الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis

in Mathematics

Option : Applied Mathematics

Theme :

FINITE VOLUME METHOD FOR AN ELLIPTIC PROBLEM IN 3D

Presented by

Miss. **BRADA Yousra**

Supervisor: **Pr. Mohamed KARA**

Thesis defended on June 21, 2026, in front of the jury composed of:

Mr.	Pr. Salim MESBAHI	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Mr.	Pr. Mohamed KARA	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Supervisor
Mr.	Pr. Nadhir CHOUGUI	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner

2025/2026

Contents

General Introduction **6**
Notations 8

Chapter 1 : Functional Framework and Spectral Theory **10**
1.1 Introduction 11
1.2 The Sobolev Space 11
1.2.1 Weak Derivatives 11
1.2.2 The Sobolev Space $W^{1,p}(\Omega)$ 12
1.2.3 Scalar Product and Norm 12
1.2.4 The Space $H_0^1(\Omega)$ 12
1.3 Fundamental Results 13
1.3.1 Poincaré Inequality 13
1.3.2 Divergence theorem 13
1.3.3 Green's Formula 13
1.3.4 Linear and bilinear Form 14
1.3.5 Properties 14
1.3.6 Symmetric Bilinear Forms 14
1.3.7 Lax–Milgram Theorem 14
1.4 Spectral Theory 14
1.4.1 Compact Operators 15
1.4.2 Kernel and Image 15
1.4.3 Eigenvalues and Eigenfunctions 15
1.4.4 Spectral theorem 16

Chapter 2 : Finite Volume Methods for Elliptical Problems **17**
2.1 The Problem setting : 18
2.2 The weak formulation of the problem 19
2.2.1 Continuity and coercivity of the bilinear form 21

2.3 Spectral study of the problem 23
2.4 Finite volume discretization 24
2.4.1 Description of the mesh 25
2.4.2 Discretization of problem equations 27
2.4.3 Flux computation 30
2.5 Final result in block matrix form 34

Chapter 3 : Numerical Tests **37**
3.1 Validation of the method 38
3.2 The Tensor Product $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ 40
3.3 Tensor Product of Linear Operators 42
3.3.1 Discretization of the operator $\mathcal{A}$ 42
3.4 Structure of the Matrix in 3D 43
3.4.1 Elements of the problem matrix 43
3.5 3D assembly via the Kronecker product 44
3.6 Program in Scilab 45
3.6.1 Resolution of the generalized eigenvalue problem 49

General Conclusion **58**

Bibliography **58**

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude spectrale d'un problème elliptique tridimensionnel par la méthode des volumes finis. Après avoir présenté le cadre fonctionnel, des espaces de Sobolev et des principaux résultats de la théorie spectrale, une formulation variationnelle du problème est établie. Une discrétisation par volumes finis sur un maillage structuré en trois dimensions est ensuite développée. Le shéma proposé a été validé par des tests numériques. Les résultats obtenus montrent la precision du shéma numériques

Mots-clés : problème elliptique, valeurs propres, fonctions propres, théorie spectrale, méthode des volumes finis, convergence

Abstract

This thesis is devoted to the spectral analysis of a three-dimensional elliptic problem using the finite volume method. After presenting the functional framework, Sobolev spaces, and the main results of spectral theory, a variational formulation of the problem is established. A finite volume discretization on a structured three-dimensional mesh is then developed. The proposed scheme has been validated through numerical tests. The obtained results demonstrate the accuracy of the numerical scheme.

Keywords: elliptic problem, eigenvalues, eigenfunctions, spectral theory, finite volume method, convergence

ملخص

تُخصَّص هذه المذكرة للدراسة الطيفية لمسألة إهليلجية ثلاثية الأبعاد باستعمال طريقة الحجوم المنتهية. بعد تقديم الإطار الوظيفي، وفضاءات سوبوليف، وأهم نتائج النظرية الطيفية، يتم وضع الصياغة التغايرية للمسألة. بعد ذلك، يتم تطوير تقريب عددي باستعمال طريقة الحجوم المنتهية على شبكة منتظمة ثلاثية الأبعاد. وقد تم التحقق من صحة المخطط العددي المقترح من خلال اختبارات عددية. وتُظهر النتائج المتحصل عليها دقة وفعالية المخطط العددي في تقريب القيم الذاتية والدوال الذاتية للمسألة المدروسة

الكلمات المفتاحية: مسألة إهليلجية، القيم الذاتية، الدوال الذاتية، النظرية الطيفية، طريقة الحجوم المنتهية، التقارب.