الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعـــة سطيف 1 فرحـــــات عباس
كـليـــة العلـــــــــوم
قســـــم الرياضيـــــــــــات

Master's Thesis

in Mathematics

Option: Optimization and Control

Theme:

A two-steps fixed-point method for solving a general absolute value matrix equation

Presented by

Maroua Djamai and Aya Bouchaoui

Supervisor: **Dr. Anane Nassima**

Thesis defended on June 13, 2026, in front of the jury composed of:

Mr.	Achache Mohamed	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Ms.	Anane Nassima	MCA.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Supervisor
Ms.	Kebaili Zahira	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner

2025/2026

Contents

Glossary of Notation

Problem Classes:

AVE	:	Absolute value equations.
GAVME	:	General absolute value matrix equation.
LCP	:	Linear complementarity problem.
HLCP	:	Horizontal linear complementarity problem .
MLCP	:	Monotone linear complementarity problem.
SLCP	:	Standard linear complementarity problem.
CQP	:	Complementarity quadratic problem.
LP	:	Linear problem.
QP	:	Quadratic problem.

Spaces

$\mathbb{R}^n$	:	The real n-dimensional space.
$\mathbb{R}^n_+$	:	The nonnegative orthant of $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{R}^n_{++}$	:	The positive orthant of $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{R}^{n\times n}$	:	The set of all $n \times\ n$ squared matrices.

Vectors

x_i	:	The i-th component of x.
x^T	:	$(x_1, ..., x_n)$ the transpose of a vector x, with components x_i.
$x \geq 0$	=	$x_i \geq 0, \forall i$.
$x > 0$	:	$x_i > 0, \forall i$.
e	=	$(1\ , ..., 1)^T \in \mathbb{R}^n$.
$\mid x \mid$	:	Absolute value of a vector $x \in \mathbb{R}^n, \mid x \mid = (\mid x_i \mid)\ , i = 1\ , ..., n$.
$x^T y$	=	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ the standard inner product in $\mathbb{R}^n$.
$sign(x)$	:	Denotes a vector with the components equal to -1, 0 or 1.
$\parallel x \parallel$	:	Denote the Euclidean norm $(x^T x)^{\frac{1}{2}}$.

Matrices

I	:	Identity matrix .
$0_{n\times n}$	:	The null matrix of type (n,n) .
A^T	:	The transposed matrix of A.
A^{-1}	:	The inverse of a regular matrix A.
A invertible	:	A non singular.
$\|A\|$	=	$\|(a_{ij})\|$, the absolute value of a_{ij}.
$\lambda_i(A),\ i=1,\ldots,n$	:	The eigenvalues of $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
$\lambda_{\max}(A),\ i=1,\ldots,n$	:	The largest eigenvalues of $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
$\lambda_{\min}(A),\ i=1,\ldots,n$	:	The smallest eigenvalues of $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
$\sigma_{\max}(A)$	:	The largest singular value of matrix A.
$\sigma_{\min}(A)$	:	The smallest singular value of matrix A.
$tr\,(A)$	=	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$, (the trace of a matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$).
$\rho\,(A)$	=	$\max\|\lambda_i(A)\|$, (the spectral radius of A).
$\\|A\\|_2$	=	$\sqrt{\rho\,(A^TA)}$, (the spectral norm of A).
$D(x)$	=	diagonal matrix whose diagonal elements are ± 1 and 0.

ملخص

تتناول هذه الأطروحة دراسة فئة من **معادلات القيمة المطلقة المصفوفية العامة (GAVME)** التي تأتي وفق الصيغة: **$AX- B|X| = C$, ($A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$,)** حيث إن **(A, B, C)** مصفوفات معطاة. وقد قمنا في هذا العمل بإظهارعدة شروط كافية لضمان **وحدانية** الحل لهذه المعادلات. ولحلها عدديًا، نقترح طريقتين تكراريتين :طريقة بيكارد ذات الخطوتين وطريقة النقطة الثابتة .بالإضافة إلى ذلك ، نبرهن أن الخوارزميات المقترحة معرفة بشكل جيد وتتمتع بتقارب خطي عام نحو الحل الفريد .وأخيرًا، نعرض مجموعة متنوعة من التجارب العددية لتأكيد فعالية وقوة طريقتنا

الكلمات المفتاحية: المعادلات المصفوفية ذات القيمة المطلقة، الحل الوحيد، طريقة بيكار، طريقة النقطة الثابتة، الطرق التكرارية، التقارب العام.

Résumé :

Ce mémoire examine une classe **d'équations matricielles en valeur absolue générale (GAVME)** de la forme : $AX-B|X|=C$, ($A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$,) sont des matrices données. Nous établissons plusieurs conditions suffisantes affaiblies pour garantir **l'existence et l'unicité** de la solution de la GAVME. Pour sa résolution numérique, deux méthodes itératives sont proposées : la méthode itérative de Picard à deux étapes et la méthode de point fixe. De plus, nous démontrons que les algorithmes proposés sont bien définis et présentent **une convergence linéaire globale** vers la solution unique de la GAVME. Enfin, une diversité d'expériences numériques est présentée pour confirmer l'efficacité et la robustesse de notre approche.

Mots-clés : Équations matricielles à valeur absolue, solution unique, méthode de Picard, méthode du point fixe, méthode itérative, convergence globale.

Abstract :

This dissertation investigates a class of **General Absolute Value Matrix Equations (GAVME)** of the form: $AX-B|X| = C$, ($A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$,) are given matrices. We derive several weakened sufficient conditions to guarantee the **unique solvability** of the GAVME. For its numerical solution, a two-steps Picard’s and fixed-point iterative methods are proposed. Furthermore, we establish that under suitable assumptions, the proposed algorithms are well-defined and exhibit **global linear convergence** toward the unique solution of the GAVME. To conclude, a diverse array of numerical experiments is presented to substantiate the efficiency and robustness of our approach.

Key words: Absolute value matrix equations, unique solution, Picard’s fixed-point, iterative method, global convergence.