الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis

in Mathematics

Option : Applied Mathematics

Theme :

MATHEMATICAL ANALYSIS OF THERMO-ELASTO-VISCOPLASTIC CONTACT PROBLEMS WITH TIME-FRACTIONAL DERIVATIVES

Presented by

Mr. **Ibrahim KHELFAOUI**

Supervisor: **Pr. Lebri Nemira**

Thesis defended on June 21, 2026, in front of the jury composed of:

Ms.	Nadjet BENSEBAA	Dr.	Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Ms.	Nemira LEBRI	Pr.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Supervisor
Mr.	Rachid CHOUGUI	Dr.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner

2025/2026

Contents

Introduction 2

1 Modeling and mathematical tools 7
1.1 Modeling 8
1.1.1 Physical framework 8
1.1.2 Constitutive Laws 9
1.1.3 Boundary conditions 10
1.1.3.1 The displacement and traction boundary conditions 10
1.1.3.2 Contact and Thermal Conditions on Γ_3 10
1.2 Mathematical tools 11
1.2.1 Sobolev space 11
1.2.2 Spaces of vector-valued functions 13
1.2.3 Review of nonlinear analysis in Hilbert spaces 14
1.2.3.1 Strongly monotone operator 15
1.2.4 Gronwall-type lemmas 16
1.2.5 Fractional Calculus 18
1.2.6 Nonsmooth Analysis 19
1.2.6.1 Abstract Fractional Hemivariational Inequality 19
1.2.7 The Galerkin Method 20

2 Mathematical Analysis of Thermo-Elasto-Viscoplastic Contact Problems 22
2.1 The Mathematical Model 23
2.2 Variational Formulation 24
2.3 Existence and uniqueness result 28

General Conclusion 43

الملخص

تعنى هذه المذكرة بدراسة النمذجة الرياضية لمسائل التلامس للمواد الحرارية المرنة اللزجة اللدنة، مع التركيز بصفة خاصة على إدراج مشتقات كابوتو الكسرية في قوانينها الأساسية. ويتمثل الهدف الرئيسي من هذا العمل في إثبات وجود الحلول الضعيفة ووحدانيتها لهذه النماذج، وذلك باستخدام مترابحات من نوع غرونوول ونتائج من حقل التحليل غير الخطي. تتألف المذكرة من قسمين: يستعرض القسم الأول جملةً من النماذج الميكانيكية للتلامس، ويقدّم الأدوات الرياضية اللازمة. أما القسم الثاني، فيتمحور حول النمذجة والتحليل الرياضي لمسائل التلامس المدروسة.

الكلمات المفتاحية: المواد المرنة-اللزجة-اللدنة حرارياً ، مشتقة كابوتو الكسرية، المتباينات التغيرية التطورية، مسائل التماس ، فضاءات سوبوليف.

Abstract

This thesis is devoted to the mathematical modeling of contact problems for thermo-elastic viscoplastic materials, with particular emphasis on the incorporation of Caputo fractional-order derivatives into their constitutive laws. The primary objective of this work is to establish the existence and uniqueness of weak solutions to these models, by means of Gronwall-type lemmas and results from nonlinear analysis. The thesis is structured in two parts: The first part recalls various contact mechanical model and presents the necessary mathematical tools. The second part focuses on the modeling and mathematical analysis of the considered contact problems.

***Key-words**: Thermo-elastic-viscoplastic materials, Caputo fractional derivative, evolutionary variational inequalities, contact problems, Sobolev spaces.*

Résumé

Cette mémoire est consacrée à l'étude de la modélisation mathématique des problèmes de contact pour les matériaux thermo-élasto-viscoplastiques, en mettant particulièrement l'accent sur l'incorporation des dérivées fractionnaires de Caputo dans leurs lois de comportement. L'objectif principal de ce travail est d'établir l'existence et l'unicité des solutions faibles de ces modèles, au moyen de lemmes de type Gronwall et de résultats issus de l'analyse non linéaire. Ce mémoire est structuré en deux parties : La première partie rappelle différents modèles mécaniques de contact et présente les outils mathématiques nécessaires. La seconde partie est consacrée à la modélisation et à l'analyse mathématique des problèmes de contact considérés.

***Mots clés** : Matériaux thermo-élasto-viscoplastiques, dérivée fractionnaires de Caputo, inéquations variationnelles d'évolution, problèmes de contact, espaces de Sobolev.*