الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis

in Mathematics

Option: Algebra and Geometry

Theme:

On the Irrationality Measure of log 3

Presented by

Ms. **Zahra Medjmadj**

Supervisor: **Dr. Abderraouf Bouchelaghem**

Thesis defended on June 24, 2026, in front of the jury composed of:

Mr.	Nadir Trabelsi	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Mr.	Abderraouf Bouchelaghem	Dr.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Supervisor
Ms.	Amel Dilmi	Dr.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner

2025/2026

Table of Contents

Acknowledments **II**

Notation **III**

Chapter 1 General introduction **1**

Chapter 2 Background and related work **5**

2.1 Background 5

2.1.1 Algebraic Numbers 5

2.1.2 Algebraic Integers 6

2.1.3 Transcendent Numbers and Liouville's Theorem 7

2.2 Previous results 8

2.2.1 The irrationality measure of $\log\left(1-\frac{r}{s}\right)$ 9

2.2.2 On the linear independence measure of multiple logarithms of rational numbers 10

Chapter 3 On the Irrationality Measure of $\log 3$ **14**

3.1 Introduction 14

3.2 preliminaries 15

3.3 The linear independence measure of $1,\ \log\frac{3}{2},\ \log\frac{4}{3}$ 25

3.4 On the Irrationality Measure of $\log 3$ 27

Résumé

Dans ce travail, nous passons en revue le résultat décisif établi par V. Kh. Salikhov concernant les Propriétés arithmétiques des logarithmes. Salikhov a établi une nouvelle borne supérieure, Significativement améliorée, pour la mesure d'irrationalité de log 3. En appliquant une construction Intégrale modifiée basée sur la méthode de Hata, Salikhov a réussi à réduire la borne précédente $\mu(\log 3) \leq 8.616$ obtenue par Rhin à $\mu(\log 3) \leq 5.125$. La preuve repose sur une analyse détaillée d'approximations Rationnelles spécifiques et des propriétés structurelles de l'intégrande associé.

Mots -Clés : mesure d'irrationalité, mesure d'indépendance linéaire, représentations rationnelles des Nombres réels.

Classification AMS 2020 : 11J82; 11J86.

Abstract

In this work, we review the breakthrough result established by V.Kh. Salikhov regarding the arithmetic properties of logarithms. Salikhov established a new, significantly improved upper bound for the irrationality measure of log3. By applying a modified integral construction based on Hata s method, Salikhov succeeded in reducing the previous bound $\mu(\log 3) \leq 8.616$ obtained by Rhin to $\mu(\log 3) \leq 5.125$ The proof relies on a detailed analysis of specific rational approximations and the structural decomposition properties of the associated integrand.

Keywords: irrationality measure, linear independence measure, rational representations of the real numbers.

AMS 2020 Classification: 11J82; 11J86.

الملخص

نستعرض في هذا العمل النتيجة الاختراقية التي توصل إليها ف. خ. ساليخوف فيما يتعلق بالخواص الحسابية للمقادير اللوغاريتمية. حيث وضع ساليخوف حدًا أعلى جديدًا ومحسنًا بشكل ملحوظ لمقياس اللارشدية لـ log 3. ومن خلال تطبيق بناء تكاملي معدل يعتمد على طريقة هاتا، نجح ساليخوف في تخفيض الحد السابق $\mu(\log 3) \leq 8.616$ الذي حصل عليه راين إلى $\mu(\log 3) \leq 5.125$. يعتمد البرهان على تحليل مفصل لتقريبات نسبية محددة والخواص البنيوية للدالة المتكاملة المصاحبة.

الكلمات المفتاحية: مقياس اللارشدية، مقياس الاستقلال الخطي، التمثيلات النسبية للأعداد الحقيقية.

تصنيف الجمعية الأمريكية للرياضيات 2020: 11J82; 11J86.