الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis

in Mathematics

Option : Applied Mathematics

Theme :

Estimates for the asymptotic convergence of a non-isothermal linear elasticity with friction

Presented by

Mr. **HACHANI DOUA**

Supervisor: **Dr. Saadallah Abdelkader**

Thesis defended on June 18, 2026, in front of the jury composed of:

Ms.	**CHOUGUI NADHIR**	Dr.	Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Ms.	**SAADALLAH ABDELKADER**	Dr.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Supervisor
Ms.	**DERGUINE MUSTAFA**	Dr.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner

2025/2026

Contents

Remerciements **2**

Dédicace **3**

General Introduction **6**

1 Preliminaries and Reminders **9**
1.1 Tresca-Type Friction Laws 9
1.1.1 Physical Motivation 9
1.1.2 Variational Form of the Tresca Condition 10
1.2 Lebesgue Spaces 10
1.2.1 Definition and Basic Properties 10
1.2.2 Classical Inequalities in L^p 11
1.3 Sobolev Spaces 11
1.3.1 Definition 11
1.3.2 Key Inequalities 12
1.3.3 Trace Theorem 13
1.3.4 Green's Formulas 13
1.4 Weak Convergence 13
1.4.1 Weak and Weak-$*$ Convergence in Banach Spaces 13
1.4.2 Weak Convergence in Hilbert Spaces 14
1.5 Vector-Valued Function Spaces 14
1.6 Convex Analysis and Variational Inequalities 15
1.6.1 Convexity and Lower Semi-Continuity 15
1.6.2 Existence and Uniqueness for Variational Inequalities 16
1.7 Gronwall's Lemma 16

2 Estimates for the asymptotic convergence of a non-isothermal linear elasticity with friction **18**
2.1 Introduction 18
2.2 Weak formulation 20
2.3 Transposition of problem (2.1)–(2.10) 22
2.3.1 A priori estimates of the displacement 23
2.3.2 A priori estimates of the temperature 24
2.4 Convergence results and the limit problem 25
2.5 Conclusion 31

Résumé **34**

Abstract **35**

36

Résumé

Cette étude porte sur l'analyse asymptotique d'un problème thermoélastique dynamique dans un domaine mince soumis à des conditions de frottement de Tresca sur une partie de sa frontière. Le modèle considéré couple les équations de l'élasticité linéaire avec une équation de la chaleur afin de décrire l'interaction entre les déformations mécaniques et les effets thermiques.

Dans un premier temps, une formulation variationnelle faible du problème est établie dans des espaces fonctionnels appropriés. L'existence et l'unicité de la solution faible sont ensuite rappelées à l'aide des outils de l'analyse convexe et des inégalités variationnelles.

Afin d'étudier le comportement du système lorsque l'épaisseur du domaine tend vers zéro, un changement d'échelle est introduit pour transformer le problème initial défini sur un domaine dépendant du paramètre ε en un problème équivalent posé sur un domaine fixe. Cette transformation permet d'obtenir des estimations a priori uniformes indépendantes de ε.

À l'aide des techniques de compacité et de convergence faible, nous démontrons la convergence des suites de solutions et identifions le problème limite correspondant. Les résultats obtenus fournissent une description simplifiée mais rigoureuse du comportement asymptotique du système thermoélastique avec frottement dans les domaines minces.

Mots-clés : Élasticité linéaire, thermoélasticité, domaine mince, frottement de Tresca, formulation variationnelle, convergence asymptotique.

Abstract

This work is devoted to the asymptotic analysis of a dynamic thermoelastic problem in a thin domain with Tresca friction conditions imposed on part of its boundary. The mathematical model couples the equations of linear elasticity with a heat equation in order to describe the interaction between mechanical deformations and thermal effects.

First, a weak variational formulation of the problem is established in suitable functional spaces. The existence and uniqueness of weak solutions are recalled using tools from convex analysis and variational inequalities.

To investigate the behavior of the system as the thickness parameter ε tends to zero, a rescaling transformation is introduced to convert the original problem posed on an ε-dependent domain into an equivalent problem defined on a fixed domain. This approach allows the derivation of uniform a priori estimates independent of ε.

Using compactness arguments and weak convergence techniques, convergence results are established and the corresponding limit problem is derived. The obtained model provides a rigorous and simplified description of the asymptotic behavior of thermoelastic systems with Tresca friction in thin domains.

Keywords: Linear elasticity, thermoelasticity, thin domain, Tresca friction, variational formulation, asymptotic convergence.

تتناول هذه المذكرة الدراسة التقاربية لمشكل ديناميكي في المرونة الحرارية داخل مجال رقيق يخضع لشروط احتكاك من نوع تريسكا على جزء من حدوده. يعتمد النموذج الرياضي المدروس على اقتران معادلات المرونة الخطية مع معادلة الحرارة لوصف التفاعل بين التشوهات الميكانيكية والتأثيرات الحرارية.

في البداية تم اشتقاق الصياغة التغايرية الضعيفة للمسألة ضمن فضاءات دالية مناسبة، مع الاعتماد على أدوات التحليل المحدب والمتراجحات التغايرية لاستعراض وجود ووحدانية الحل الضعيف.

ولدراسة سلوك النظام عندما يقترب سمك المجال من الصفر، تم استعمال تحويل مناسب للمتغيرات يسمح بنقل المسألة من مجال يعتمد على المعلمة ϵ إلى مجال ثابت مستقل عنها. وقد مكّن هذا التحويل من الحصول على تقديرات قبلية منتظمة لا تعتمد على ϵ.

وباستخدام تقنيات التراص والتقارب الضعيف، تم إثبات تقارب الحلول واستخراج المسألة الحدية الموافقة. وتوفر النتائج المتحصل عليها وصفاً مبسطاً ودقيقاً للسلوك التقاربي لنظام المرونة الحرارية المزود بشروط احتكاك من نوع تريسكا في المجالات الرقيقة.

الكلمات المفتاحية: المرونة الخطية، المرونة الحرارية، المجالات الرقيقة، احتكاك تريسكا، الصياغة التغايرية، التقارب التقاربي.