



Setif 1 University Ferhat Abbas

Faculty of Sciences

Department of Mathematics



جامعة سطيف 1 فرحات عباس

كلية العلوم

قسم الرياضيات

Master's Thesis in Mathematics

Option : Algebra and Geometry

Theme :

**UNE PROPRIÉTÉ QUI GARANTIT QU'UN GROUPE
RÉSOLUBLE DE TYPE FINI EST PÉRIODIQUE-PAR-
NILPOTENT**

Presented by

Miss. Hibet errahman BOUGUENNA & Miss. Manel HAMOUDA

Supervisor: **Dr. Fares GHERBI**

Thesis defended on June 24, 2026, in front of the jury composed of:

Mr. Tarek ROUABHI	Dr. Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Mr. Fares GHERBI	Dr. Setif 1 University Ferhat Abbas	Supervisor
Ms. Khalissa MERIKHI	Dr. Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner

2025/2026

Table des matières

Remerciements	1
Notations	2
Introduction	3
1 Eléments de théorie des groupes	6
1.1 Introduction	6
1.2 Groupes périodiques et sans torsions	6
1.3 Groupes résolubles	9
1.4 Groupes vérifiant la condition maximale sur les sous-groupes et sur les sous-groupes normaux	12
1.5 Groupes polycycliques	15
1.6 Groupes nilpotents	17
1.7 Groupes d'Engel	22
1.8 Groupes des classes $\mathcal{FN}$ et $\mathcal{NF}$	24
2 Système de sous-groupes engendrés par deux éléments	26
2.1 Introduction	26
2.2 Caractérisation de la classe de groupes ${}^{\perp}\mathbf{F}(\mathcal{FN})$	27
2.3 Caractérisation de la classe de groupes ${}^{\perp}\mathbf{F}(\mathcal{TN})$	30
Bibliographie	32

Résumé

Etant donnée une classe de groupes $\mathcal{X}$, on note $\bar{F}\mathcal{X}$ la classe des groupes G tels que pour tout élément x dans G il existe un sous-groupe $H(x)$ normal et d'indice fini dans G vérifiant $\langle x, x^h \rangle \in \mathcal{X}$ pour tout $h \in H(x)$. En 2024, **N. Trabelsi** et **F. Gherbi** dans leur article, ont caractérisé la classe de groupes $\bar{F}\mathcal{X}$ où $\mathcal{X}$ est soit la classe des groupes finis-par-nilpotents (notée $\mathcal{FN}$), soit la classe des groupes périodiques-par-nilpotents (notée $\mathcal{TN}$). Notre objectif dans ce mémoire, est de présenter, avec leurs démonstrations, les résultats obtenus par **N. Trabelsi** et **F. Gherbi** dans leur article, concernant les deux classes de groupes $\bar{F}(\mathcal{FN})$ et $\bar{F}(\mathcal{TN})$.

Mots et phrases clés : Groupes finis, groupes périodiques, groupes nilpotents, groupes résolubles de type fini.

Classification AMS 2020 : 20E25, 20F19.

ملخص

بإعطاء فئة زمير $\mathcal{X}$ ، نشير بـ $\bar{F}\mathcal{X}$ إلى فئة الزمر G بحيث أن من أجل كل عنصر x في G توجد زمرة جزئية $H(x)$ ناظمية و ذات دليل منتهى في G محققة للشرط $\langle x, x^h \rangle \in \mathcal{X}$ من أجل كل $h \in H(x)$. في 2024، ن. طرابلسي و ف. غربي في مقالاتهم، قاما بتمييز فئة الزمر $\bar{F}\mathcal{X}$ أين $\mathcal{X}$ هي إما فئة الزمر المنتهية بواسطة زمرة عديمة القوة (يرمز إليها بـ $\mathcal{FN}$)، وإما فئة الزمر الدورية بواسطة زمرة عديمة القوة (يرمز إليها بـ $\mathcal{TN}$). هدفنا في هذه المذكرة، هو تقديم، مع البراهين، النتائج المحصل عليها من طرف ن. طرابلسي و ف. غربي، في مقالاتهم، والمتعلقة بفئتي الزمر $\bar{F}(\mathcal{FN})$ و $\bar{F}(\mathcal{TN})$.

كلمات وجمل مفتاحية : الزمر المنتهية، الزمر الدورية، الزمر عديمة القوة، الزمر القابلة للحل من نمط منتهي.

تصنيف الجمعية الأمريكية (2020) : 20E25، 20F19.

Abstract

Given a class of groups $\mathcal{X}$, we denote by $\bar{F}\mathcal{X}$ the class of groups G such that for any element x in G there exists a normal subgroup $H(x)$ with finite index in G satisfying $\langle x, x^h \rangle \in \mathcal{X}$ for any $h \in H(x)$. In 2024, **N. Trabelsi** and **F. Gherbi** in their article, characterized the class of groups $\bar{F}\mathcal{X}$ where $\mathcal{X}$ is either the class of finite-by-nilpotent groups (denoted $\mathcal{FN}$), or the class of periodic-by-nilpotent groups (denoted $\mathcal{TN}$). Our objective in this memorandum, is to present, with their proofs, the results obtained by **N. Trabelsi** and **F. Gherbi** in their article, concerning the two classes of groups $\bar{F}(\mathcal{FN})$ and $\bar{F}(\mathcal{TN})$.

Key words and Phrases: Finite groups, periodic groups, nilpotent groups, finitely generated soluble groups.

2020 AMS subject classification: 20E25, 20F19.