الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية وزارة التعليم
العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis

in Mathematics

Option : Optimization and Control

Theme :

THE GRADIENT PROJECTION METHOD FOR SOLVING OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

Presented by

Bouadjadja Amani **Amrane Hadil**

Supervisor: **Dr. Saffidine Rebiha**

Thesis defended on June 13, 2026, in front of the jury composed of:

Ms.	**Grar Hassina**	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Ms.	**Saffidine Rebiha**	Dr.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Supervisor
Ms.	**Kebaili Zahira**	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner

2025/2026

Table of Contents

Introduction ii

1 Mathematical Background 4
1.1 Convex Analysis 4
1.1.1 Convex Sets 4
1.1.2 Convex Functions 5
1.2 Unconstrained Optimization 6
1.3 Gradient Method 9
1.3.1 Basic Gradient Algorithm 9
1.3.2 Fixed-Step Gradient Method 10
1.3.3 Optimal-Step Gradient Method 11
1.3.4 Variable-Step Gradient Method 11
1.3.5 Convergence of Gradient Method 12
1.4 Constrained Optimization 13
1.4.1 Existence and Uniqueness Results 13
1.4.2 Lagrangian of the Problem 14
1.4.3 Optimality Conditions 14
1.5 Gradient Projection Method 16
1.5.1 Gradient Projection Algorithm 16
1.5.2 Convergence of the Gradient Projection Method 17
1.6 Optimisation in Infinite Dimensional Hilbert Spaces 17
1.6.1 Preliminaries 17
1.6.2 Existence of Solutions 19
1.6.3 Gradient Projection Method in Hilbert Spaces 19

2 Optimal Control Problem 21
2.1 Basic Concepts of Optimal Control Theory 21
2.1.1 Optimal Control Problem 21
2.1.2 Equivalent Formulations 22
2.2 Existence of an Optimal Solution 25
2.3 Necessary Condition of Optimality 26
2.3.1 Pontryagin Maximum Principle 26
2.3.2 Linear Quadratic Optimal Control Problem 28
2.3.3 Existence of an Optimal Control 33

3 A Gradient Projection Method for Solving Optimal Control Problems 39
3.1 Statement of Problem 39
3.2 Gradient Projection Method 41
3.3 Convergence analysis 42
3.4 Numerical Results 46

Conclusion 52

Bibliography 52

ملخص :

تتمحور هذه المذكرة حول دراسة صنف من مسائل التحكم الأمثل وتحليلها مع تسليط الضوء بشكل خاص على تطبيق طريقة اسقاط التدرج كخوارزمية عددية تكرارية لحل هذه الفئة من المسائل المعقدة وتركز هذه الدراسة بشكل محوري على الطرق غير مباشرة التي تستمد قوتها من مبدا بونترياغين الذي يمثل شرط ضروري حيث تستخدم طريقة اسقاط التدرج كاداة عددية قوية تحت شروط ووفرضيات معينة تتحققها الدالة الهدف ودالة الحالة للحصول على سرعة تقارب معينة حول الحل الأمثل لمتتالية التحكم

في نهاية الاطروحة عززنا دراستنا بامثلة تبين فعالية هذه الطريقة .

الكلمات المفتاحية :التحكم الأمثل - مبدا بونترياغين – طريقة اسقاط التدرج .

Abstract :

A study on a class of optimal control problems and their analysis with [an emphasis/focus] on applying the projected gradient method as an iterative numerical algorithm [for solving] complex problems. This study focuses pivotally on [drawing] its strength from Pontryagin's principle, which represents a necessary condition, [utilizing it] as a powerful numerical tool under specific conditions and assumptions to achieve a certain convergence rate toward the optimal solution for...

... We have supported our study with examples that demonstrate the effectiveness of this method.

Keywords: Optimal Control – Pontryagin's Principle – Projected Gradient Method ..

Résumé :

... une étude sur une classe de problèmes de contrôle optimal et leur analyse, en se focalisant sur l'application de la méthode du gradient projeté comme algorithme numérique itératif [pour résoudre] des problèmes complexes. Cette étude se concentre principalement sur [le fait de] tirer sa force du principe de Pontryaguine, qui représente une condition nécessaire, [en l'utilisant] comme un outil numérique puissant sous certaines conditions et hypothèses pour obtenir une vitesse de convergence déterminée vers la solution optimale pour...

... Nous avons appuyé notre étude par des exemples qui démontrent l'efficacité de cette méthode.

Mots-clés: Contrôle Optimal – Principe de Pontryaguine – Méthode du Gradient Projeté ...