الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis

in Mathematics

Option : Optimization and Control

Theme :

New Three-Term Conjugate Gradient Method Based on WFR Variant with Practical Applications

Presented by

Mr. Soheyb LAIB and Mr. Tahar LABIDI

Supervisor: Dr. Samia KHELLADI

Thesis defended on June 21, 2026, in front of the jury composed of:

Ms.	Samia KETTAB	Dr.	Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Ms.	Samia KHELLADI	Dr.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Supervisor
Ms.	Soraya CHAGHOUB	Dr.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner

2025/2026

Contents

Introduction **3**

1 Fundamental concepts for unconstrained optimization **5**

1.1 Unconstrained nonlinear optimization 5

1.1.1 Preliminary concepts 5

1.1.2 The results of existence and uniqueness 8

1.1.3 Optimality conditions 10

1.2 Descent methods 11

1.2.1 The principle of descent methods 11

1.2.2 Gradient method 12

1.2.3 Newton Method 15

1.2.4 Quasi-Newton methods 17

1.2.5 Relaxation method 20

2 Line search techniques and conjugate gradient method **23**

2.1 Line search methods 23

2.1.1 The line search principle 23

2.1.2 Exact line search 24

2.1.3 Inexact line search 25

2.2 Conjugate gradient methods 30

2.2.1 Conjugate gradient method for the linear case 31

2.2.2 Conjugate gradient method for the nonlinear case 34
2.3 Convergence results of the conjugate gradient method 36
2.3.1 Conditions C1 and C2 and Zoutendijk's Theorem 37
2.3.2 Zoutendijk's Theorem and global convergence 38

3 A Novel three-term conjugate gradient method based on WFR variant 40
3.1 New three-term descent direction of WFR approach 41
3.2 The sufficient descent property and global convergence 45
3.3 Numerical experiments 46
3.3.1 Standard theoretical tests problems 46
3.3.2 Image restoration 49
3.3.3 Sparse signal recovery 53
3.3.4 Commentaries 55

Conclusion 56

Bibliography 58

ملخص

تُعدّ طريقة التدرج المرافق من أكثر الطرق استخدامًا في حل مسائل التحسين غير المقيدة واسعة النطاق، وذلك لما تتميز به من كفاءة عالية من حيث عدد التكرارات وزمن الحساب.
في هذه المذكرة، نقترح طريقة تدرج مرافق ثلاثية الحدود معدلة مستوحاة من معامل فليتشر–ريفز، حيث يتم تقديم اتجاه تناقص جديد يهدف إلى تحسين الأداء العددي للخوارزمية.
أُجريت تجارب عددية على مجموعة من مسائل التحسين غير المقيدة الكلاسيكية، بالإضافة إلى تطبيقات عملية تشمل استعادة الصور واستعادة الإشارات المتفرقة. وقد أظهرت النتائج كفاءة ومتانة الطريقة المقترحة مقارنةً ببعض الخوارزميات المعروفة.

الكلمات المفتاحية: الأمثلة غير الخطية غير المقيدة، طريقة التدرج المرافق، اتجاه التناقص، التقارب الإجمالي، البحث الخطي غير الدقيق.

Résumé

La méthode du gradient conjugué est largement utilisée pour l'optimisation sans contraintes à grande échelle en raison de son efficacité en termes de nombre d'itérations et de temps de calcul.
Dans ce mémoire, nous proposons une méthode du gradient conjugué à trois termes, inspirée de l'approche de Fletcher-Reeves, dans laquelle nous introduisons une nouvelle direction de descente.
Nous avons mené des tests numériques sur des problèmes classiques d'optimisation sans contraintes et sur des applications pratiques, notamment la restauration d'image et la récupération de signaux clairsemés.
Les résultats confirment l'efficacité et la robustesse de l'approche proposée comparée par rapport à certains algorithmes existants.

Mots clés : Optimisation non linéaire sans contraintes, Méthode de gradient conjugué, Direction de descente, Convergence globale, Recherche linéaire inexacte.

Abstract

The conjugate gradient method is widely used for large-scale unconstrained optimization due to its efficiency in iteration number and computing time.
In this dissertation, we propose a new three-term conjugate gradient method inspired from the Fletcher–Reeves approach, where we introduce a novel descent direction.
We conduct the numerical experiments on classical unconstrained optimization problems and on practical applications including the image restoration and sparse signal recovery problems.
The results confirm the efficiency and robustness of the proposed approach compared to some existing algorithms.

Key words: Nonlinear unconstrained optimization, Conjugate gradient method, Descent direction, Global convergence, Inexact line search.