*

[69] *. Merad, J. Martn-Vaquero, A Galerkin method for two-dimensional hyperbolic integro-differential equation with purely integralconditions. Applied Mathematics and Computation, 291 (2016), 386–394.*

[70] *H. T. Davis, Introduction to Nonlinear Di§erential and Integral Equations, Dover, New York (1962).*

[71] *A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, Handbook of exact solutions for ordinary di§erential equations, CRC Press, NewYork (1999).*

[72] *S. Chandrasekhar, Introduction to the study of stellar structure, Dover, NewYork (1967).*

[73] *B. N. Mandal, S. Bhattacharya, Numerical solution of some classes of integral equations using Bernstein polynomials. Appl. Math. Comput., 190 (2007),707ñ716.*

[74] *O. U. Richardson, The Emission of Electricity from Hot Bodies, London,NewYork (1921).*

[75] *Z. Smarda, Y. Khan, ˇ An efficient computational approach to solving singular initial value problems for Lane-Emden type equations, J. Comput. Appl. Math., 290 (2015), 65–73.*

[76] *A. M. Wazwaz, A new method for solving singular initial value problems in the second-order ordinary differential equations, Appl. Math. Comput., 128 (2002), 45–57.*

[77] *A. M. Wazwaz, A new method for solving singular initial value problems in the second order ordinary di§erential equations, Applied mathematics and Computation., 28 (2002), 45-47*

[78] *A. M. Wazwaz, Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Emden-Fowler equation, Applied Mathematics and Computation., 161 (2005), 543-560*

[79] *S. A. YouseÖ, Legendre Scaling function for solving generalized Emden-Fowler Equations, Int. J. of information and system sciences., 2 (2007), 243-250.*

[80] *A. M. Wazwaz, Analytical solution for the time-dependent Emden–Fowler type of equations by Adomian decomposition method, Appl. Math. Comput. 166 (2005) 638– 651*

[81] *O. U. Richardson, The Emission of Electricity from Hot Bodies (Longman, Green and Co., London, New York, 1921).*

[82] *Y. Khan, Z. Svoboda and Z. Smarda, Solving certain classes of Lane–Emden type equations using the differential transformation method, Adv. Diff. Equ. 2012(174) (2012), doi: 10.1186/1687-1847-2012-174.*

[83] *K. Parand, M. Shahini and M. Dehghan, Rational Legendre pseudospectral approach for solving nonlinear differential equations of Lane–Emden type, J. Comput. Phys. 228 (2009) 8830–8840.*

[84] *S. Chandrasekhar, Introduction to the Study of Stellar Structure (Dover, New York, 1967)*

[85] *H. T. Davis, Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations (Dover, New York, 1962).*

[86] *H. Aminikhah and S. Moradian, Numerical solution of singular Lane–Emden equation, ISRN Math. Phys. 2013 (2013), Article ID: 507145, 9 pp.*

[87] *. M. Wazwaz, A new method for solving singular initial value problems in the secondorder ordinary differential equations, Appl. Math. Comput. 128 (2002) 45–57.*

[88] *A. Yildirim and T. Ozis, Solutions of singular IVPs of Lane–Emden type by homotopy perturbation method, Phys. Lett. A. 369 (2007) 70–76.*

[89] *E. H. Doha, W. M. Abd-Elhameed and Y. H. Youssri, Second kind Chebyshev operational matrix for solving differential equations of Lane–Emden type, New Astron. 23–24 (2013) 113–117.*

[90] *A. M. Wazwaz, The variational iteration method for solving the Volterra integrodifferential forms of the Lane–Emden equations of the first and the second kind, J. Math. Chem. 52(2) (2014) 613–626.*

[91] *P. K. Sahu and S. Saha Ray, Numerical solutions for Volterra integro-differential forms of Lane–Emden equations of first and second kind using Legendre multi-wavelets, Electron. J. Diff. Equ. 2015(28) (2015) 1–11*

[92] *P. K. Sahu and S. Saha Ray, "Chebyshev wavelet method for numerical solutions of integro-differential form of Lane-Emden type differential equations.International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing Vol. 15, No. 2 (2017) 1750015 (16 pages)*

[93] *Meng, Z, Wang, L, Li, H, Zhang, W: Legendre wavelets method for solving fractional integro-differential equations. Int. J. Comput. Math. 92 , 1275-1291 (2015)*

[94] *I.L. EI-Kalla, Convergence of the Adomian method applied to a class of nonlinear integral equations, Appl. Math. Comput. 21 (2008), pp. 372–376.*

[95] *M.M. Hosseini, Adomian decomposition method for solution of nonlinear differential algebraic equations, Appl. Math. Comput. 181 (2006), pp. 1737–1744.*

[96] *H. Jafari and S.A. Yousefi, Application of Legendre wavelets for solving fractional differential equations, Comput. Math. Appl. 62(3) (2011), pp. 1038–1045.*

[97] *Y.M. Chen, M.X. Yi, and C.X. Yu, Error analysis for numerical solution of fractional differential equation by Haar wavelets method, J. Comput. Sci. 5(3) (2012), pp. 367–373.*

[98] *Y.L. Li and N. Sun, Numerical solution of fractional differential equations using the generalized block pulse operational matrix, Comput. Math. Appl. 62 (2011), pp. 1046–1054.*

[99] *M. ur Rehman and R.Ali Khan,The Legendre wavelet method for solving fractional differential equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 16 (2011), pp. 4163–4173.*

[100] *J.L. Wu, A wavelet operational method for solving fractional partial differential equations numerically, Appl. Math. Comput. 214 (2009), pp. 31–40.*

[101] *F. Yousefi. A. Rivaz . W. Chen. The construction of operational matrix of fractional integration for solving fractional differential and integro-differential equations. Comput Applic (2017).pp 1–12.*

[102] *Heydari MH, Hooshmandasl MR, Mohammadi F, Cattani C (2014) Wavelets method for solving systems of nonlinear singular fractional Volterra integro-differential equations. Commun Nonlinear Sci Numer Simul 19(1):37–48.*

[103] *Kazem S (2013) An integral operational matrix based on Jacobi polynomials for solving fractional-order differential equations. Appl Math Model 37(3):1126–1136.*

[104] *Atabakzadeh MH, Akrami MH, Erjaee GH (2013) Chebyshev operational matrix method for solving multi-order fractional ordinary differential equations. Appl Math Model 37(20):8903–8911.*

[105] *Kilicman A, Al Zhour ZAA (2007) Kronecker operational matrices for fractional calculus and some applications. Appl Math Comput 187(1):250–265.*

[106] *Keshavarz E, Ordokhani Y, Razzaghi M (2014) Bernoulli wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations. Appl Math Model 38(24):6038–6051.*

[107] *Zhu L, Fan Q (2013) Numerical solution of nonlinear fractionalorder Volterra integro-differential equations by SCW. Commun Nonlinear Sci Numer Simul 18(5):1203–1213.*

[108] *Saeedi H, Moghadam MM, Mollahasani N, Chuev GN (2011) A CAS wavelet method for solving nonlinear Fredholm integrodiffer-*

ential equations of fractional order. Commun Nonlinear Sci Numer Simul 16(3):1154–1163.

[109] Saadatmandi A, Dehghan M (2010) A new operational matrix for solving fractional-order differential equations. Comput Math Appl 59(3):1326–1336.

[110] Yi M, Huang J (2014) Wavelet operational matrix method for solving fractional differential equations with variable coefficients. Appl Math Comput 230:383–394.

[111] Jiang Z, Schoufelberger W, Thoma M, Wyner A (1992) Block pulse functions and their applications in control systems. Springer, New York