الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis

in Mathematics

Option : Applied Mathematics

Theme :

Maximum principles and Harnack's inequality

Presented by

Miss/Ms/Mr. **Bekar Khadra Ikram**

Supervisor: **Dr. Sallah eddine BOUTIAH**

Thesis defended on June 22, 2026, in front of the jury composed of:

Mr.	Lakhdar CHITER	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Mr.	Sallah eddine BOUTIAH	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Supervisor
Mr.	Aissa BENSEGHIR	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner

2025/2026

Contents

Introduction **6**

1 Preliminaries **8**
1.1 Function Spaces 8
1.1.1 C^k Spaces 8
1.1.2 Hilbert spaces 8
1.1.3 Banach spaces 9
1.1.4 Lebesgue spaces L^p 9
1.1.5 Sobolev spaces 9
1.2 Gradient and Hessian 10
1.3 Elliptic operator 10
1.4 Parabolic operator 11
1.5 Weak solution 12
1.6 Lax-Milgram 12
1.7 Some Useful Inequalities 13
1.7.1 Cauchy-Schwarz inequality 13
1.7.2 Cauchy's inequality with ε 13
1.7.3 Poincaré's inequality 13
1.8 Difference Quotients 13
1.9 Regularity 14

2 Maximum principles **20**
2.1 Maximum principles for Second-Order Elliptic Operators 20
2.1.1 Weak maximum principle 20
2.1.2 Strong maximum principle 26
2.2 Maximum principles for Second-order Parabolic Operators 29
2.2.1 Weak maximum principle 29
2.2.2 Strong maximum principle 32

3 Harnack's inequality **34**
3.1 Harnack inequality for harmonic functions 34
3.2 Elliptic Harnack inequality 38
3.3 Parabolic Harnack inequality 42

Conclusion **48**

Bibliography **48**

Abstract

This thesis studies two fundamental principles in the theory of second-order elliptic and parabolic partial differential equations: the maximum principles and Harnack's inequality. We prove the weak and strong maximum principles, using Hopf's lemma to show that an interior maximum forces the solution to be constant. We then establish Harnack's inequality, which provides quantitative comparison bounds for positive solutions. Starting from harmonic functions, we extend the result to elliptic operators with smooth coefficients, state Moser's results for measurable coefficients, and prove the parabolic Harnack inequality. As an application, we use it to prove the strong maximum principle for parabolic operators. These results form a unified framework for understanding the regularity and pointwise behavior of solutions.

Keywords: maximum principles, Harnack inequality, elliptic PDEs, parabolic PDEs, Hopf's lemma, positive solutions.

Résumé

Cette thèse étudie deux principes fondamentaux dans la théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques du second ordre : les principes du maximum et l'inégalité de Harnack. Nous prouvons les principes du maximum faible et fort, en utilisant le lemme de Hopf pour montrer qu'un maximum intérieur force la solution à être constante. Nous établissons ensuite l'inégalité de Harnack, qui fournit des bornes de comparaison quantitatives pour les solutions positives. En partant des fonctions harmoniques, nous étendons le résultat aux opérateurs elliptiques à coefficients réguliers, énonçons les résultats de Moser pour les coefficients mesurables, et prouvons l'inégalité de Harnack parabolique. Comme application, nous l'utilisons pour prouver le principe du maximum fort pour les opérateurs paraboliques. Ces résultats forment un cadre unifié pour comprendre la régularité et le comportement ponctuel des solutions.

Mots-clés : principes du maximum, inégalité de Harnack, EDP elliptiques, EDP paraboliques, lemme de Hopf, solutions positives.

الملخص

تدرس هذه الأطروحة مبدأين أساسيين في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليلجية والبارابولية من الدرجة الثانية: مبادئ القصوى ومتراجحة هارناك. نثبت مبادئ القصوى الضعيفة والقوية، باستخدام مبرهنة هوبف لإظهار أن النقطة القصوى الداخلية تجبر الحل على أن يكون ثابتاً. ثم نثبت متراجحة هارناك، التي تقدم حدود مقارنة كمية للحلول الموجبة. انطلاقاً من الدوال التوافقية، نقوم بتوسيع النتيجة إلى المؤثرات الإهليلجية ذات المعاملات الناعمة، ونذكر نتائج موسر للمعاملات القابلة للقياس، ونثبت متراجحة هارناك البارابولية. كتطبيق، نستخدمها لإثبات مبدأ القصوى القوي للمؤثرات البارابولية. تشكل هذه النتائج إطاراً موحداً لفهم الانتظام والسلوك النقطي للحلول.

الكلمات المفتاحية: مبادئ القصوى، متراجحة هارناك، معادلات تفاضلية جزئية إهليلجية، معادلات تفاضلية جزئية بارابولية، حلول موجبة.