الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis

in Mathematics

Option : Applied Mathematics

Theme :

FINITE ELEMENT METHOD FOR A ONE-DIMENSIONAL PROBLEMS

Presented by

Miss. **Ayat Errahmane ACHACHA**

Supervisor: **Pr. Nadhir CHOUGUI**

Thesis defended on June 22, 2026, in front of the jury composed of:

Mr.	Abdelkader SAADALLAH	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Mr.	Nadhir CHOUGUI	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Supervisor
Mr.	Mustafa DERGUINE	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner

2025/2026

Contents

Introduction iii

1 Finite Element Method in One Dimension 1
- 1.1 Model Problem . . . 1
- 1.2 Variational Formulation . . . 1
- 1.3 Ritz Approximation . . . 1
- 1.4 Finite Element Approximation on an Element . . . 2
  - 1.4.1 Mesh . . . 2
  - 1.4.2 Local Variational Formulation . . . 5
  - 1.4.3 Transformation to the Reference Element . . . 7
  - 1.4.4 Construction of Interpolation Functions . . . 8
  - 1.4.5 Computation of the Element System . . . 10
- 1.5 Assembly of the Global Stiffness Matrix . . . 11
  - 1.5.1 Construction of Ritz Basis Functions . . . 11
  - 1.5.2 Construction of the Global System . . . 14
- 1.6 Imposition of Boundary Conditions . . . 17
- 1.7 Solution of the Global System . . . 18

2 Numerical Examples 20
- 2.1 Example 1 . . . 20
- 2.2 Example 2 . . . 25
- 2.3 Python Implementation . . . 30

Conclusion 34

Bibliography 35

List of Figures

1.1 One-Dimensional Mesh . . . 2
1.2 Geometric and Computational Nodes of Element K . . . 3
1.3 Mesh: $n_{el} = 3$, $n_g^K = 2$, $n_c^K = 3$, and $n_{nodes} = 7$ . . . 4
1.4 Linear Interpolation Functions on $\hat{K}$ . . . 9
1.5 Quadratic Interpolation Functions on $\hat{K}$ . . . 10
1.6 Linear Ritz Functions for Each Element . . . 14
2.1 Mesh: $n_{el} = 5$, $n_g^K = 2$, $n_c^K = 3$, and $n_{nodes} = 11$ . . . 20
2.2 Approximate and Exact Solution of the Problem (2.1) . . . 24
2.3 Mesh: $n_{el} = 5$, $n_g^K = 2$, $n_c^K = 3$, and $n_{nodes} = 11$ . . . 25
2.4 Approximate and Exact Solution of the Problem (2.2) . . . 30

ملخص:

في هذه المذكرة، تمت دراسة طريقة العناصر المنتهية أحادية البعد لمشاكل المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية لإيجاد الحل التقريبي، وذلك عن طريق تقسيم مجال الدراسة إلى عناصر صغيرة حيث يتم في كل عنصر البحث عن صيغة مبسطة ثم نظام معادلات يمكن تمثيله بمصفوفة، ليتم بعد ذلك تجميع أنظمة المعادلات لجميع العناصر التي تشكل مصفوفة كبيرة، وحل هذا النظام العام يعطينا الحل التقريبي.

كما تم الحصول على النتائج التقريبية والتمثيلات البيانية باستخدام لغة البرمجة بايثون.

الكلمات المفتاحية: مشاكل مع الشروط الحدية، الصيغة المتغيرة، طريقة ريتز، شبكة، عقدة، عنصر، الدوال التقريبية، التجميع.

Résumé :

Dans ce mémoire, la méthode des éléments finis unidimensionnelle a été étudié pour résoudre des problèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre afin de trouver la solution approchée. Pour ce faire, on divise le domaine d'étude en petits éléments, où l'on cherche pour chaque élément une formulation simplifiée puis un système d'équations pouvant être représenté par une matrice. Ensuite, on assemble les systèmes d'équations de tous les éléments pour former une grande matrice, et la résolution de ce système global donne la solution approchée.

De plus, les résultats approchés et les représentations graphiques ont été obtenus en utilisant le langage de programmation Python.

Mots-clés : Problèmes aux limites, formulation variationnelle, méthode de Ritz, maillage, nœud, élément, fonctions d'approximation, assemblage.

Abstract:

In this thesis, the one-dimensional finite element method was studied for second-order partial differential equation problems to find the approximate solution. This is achieved by dividing the domain of study into small elements, where in each element a simplified formulation is sought within each element to establish a system of equations that can be represented as a matrix. The systems of equations for all elements are then assembled to form a large matrix, and solving this global system yields the approximate solution.

The approximate results and graphical representations were obtained using the Python programming language.

Keywords: Boundary Value Problems, variational formulation, Ritz method, mesh, node, element, approximation functions, assembly.